УДК 62-231:621.9.04

А.М. Кириченко, к.т.н., докторант
В.Б. Струтинський, д.т.н., проф.
Національний технічний університет України "КПІ"

ПРОСТОРОВА ЖОРСТКІСТЬ ОБЛАДНАННЯ З ПАРАЛЕЛЬНОЮ КІНЕМАТИКОЮ

Проаналізовано структуру та математичні властивості матриці просторової жорсткості механізмів паралельної структури, визначено її залежність від системи координат.

Вступ. Поряд з формою та розмірами робочого простору, наявністю і конфігурацією особливих положень, рухливістю і точністю положення робочого органу [1, 2], жорсткість є одною з найбільш важливих характеристик обладнання з паралельною кінематикою, яка визначає його точність, вантажну спроможність та динамічні показники. Недостатня жорсткість ланок або опор може викликати великі пружні переміщення робочого органу під дією зовнішніх сил та моментів, які згубно випливають як на точність, так і на вантажну спроможність. Крім того, недостатня жорсткість призводить до зменшення власних частот, погіршення динамічних показників, збільшення часу перехідних процесів в кінематичних структурах, зростання динамічних переміщень та вібрацій у перехідних режимах, що може погіршити динамічну якість обладнання з паралельною кінематикою, особливо при високих силах інерції та роботі у області частот, близьких до власних.

Постановка задачі. У найбільш простому випадку жорсткість може бути визначена як величина прикладеної сили на одиницю пружного переміщення або співвідношення сили, діючої на деформівне тіло, до викликаного нею переміщення [3].

Відомо, що просторову жорсткість системи, на яку діють консервативні сили та моменти, можна описати тензором, який є гесіаном (визначником Гессе) потенціальної функції, тобто квадратною матрицею частинних похідних другого порядку від потенціалу [4]. Наприклад, гесіан потенціалу $\xi_{\mathbf{f}}$, пов'язаного з вектором навантаження $\mathbf{f}$, по відношенню до вектора декартових координат $\mathbf{x}$, представляє собою матрицю жорсткості

$$K = \frac{\partial^2 \xi_{\mathbf{f}}}{\partial \mathbf{x}^2}. \tag{1}$$

Оскільки силу можна визначити як градієнт пов'язаного потенціалу, матриця жорсткості також є якобіаном сили. Матриця жорсткості консервативна, тобто робота визначеної з неї сили на замкненому шляху повинна дорівнювати нулю.

Розглянемо рівновагу пружної системи узагальненого механізму паралельної структури з зовнішнім зусиллям (рис. 1), прикладеним у точці A, яка може розміщуватись на робочому органі і бути центром системи координат $X_AY_AZ_A$. Прикладене навантаження $\mathbf{W}$ викликає пружне переміщення робочого органа. Зокрема, система координат, прив'язана до точки A, перетвориться на $X'_AY'_AZ'_A$. У найбільш загальному випадку відбудеться зсув та поворот системи координат.

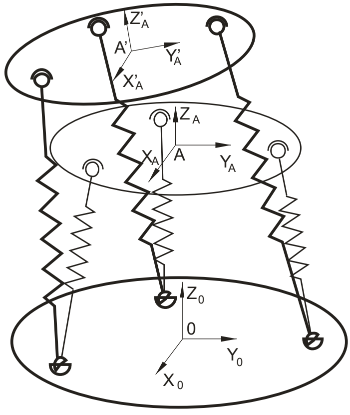

Рис. 1. Пружна система узагальненого механізму паралельної структури

У декартовій системі координат можна визначити вектори 6x1 зовнішнього навантаження

$$\mathbf{W} = \left[\, \mathbf{f}^{T} \;\; \tau^{T} \,\right]^{T}, \tag{2}$$

де $\mathbf{f} = \left[P_x, P_y, P_z\right]^T$ – вектор сил; $\tau = \left[M_x, M_y, M_z\right]^T$ – вектор моментів; P_x, P_y, P_z – складові сили, що діють у точці A у напрямках осей X, Y та Z відповідно; M_x, M_y, M_z – складові моменти, що діють у точці A відносно осей X, Y та Z відповідно.

Визначимо також вектор пружних переміщень у вигляді

$$\Delta\mathbf{S} = \left[\, \mathbf{v}^{T} \;\; \mathbf{w}^{T} \,\right]^{T}, \tag{3}$$

де $\mathbf{v}=\left[\Delta x,\Delta y,\Delta z\right]^T$ – вектор лінійних переміщень робочого органа; $\mathbf{w}=\left[\Delta\psi,\Delta\theta,\Delta\varphi\right]^T$ – вектор кутових переміщень; $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ – різниця між координатами та $\Delta\psi,\Delta\theta,\Delta\varphi$ – різниця між кутами Крилова систем координат $X'_AY'_AZ'_A$ та $X_AY_AZ_A$ у обраній нерухомій системі координат $X_0Y_0Z_0$.

Тоді зв'язок між переміщенням робочого органа під навантаженням та величиною останнього встановлюється рівнянням

$$\mathbf{W}=K\,\mathbf{ДS}, \tag{4}$$

де K – *матриця просторової жорсткості* розмірністю 6х6, яка характеризує загальну жорсткість обладнання з паралельною кінематикою. Фізичний зміст елементів матриці жорсткості k_{ji} – жорсткість системи в напрямку i-ї узагальненої координати при дії j-ї компоненти узагальненого навантаження.

Слід відмітити, що лінійна залежність (4) справедлива лише для малих величин пружних переміщень $\mathbf{ДS}$ та лише у випадку статичного навантаження.

Отже, матриця просторової жорсткості повністю описує пружні властивості механізму паралельної структури та його поведінку при статичному навантаженні. Узагальнення математичних властивостей матриці жорсткості, розкриття фізичного змісту її елементів та їх зв'язку з пружними параметрами механізмів паралельної структури є важливим для дослідження жорсткості обладнання з паралельною кінематикою. Також актуальним питанням є визначення залежності матриці жорсткості механізму від вибору системи координат з метою подальшого її приведення до більш простої форми.

Структура матриці жорсткості. Матрицю просторової жорсткості 6х6 можна представити у вигляді чотирьох блоків 3х3

$$K=\begin{bmatrix} K_{\text{п}} & K_{\text{с}} \\ K_{\text{с}}^T & K_{\text{к}} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

де $K_{\text{п}}$, $K_{\text{с}}$ та $K_{\text{к}}$ – матриці, визначені набором власних жорсткостей та відповідних ортонормальних векторів.

Матриця $K_{\text{п}}$ симетрична, нормальна і представляє собою матрицю поступальної жорсткості, яка встановлює відношення між чистим лінійним переміщенням та відповідною силою. Матрицю $K_{\text{п}}$ можна представити у вигляді

$$K_{\text{п}}=R_{\text{п}}\Gamma_{\text{п}}R_{\text{п}}^T, \tag{6}$$

де $R_{п}$ – ортогональна матриця, стовпчики якої відповідають осям поступальної жорсткості, $\Gamma_{п} = diag\left(\gamma_{п}^{1}, \gamma_{п}^{2}, \gamma_{п}^{3}\right)$ – діагональна матриця відповідних поступальних жорсткостей. Навантаження силою вздовж одної з осей викликає поступальне переміщення лише у напрямку цієї осі.

Матриця $K_{к}$, також симетрична і нормальна, представляє собою матрицю крутильної жорсткості, яка встановлює відношення між чистим поворотом та відповідним моментом. Матрицю $K_{к}$ можна представити у вигляді

$$K_{к} = R_{к}\Gamma_{к}R_{к}^{T}, \qquad (7)$$

де $R_{к}$ – ортогональна матриця, стовпчики якої відповідають осям крутильної жорсткості, $\Gamma_{к} = diag\left(\gamma_{к}^{1}, \gamma_{к}^{2}, \gamma_{к}^{3}\right)$ – діагональна матриця відповідних крутильних жорсткостей. Навантаження моментом навколо одної з осей викликає поворот лише навколо цієї осі.

Матриця $K_{с}$ – несиметрична в загальному випадку матриця сполучної жорсткості, яка встановлює співвідношення між силою та поворотом, між моментом та поступальним переміщенням. Матрицю $K_{с}$ можна представити у вигляді

$$K_{с} = R_{с}\Gamma_{с}R_{с}^{T}, \qquad (8)$$

де $R_{с}$ – ортогональна матриця, стовпчики якої відповідають сполучним осям жорсткості, $\Gamma_{с} = diag\left(\gamma_{с}^{1}, \gamma_{с}^{2}, \gamma_{с}^{3}\right)$ – діагональна матриця відповідних сполучних жорсткостей. Навантаження моментом навколо одної з сполучних осей викликає обертальне переміщення у напрямку цієї осі, а навантаження силою уздовж одної з сполучних осей викликає поворот навколо цієї осі.

Оскільки розмірності елементів матриць $K_{п}$, $K_{с}$ та $K_{к}$ визначаються відповідно до їх фізичного змісту, матриця жорсткості має неоднорідну розмірність. Якщо виразити силу в [Н] та переміщення в [м], то блоки матриці K мають наступні розмірності

$$K = \begin{bmatrix} \text{Н} \cdot \text{м}^{-1} & \text{Н} \\ \text{Н} & \text{Н} \cdot \text{м} \end{bmatrix}.$$

Математичні властивості матриці жорсткості. Матриця жорсткості K – симетрична, нормальна (виконується співвідношення $K\,K^{T} = K^{T}K$). Якщо механізм паралельної структури знаходиться в стійкій рівновазі, матриця просторової жорсткості невироджена (яка має обернену) і позитивно визначена (така, що $\mathbf{z}^T K\ \mathbf{z} > 0$ для всіх ненульових векторів $\mathbf{z} \in R^6$). Усі власні значення невиродженої матриці K позитивні $\lambda_i > 0$ ($i = 1,\ 2, \ldots, 6$).

Якщо матриця жорсткості K вироджена, вона має одне або більше нульових власних значень, які відповідають нульовій поступальній жорсткості у певному напрямку або нульовій обертальній жорсткості відносно певної осі. Така ситуація відповідає особливим положенням другого роду [1], коли усі приводи механізму паралельної структури нерухомі, а робочий орган може вільно рухатись в певних межах. В особливих положеннях зворотна матриця жорсткості не може бути обчислена, а отже не можна визначити переміщення робочого органа при заданому навантаженні. Вироджена матриця жорсткості є симетричною позитивно напіввизначеною, тобто її власні значення нульові або позитивні $\lambda_i \geq 0$.

Визначник (детермінант) матриці жорсткості K обчислюється як

$$|K| = 1 + \sum_{i=1}^{6} S_i (-1)^{6-i}, \tag{9}$$

де S_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ – сума головних мінорів порядку i матриці K. Визначник матриці жорсткості K представляє собою об'єм гіпереліпсоїда, інваріантний в перетвореннях подібності, а отже не залежить від вибору системи координат.

Слід $Tr(K)$ матриці жорсткості обчислюється як сума елементів головної діагоналі

$$Tr(K) = \sum_{i=1}^{6} K_{ii} . \tag{10}$$

Слід представляє собою суму елементів матриці жорсткості вздовж напрямків осей координат. Оскільки не всі елементи головної діагоналі мають однакову розмірність, слід матриці жорсткості не несе повного фізичного змісту.

Власні значення матриці K можна обчислити як корені характеристичного поліному

$$\lambda^6 + \sum_{i=1}^{6} S_i (-\lambda)^{6-i} = 0 . \tag{11}$$

Якщо $K = \lfloor k_{ij} \rfloor$ – симетрична матриця з власними значеннями $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$, справедливі такі співвідношення [5]:

1. Усі діагональні елементи матриці більші від мінімального власного значення та менші від максимального $\lambda_1 \le k_{ii} \le \lambda_n$.

2. Сума діагональних елементів дорівнює сумі власних значень $\sum_{i=1}^{6} k_{ii} = \sum_{j=1}^{6} \lambda_j$.

3. Сума квадратів діагональних елементів не перевищує суми квадратів власних значень $\sum_{i=1}^{6} k_{ii}^2 \le \sum_{j=1}^{6} \lambda_j^2$.

4. Дисперсія діагональних елементів не перевищує дисперсії власних значень

$$\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}\left(k_{ii} - \bar{k}\right)^2 \le \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}\left(\lambda_i - \bar{\lambda}\right)^2, \tag{12}$$

де $\bar{k} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} k_{ii}$ та $\bar{\lambda} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \lambda_i$ дорівнюють $Tr(K)/6$.

5. Сума попарних добутків усіх власних значень не перевищує суми попарних добутків діагональних елементів $\sum_{i<j}^{6} \lambda_i \lambda_j \le \sum_{i<j}^{n6} k_{ii} k_{jj}$.

6. Сума квадратів попарних різниць усіх діагональних елементів не перевищує суми квадратів попарних різниць власних значень $\sum_{i<j}^{6}\left(k_{ii} - k_{jj}\right)^2 \le \sum_{i<j}^{6}\left(\lambda_i - \lambda_j\right)^2$.

7. Якщо матриця позитивно визначена, її визначник не перевищує добутку діагональних елементів

$$|K| \le \prod_{i=1}^{6} k_{ii}. \tag{13}$$

Кожному власному значенню λ відповідає ненульовий власний вектор x, що задовольняє співвідношення

$$K\mathrm{x} = \lambda\mathrm{x}. \tag{14}$$

Оскільки матриця жорсткості нормальна, її власні вектори ортонормальні і утворюють базис 6-вимірного простору, а складена з них матриця є ортогональною.

Фізичний зміст власних значень полягає у визначенні величин головних поступальних та крутильних жорсткостей, а власні вектори, пов’язані з максимальними та мінімальними власними значеннями матриці жорсткості, визначають напрямки максимальної та мінімальної жорсткості. Різниця між власними значеннями характеризує анізотропію жорсткості у певному положенні механізму.

Перетворення координат. При переході від системи координат $X_0Y_0Z_0$ до системи $X'_0Y'_0Z'_0$, початок координат якої O' одержується паралельним переносом початку координат O вектором $\mathbf{p} = [p_1,\ p_2,\ p_3]^T$, вектор навантаження $\mathbf{W}$ змінюється наступним чином

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}' \\ \tau\boldsymbol{\phi}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \tau\boldsymbol{\phi} - \mathbf{p}\times\mathbf{f} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Тоді зв’язок між векторами навантаження $\mathbf{W}'$ та $\mathbf{W}$ у системах координат $X_0Y_0Z_0$ та $X'_0Y'_0Z'_0$ можна записати наступним чином

$$\mathbf{W}' = S\,\mathbf{W}, \tag{16}$$

де S – матриця 6х6 просторового паралельного переносу

$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -\langle\mathbf{p}\rangle & E \end{bmatrix}, \tag{17}$$

E – одинична матриця 3х3, $\langle\mathbf{p}\rangle$ – кососиметрична матриця 3х3, породжена вектором паралельного переносу початку координат O до O', заданим в системі координат $X_0Y_0Z_0$

$$\langle\mathbf{p}\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Якщо початки систем координат співпадають, а R – матриця 3х3 повороту від системи $X'_0Y'_0Z'_0$ до $X_0Y_0Z_0$, то

$$\mathbf{W}' = H\ \mathbf{W}, \tag{19}$$

де H – матриця 6х6 просторового повороту

$$H = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Якщо для переходу до системи координат $X'_0Y'_0Z'_0$ необхідно послідовно здійснити переміщення та поворот, то

$$\mathbf{W}' = T\ \mathbf{W}, \tag{21}$$

а матриця просторового перетворення має вигляд

$$T = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -\langle\mathbf{p}\rangle & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ -\langle\mathbf{p}\rangle R & R \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Зворотне перетворення задається матрицею T^{-1}, яка згідно з правилами обернення блочних матриць дорівнює

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & 0 \\ R^T \langle \mathbf{p} \rangle & R^T \end{bmatrix}. \qquad (23)$$

Якщо записати (4) у іншій системі координат $X'_0Y'_0Z'_0$, одержимо

$$\mathbf{W}' = K' \Delta\mathbf{S}, \qquad (24)$$

де $\mathbf{W}'$ та $\mathbf{S}'$ – вектори узагальненого навантаження та пружних переміщень, записані у новій системі координат.

Прирівнюючи роботи навантаження $\mathbf{W}$ на переміщенні $\Delta\mathbf{S}$ та навантаження $\mathbf{W}'$ на переміщенні $\mathbf{S}'$, визначаємо, що

$$\mathbf{S} = T^T \Delta\mathbf{S}, \qquad (25)$$

а залежність матриці жорсткості від координатного перетворення має вигляд

$$K' = T \ K \ T^T . \qquad (26)$$

Таким чином, у загальному випадку $K' \neq K$, тобто матриця просторової жорсткості залежить від вибору системи координат.

Користуючись властивостями блочних матриць [6], можна визначити вигляд матриці жорсткості після перетворення координат

$$K' = \begin{bmatrix} R K_{\text{п}} R^T & R\left(K_{\text{c}} - K_{\text{п}} \langle \mathbf{p} \rangle^T\right) R^T \\ R\left(K_{\text{c}}^T - \langle \mathbf{p} \rangle K_{\text{п}}\right) R^T & R\left(K_{\text{к}} - \langle \mathbf{p} \rangle K_{\text{c}} - K_{\text{c}}^T \langle \mathbf{p} \rangle^T + \langle \mathbf{p} \rangle K_{\text{п}} \langle \mathbf{p} \rangle^T\right) R^T \end{bmatrix}. \qquad (27)$$

З (27) видно, що чистий поворот системи координат трансформує усі підматриці однаковим чином, а ступінь впливу на них паралельного переносу значно різниться.

Матриця поступальної жорсткості при переході від одної системи координат до іншої не залежить від вектора відносного зміщення $\mathbf{p}$ їх центрів, а визначається лише відносним поворотом R. Оскільки власні значення матриці при повороті зберігаються, то поступальні жорсткості не залежать від вибору системи координат.

Матриця сполучної жорсткості при чистому повороті трансформується як окрема матриця, а лінійне переміщення пов’язує її з матрицею поступальної жорсткості. При цьому значення сполучних жорсткостей не зберігаються.

Матриця крутильної жорсткості трансформується найбільш складним чином, у її перетворенні задіяні як матриця поступальної жорсткості, так і матриця сполучної жорсткості. Крутильні жорсткості в загальному випадку перетворення координат не зберігаються.

Висновки:

1. Матрицю просторової жорсткості можна представити як блочну матрицю, що складається з підматриць розмірністю 3х3, які

представляють собою матрицю поступальної жорсткості, що встановлює відношення між чистим лінійним переміщенням та відповідною силою, матрицю крутильної жорсткості, що встановлює відношення між чистим поворотом та відповідним моментом, та матрицю сполучної жорсткості, що встановлює співвідношення між силою та поворотом, або між моментом та поступальним переміщенням. Кожна з підматриць має набір ортонормальних власних векторів, які задають осі поступальної, крутильної та сполучної жорсткості пружної системи.

2. Матриця просторової жорсткості симетрична, нормальна і має набір власних значень та відповідних ортонормальних власних векторів. Якщо механізм паралельної структури знаходиться в стійкій рівновазі, матриця просторової жорсткості невироджена і позитивно визначена. Якщо механізм знаходиться в особливому положенні, матриця жорсткості стає виродженою позитивно напіввизначеною, і одне або більше нульових власних значень відповідають нульовій поступальній жорсткості у певному напрямку або нульовій крутильній жорсткості відносно певної осі.

3. Матриця просторової жорсткості механізму паралельної структури залежить від вибору системи координат. Поворот системи координат трансформує усі підматриці однаковим чином, зберігаючи значення головних поступальних, крутильних та сполучних жорсткостей. При паралельному переносі головні поступальні жорсткості залишаються незмінними, а значення крутильних та сполучних жорсткостей не зберігаються.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Merlet J.-P.* Parallel Robots. – Springer-Verlag New York Inc., 2006. – 394 p.
2. *Крижанівський В.А.* Технологічне обладнання з паралельною кінематикою : навчальний посібник для ВНЗ / *В.А. Крижанівський, Ю.М. Кузнєцов, І.А. Валявський, Р.А. Склярів* ; за ред. Ю.М. Кузнєцова. – Кіровоград, 2004. – 449 с.
3. Детали и механизмы металлорежущих станков : В 2 т. / под ред. Д.Н. Решетова. – М. : Машиностроение, 1972. – Т. 1 : Общие основы конструирования, направляющие и несущие системы. – 663 с.
4. *Quennouelle C., Gosselin C.M.* Stiffness Matrix of Compliant Parallel Mechanisms // Advances in Robot Kinematics: Analysis and Design. – Part 5. – Springer Netherlands, 2008. – P. 331–341.

5. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц / *Р.Беллман*. – М. : Наука, 1976. – 312 с.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / *Ф.Р. Гантмахер*. – М. : Наука, 1966. – 576 с.

КИРИЧЕНКО Андрій Миколайович – кандидат технічних наук, доцент, докторант Національного технічного університету України "КПІ".

Наукові інтереси:

– розробка та дослідження обладнання на базі механізмів паралельної структури;

– комп'ютеризоване моделювання.

E-mail: andrew.kirichenko@gmail.com

СТРУТИНСЬКИЙ Василь Борисович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри конструювання верстатів та машин Національного технічного університету України "КПІ".

Наукові інтереси:

– розробка і дослідження високотехнологічного обладнання;

– розробка наукових основ теорії проектування обладнання і визначення його статичних та динамічних характеристик.

Тел.: (044)454–94–61.

Подано 23.10.2009