

Н.Г. Сурьянинов, к.т.н., доц.

Одесский национальный политехнический университет

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*Выполнено преобразование внешней нагрузки на пластину применительно к решению плоской задачи теории упругости методом граничных элементов. Разнообразие граничных условий учитывается при помощи функций одной переменной, представляющих собой аналитические выражения форм собственных колебаний однопролетных балок. Получено выражение для нагрузки при двух свободных кромках пластины.*

**Введение.** Построение вектора внешних нагрузок является важнейшей задачей при реализации алгоритма метода граничных элементов. В работе рассматривается наиболее общий вариант нагрузки на пластину, когда контурная нагрузка приложена к каждой стороне пластинки, причем имеется как нормальная, так и тангенциальная ее составляющие. В реальных условиях касательные к контуру нагрузки как правило отсутствуют, что приводит к значительным упрощениям аналитических выражений.

**Основная часть.** Общий случай нагрузки на пластину. Из процедуры составления бигармонического уравнения следует выражение для внешних нагрузок, приведенных к срединной плоскости пластинки:

$$q(x, y) = \int \frac{\partial^2 q_x^0}{\partial y^2} dx + \int \frac{\partial^2 q_y^0}{\partial x^2} dy - \mu \frac{\partial q_x^0}{\partial x} - \mu \frac{\partial q_y^0}{\partial y}, \quad (1)$$

где  $q_x^0$  и  $q_y^0$  представляют собой, вообще говоря, суммы объёмных (приложенных внутри контура пластинки) и поверхностных (приложенных по контуру) нагрузок в направлениях осей  $x$  и  $y$  соответственно.

В большинстве случаев объёмные нагрузки отсутствуют, поэтому в дальнейшем будем понимать под  $q_x^0$  и  $q_y^0$  только контурные нагрузки.

В общем случае нагружения  $q_x^0$  и  $q_y^0$  – это совокупность восьми групп нагрузок, по две на каждой стороне контура (нормальная и тангенциальная).

Обозначая нормальные к контуру составляющие распределенных нагрузок через  $n$ , а касательные – через  $p$ , можем записать:

$$q_x^0 = n_{x1} + n_{x2} + p_{x1} + p_{x2} + F_{x1} + F_{x2} + T_{x1} + T_{x2}; \quad (2)$$

$$q_y^0 = n_{y1} + n_{y2} + p_{y1} + p_{y2} + F_{y1} + F_{y2} + T_{y1} + T_{y2}. \quad (3)$$

Положительные направления приложенных нагрузок показаны на рис.

1.

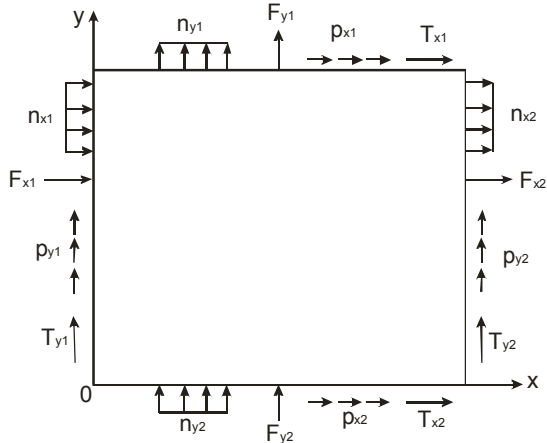


Рис. 1. Положительные направления действующих нагрузок

Введем обозначения для координат точек приложенных нагрузок.

$a_{H1}$  и  $a_{K1}$  – начало и конец нагрузки  $n_{y1}$ ;

$a_{H2}$  и  $a_{K2}$  – начало и конец нагрузки  $n_{y2}$ ;

$b_{H1}$  и  $b_{K1}$  – начало и конец нагрузки  $p_{y1}$ ;

$b_{H2}$  и  $b_{K2}$  – начало и конец нагрузки  $p_{y2}$ ;

$a_{F1}$  и  $a_{F2}$  – точки приложения сил  $F_{y1}$  и  $F_{y2}$ ;

$b_{T1}$  и  $b_{T2}$  – точки приложения сил  $T_{y1}$  и  $T_{y2}$ .

Перечисленные координаты показаны на рис. 2.

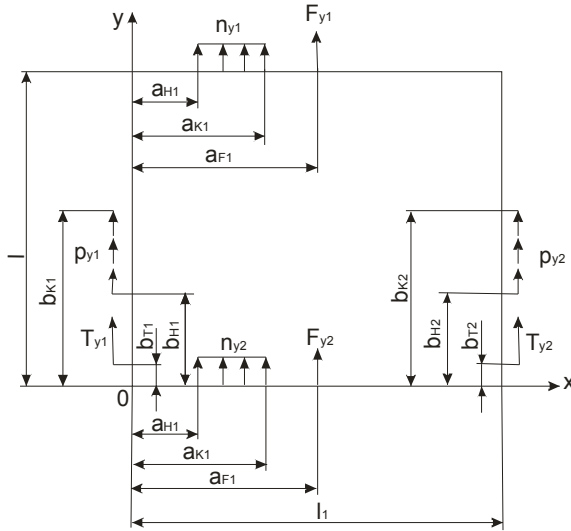


Рис. 2. Нагрузки, параллельные оси  $OY$

Аналогичным образом обозначим координаты внешних нагрузок, действующих в направлении оси  $OX$  (рис. 3):

- $C_{H1}$  и  $C_{K1}$  – начало и конец нагрузки  $p_{x1}$ ;
- $C_{H2}$  и  $C_{K2}$  – начало и конец нагрузки  $p_{x2}$ ;
- $d_{H1}$  и  $d_{K1}$  – начало и конец нагрузки  $n_{x1}$ ;
- $d_{H2}$  и  $d_{K2}$  – начало и конец нагрузки  $n_{x2}$ ;
- $C_{T1}$  и  $C_{T2}$  – точки приложения сил  $T_{x1}$  и  $T_{x2}$ ;
- $d_{F1}$  и  $d_{F2}$  – точки приложения сил  $F_{x1}$  и  $F_{x2}$ .

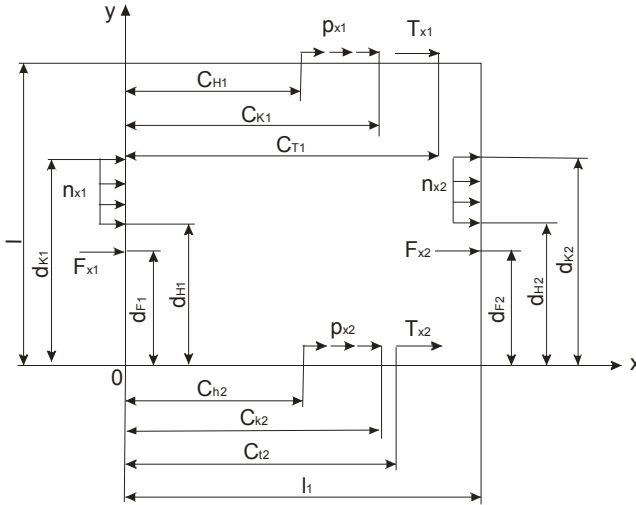


Рис. 3. Нагрузки в направлении оси OX

Запишем выражение для всех действующих нагрузок (2) и (3), используя H-функцию Хевисайда и  $\delta$ -функцию Дирака:

$$\begin{aligned}
 q_{x0} = & n_{x1} [H(y - d_{H1}) - H(y - d_{K1})] \delta(x) + F_{x1} \delta(y - d_{F1}) \delta(x) + \\
 & + n_{x2} [H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})] \delta(x - l_1) + F_{x2} \delta(y - d_{F2}) \delta(x - l_1) + \\
 & + p_{x1} [H(x - C_{H1}) - H(x - C_{K1})] \delta(y - l) + T_{x1} \delta(x - C_{T1}) \delta(y - l) + \\
 & + p_{x2} [H(x - C_{H2}) - H(x - C_{K2})] \delta(y) + T_{x2} \delta(x - C_{T2}) \delta(y);
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 q_{y0} = & n_{x1} [H(x - a_{H1}) - H(x - a_{K1})] \delta(y - l) + F_{y1} \delta(x - a_{F1}) \delta(y - l) + \\
 & + n_{y2} [H(x - a_{H2}) - H(x - a_{K2})] \delta(y) + F_{y2} \delta(x - a_{F2}) \delta(y) + \\
 & + p_{y1} [H(y - b_{H1}) - H(y - b_{K1})] \delta(x) + T_{y1} \delta(y - b_{T1}) \delta(x) + \\
 & + p_{y2} [H(y - b_{H2}) - H(y - b_{K2})] \delta(x - l_1) + T_{y2} \delta(y - b_{T2}) \delta(x - l_1).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Используя (4) и (5), после соответствующих операций дифференцирования и интегрирования с подстановкой в (1), можно получить выражение для всей совокупности внешних нагрузок на контур в плоской задаче теории упругости. Однако в реальных условиях нагрузки касательные к контуру встречаются крайне редко, поэтому в дальнейшем целесообразно исключить из (4) и (5) соответствующие слагаемые.

С учетом сказанного  $q_{x0}$  и  $q_{y0}$  можно представить в виде:

$$q_x^0 = n_{x1}[H(y - d_{H1}) - H(y - d_{K1})]\delta(x) + F_{x1}\delta(y - d_{F1})\delta(x) + n_{x2}[H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})]\delta(x - l_1) + F_{x2}\delta(y - d_{F2})\delta(x - l_1); \quad (6)$$

$$q_y^0 = n_{y1}[H(x - a_{H1}) - H(x - a_{K1})]\delta(y - l) + F_{y1}\delta(x - a_{F1})\delta(y - l) + n_{y2}[H(x - a_{H2}) - H(x - a_{K2})]\delta(y) + F_{y2}\delta(x - a_{F2})\delta(y). \quad (7)$$

Вычислим производные функций нагрузки  $q_{x0}$  и  $q_{y0}$  в соответствии с (1). При этом будем руководствоваться правилами для дифференцирования функций  $H$  и  $\delta$ :

$$\left. \begin{aligned} H'(x) &= \delta(x); \\ H'(x - x_0) &= \delta(x - x_0); \\ [\delta(x - x_0)]' &= \delta'(x - x_0) \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

$$\frac{\partial q_x^0}{\partial y} = n_{x1}[\delta(y - d_{H1}) - \delta(y - d_{K1})]\delta(x) + F_{x1}\delta'(y - d_{F1})\delta(x) + n_{x2}[\delta(y - d_{H2}) - \delta(y - d_{K2})]\delta(x - l_1) + F_{x2}\delta'(y - d_{F2})\delta(x - l_1); \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 q_x^0}{\partial y^2} = n_{x1}[\delta'(y - d_{H1}) - \delta'(y - d_{K1})]\delta(x) + F_{x1}\delta''(y - d_{F1})\delta(x) + n_{x2}[\delta'(y - d_{H2}) - \delta'(y - d_{K2})]\delta(x - l_1) + F_{x2}\delta''(y - d_{F2})\delta(x - l_1). \quad (10)$$

$$\frac{\partial q_y^0}{\partial x} = n_{y1}[\delta(x - a_{H1}) - \delta(x - a_{K1})]\delta(y - l) + F_{y1}\delta'(x - a_{F1})\delta(y - l) + n_{y2}[\delta(x - a_{H2}) - \delta(x - a_{K2})]\delta(y) + F_{y2}\delta'(x - a_{F2})\delta(y); \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 q_y^0}{\partial x^2} = n_{y1}[\delta'(x - a_{H1}) - \delta'(x - a_{K1})]\delta(y - l) + F_{y1}\delta''(x - a_{F1})\delta(y - l) + n_{y2}[\delta'(x - a_{H2}) - \delta'(x - a_{K2})]\delta(y) + F_{y2}\delta''(x - a_{F2})\delta(y). \quad (12)$$

$$\frac{\partial q_x^0}{\partial x} = n_{x1}[H(y - d_{H1}) - H(y - d_{K1})]\delta'(x) + F_{x1}\delta(y - d_{F1})\delta'(x) + n_{x2}[H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})]\delta'(x - l_1) + F_{x2}\delta(y - d_{F2})\delta'(x - l_1); \quad (13)$$

$$\frac{\partial q_y^0}{\partial y} = n_{y1}[H(x - a_{H1}) - H(x - a_{K1})]\delta'(y - l) + F_{y1}\delta(x - a_{F1})\delta'(y - l) + n_{y2}[H(x - a_{H2}) - H(x - a_{K2})]\delta'(y) + F_{y2}\delta(x - a_{F2})\delta'(y). \quad (14)$$

Интегралы выражений (10), (12) имеют вид:

$$\int \frac{\partial^2 q_x^0}{\partial y^2} dx = n_{x1}[\delta'(y - d_{H1}) - \delta'(y - d_{K1})]H(x) + F_{x1}\delta''(y - d_{F1})H(x) + n_{x2}[\delta'(y - d_{H2}) - \delta'(y - d_{K2})]H(x - l_1) + F_{x2}\delta''(y - d_{F2})H(x - l_1). \quad (15)$$

Функция Хевисайда в (15) равна единице, поэтому в дальнейшем ее можно не писать.

$$\int \frac{\partial^2 q_y^0}{\partial x^2} dy = n_{y1} [\delta'(x - a_{H1}) - \delta'(x - a_{K1})] \cdot H(y - l) + F_{y1} \delta''(x - a_{F1}) \cdot H(y - l) + \quad (16)$$

$$+ n_{y2} [\delta'(x - a_{H2}) - \delta'(x - a_{K2})] + F_{y2} \delta''(x - a_{F2}).$$

Подставляя (13)–(16) в (1), получим выражение для внешних нагрузок, приведенных к срединной плоскости пластинки:

$$q(x, y) = n_{x1} [\delta'(y - d_{H1}) - \delta'(y - d_{K1})] + F_{x1} \delta''(y - d_{F1}) + n_{x2} [\delta'(y - d_{H2}) - \delta'(y - d_{K2})] \times$$

$$\times H(x - l_1) + F_{x2} \delta''(y - d_{F2}) H(x - l_1) + n_{y1} [\delta'(x - a_{H1}) - \delta'(x - a_{K1})] H(y - l) + F_{y1} \delta'' \times$$

$$(x - a_{F1}) H(y - l) + n_{y2} [\delta'(x - a_{H2}) - \delta'(x - a_{K2})] + F_{y2} \delta''(x - a_{F2}) - \mu n_{x1} \times$$

$$\times [H(y - d_{H1}) - H(y - d_{K1})] \delta'(x) - \mu F_{x1} \delta(y - d_{F1}) \delta'(x) - \mu n_{x2} [H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})] \times$$

$$\times \delta'(x - l_1) - \mu F_{x2} \delta(y - d_{F2}) \delta'(x - l_1) - \mu n_{y1} [H(x - a_{H1}) - H(x - a_{K1})] \delta'(y - l) - \mu F_{y1} \delta \times$$

$$\times (x - a_{F1}) \delta'(y - l) - \mu n_{y2} [H(x - a_{H2}) - H(x - a_{K2})] \delta'(y) - \mu F_{y2} \delta(x - a_{F2}) \delta'(y). \quad (17)$$

Используя (17), перейдем к рассмотрению нагрузки, зависящей только от координаты  $y$ :

$$q(y) = \int_0^{l_1} q(x, y) X(x) dx.$$

Аналитическое выражение функции  $X(x)$  зависит от граничных условия задачи и определяется в соответствии с табл. 1.

Таблица 1

Аналитические выражения форм собственных колебаний

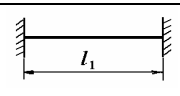
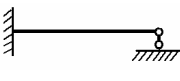
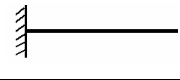

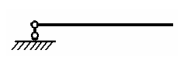
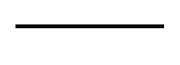
Схема балки	Форма собственных колебаний
	$X(x) = \sin(ax / l_1) - \text{sh}(ax / l_1) - \alpha_* [\cos(ax / l_1) - \text{ch}(ax / l_1)];$ $\alpha_* = \frac{\sin \omega - \text{sh} \omega}{\cos \omega - \text{ch} \omega}; \quad \omega \quad \text{по таблице 2}$
	$X(x) = \sin(ax / l_1) - \text{sh}(ax / l_1) - \alpha_* [\cos(ax / l_1) - \text{ch}(ax / l_1)];$ $\alpha_* = \frac{\sin \omega + \text{sh} \omega}{\cos \omega + \text{ch} \omega}$
	$X(x) = \sin(ax / l_1) - \text{sh}(ax / l_1) - \alpha_* [\cos(ax / l_1) - \text{ch}(ax / l_1)];$ $\alpha_* = \frac{\sin \omega + \text{sh} \omega}{\cos \omega + \text{ch} \omega}$
	$X(x) = \sin(ax / l_1)$
	$X(x) = \sin(ax / l_1) + \alpha_* \text{sh}(ax / l_1)$ $\alpha_* = \frac{\sin \omega}{\text{sh} \omega}$
	$X(x) = \sin(ax / l_1) + \text{sh}(ax / l_1) - \alpha_* [\cos(ax / l_1) + \text{ch}(ax / l_1)];$ $\alpha_* = \frac{\sin \omega - \text{sh} \omega}{\cos \omega - \text{ch} \omega}$

Таблица 2

Спектры частот собственных колебаний

1	2	3	4	5	6
$\cos \omega \cdot ch \omega = 1$	$\sin \omega \cdot ch \omega = \cos \omega \cdot sh \omega$	$\cos \omega \cdot ch \omega = -1$	$\sin \omega = 0$	$\sin \omega \cdot ch \omega = \cos \omega \cdot sh \omega$	$\cos \omega \cdot ch \omega = 1$
$\omega_1 = 4,730$ $\omega_2 = 7,859$ $\omega_3 = 10,996$ $\omega_4 = 14,137$	$\omega_1 = 3,927$ $\omega_2 = 7,069$ $\omega_3 = 10,210$ $\omega_4 = 13,352$	$\omega_1 = 1,875$ $\omega_2 = 4,694$ $\omega_3 = 7,855$ $\omega_4 = 10,996$	$\omega_1 = \pi$ $\omega_2 = 2\pi$ $\omega_3 = 3\pi$ $\omega_4 = 4\pi$	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 3,927$ $\omega_3 = 7,069$ $\omega_4 = 10,210$	$\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 4,730$ $\omega_3 = 7,853$ $\omega_4 = 10,996$

Рассмотрим пластинку со свободными краями в направлении  $OY$ .

$$q(y) = \int_0^l q(x, y) \left[ \sin \frac{\omega x}{l_1} - sh \frac{\omega x}{l_1} - \alpha_* \left( \cos \frac{\omega x}{l_1} - ch \frac{\omega x}{l_1} \right) \right] dx \quad (19)$$

$$\alpha_* = \frac{\sin \omega_1 - sh \omega_1}{\cos \omega_1 - ch \omega_1} = \frac{\sin 4,73 - sh 4,73}{\cos 4,73 - ch 4,73}$$

Будем последовательно вычислять четыре компонента (19), интегрируя (17) с каждым из слагаемых, стоящих в квадратных скобках выражения (19).

$$a) \int_0^l q(x, y) \sin \frac{\omega x}{l_1} dx = -n_{x1} [\delta'(y - d_{H1}) - \delta'(y - d_{K1})] \frac{l_1}{\omega} (\cos \omega - 1) - F_{x1} \delta''(y - d_{F1}) \frac{l_1}{\omega} \times$$

$$\times (\cos \omega - 1) + n_{y1} \frac{\omega}{l_1} \left( \cos \frac{\omega a_{K1}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{H1}}{l_1} \right) H(y - l) + F_{y1} \frac{\omega}{l_1} \cos \frac{\omega a_{F1}}{l_1} H(y - l) + n_{y2} \times$$

$$\times \left( \cos \frac{\omega a_{K2}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{H2}}{l_1} \right) + F_{y2} \frac{\omega}{l_1} \cos \frac{\omega a_{F2}}{l_1} + \mu \frac{\omega}{l_1} n_{x1} [H(y - d_{H1}) - H(y - d_{K1})] +$$

$$+ \mu \frac{\omega}{l_1} F_{x1} \delta(y - d_{F1}) + \mu n_{x2} \frac{\omega}{l_1} \cos \omega [H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})] + \mu F_{x2} \frac{\omega}{l_1} \cos \omega \times \quad (20)$$

$$\times \delta(y - d_{F2}) - \mu n_{y1} \frac{l_1}{\omega} \left( \cos \frac{\omega a_{H1}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{K1}}{l_1} \right) \delta'(y - l) - \mu F_{y1} \sin \frac{\omega a_{F1}}{l_1} \delta'(y - l) - \mu n_{y2} \times$$

$$\times \frac{l_1}{\omega} \times \left( \cos \frac{\omega a_{H2}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{K2}}{l_1} \right) \delta'(y) - \mu F_{y2} \sin \frac{\omega a_{F2}}{l_1} \delta'(y);$$

$$\begin{aligned}
 \delta) \int_0^l q(x, y) sh \frac{\omega x}{l_1} dx = n_{x1} [\delta'(y - d_{H1}) - \delta'(y - d_{K1})] \frac{l_1}{\omega} (ch\omega - 1) + F_{x1} \delta''(y - d_{F1}) \frac{l_1}{\omega} \times \\
 \times (ch\omega - 1) + n_{y1} \frac{\omega}{l_1} \left( ch \frac{\omega a_{K1}}{l_1} - ch \frac{\omega a_{H1}}{l_1} \right) H(y - l) + F_{y1} \frac{\omega}{l_1} ch \frac{\omega a_{F1}}{l_1} H(y - l) + n_{y2} \times \\
 \times \left( ch \frac{\omega a_{K2}}{l_1} - ch \frac{\omega a_{H2}}{l_1} \right) + F_{y2} \frac{\omega}{l_1} ch \frac{\omega a_{F2}}{l_1} + \mu n_{x1} \frac{\omega}{l_1} [H(y - d_{H1}) - H(y - d_{K1})] + \\
 + \mu \frac{\omega}{l_1} F_{x1} \delta(y - d_{F1}) + \mu n_{x2} \frac{\omega}{l_1} ch\omega [H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})] + \mu F_{x2} \frac{\omega}{l_1} \delta(y - d_{F2}) ch\omega + \\
 + \mu n_{y1} \frac{l_1}{\omega} \left( ch \frac{\omega a_{H1}}{l_1} - ch \frac{\omega a_{K1}}{l_1} \right) \delta'(y - l) - \mu F_{y1} sh \frac{\omega a_{F1}}{l_1} \delta'(y - l) + \mu n_{y2} \frac{l_1}{\omega} \times \\
 \times \left( ch \frac{\omega a_{H2}}{l_1} - ch \frac{\omega a_{K2}}{l_1} \right) \delta'(y) - \mu F_{y2} sh \frac{\omega a_{F2}}{l_1} \delta'(y);
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon) \int_0^l q(x, y) \cos \frac{\omega x}{l_1} dx = n_{x1} [\delta'(y - d_{H1}) - \delta'(y - d_{K1})] \frac{l_1}{\omega} \sin \omega + F_{x1} \delta''(y - d_{F1}) \frac{l_1}{\omega} \times \\
 \times \sin \omega + n_{y1} \left( \sin \frac{\omega a_{H1}}{l_1} - \sin \frac{\omega a_{K1}}{l_1} \right) H(y - l) - F_{y1} \frac{\omega}{l_1} \sin \frac{\omega a_{F1}}{l_1} H(y - l) + n_{y2} \frac{\omega}{l_1} \times \\
 \times \left( \sin \frac{\omega a_{H2}}{l_1} - \sin \frac{\omega a_{K2}}{l_1} \right) - F_{y2} \frac{\omega}{l_1} \sin \frac{\omega a_{F2}}{l_1} - \mu \frac{\omega}{l_1} n_{x1} \sin \omega [H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})] - \\
 - \mu \frac{\omega}{l_1} F_{x2} \sin \omega \delta(y - d_{F2}) - \mu n_{y1} \frac{l_1}{\omega} \left( \sin \frac{\omega a_{K1}}{l_1} - \sin \frac{\omega a_{H1}}{l_1} \right) \delta'(y - l) - \mu F_{y1} \cos \frac{\omega a_{F1}}{l_1} \times \\
 \times \delta'(y - l) - \mu n_{y2} \frac{l_1}{\omega} \left( \sin \frac{\omega a_{K2}}{l_1} - \sin \frac{\omega a_{H2}}{l_1} \right) \delta'(y) - \mu F_{y2} \cos \frac{\omega a_{F2}}{l_1} \delta'(y);
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 \zeta) \int_0^l q(x, y) ch \frac{\omega x}{l_1} dx = n_{x1} [\delta'(y - d_{H1}) - \delta'(y - d_{K1})] \frac{l_1}{\omega} sh\omega + F_{x1} \delta''(y - d_{F1}) \frac{l_1}{\omega} sh\omega + \\
 + n_{y1} \frac{\omega}{l_1} \left( sh \frac{\omega a_{K1}}{l_1} - sh \frac{\omega a_{H1}}{l_1} \right) H(y - l) + F_{y1} \frac{\omega}{l_1} sh \frac{\omega a_{F1}}{l_1} H(y - l) + n_{y2} \frac{\omega}{l_1} \times \\
 \times \left( sh \frac{\omega a_{K2}}{l_1} - sh \frac{\omega a_{H2}}{l_1} \right) + F_{y2} \frac{\omega}{l_1} sh \frac{\omega a_{F2}}{l_1} - \mu \frac{\omega}{l_1} n_{x2} sh\omega [H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})] + \\
 + \mu \frac{\omega}{l_1} F_{x2} sh\omega \delta(y - d_{F2}) + \mu n_{y1} \frac{l_1}{\omega} \left( sh \frac{\omega a_{H1}}{l_1} - sh \frac{\omega a_{K1}}{l_1} \right) \delta'(y - l) - \mu F_{y1} ch \frac{\omega a_{F1}}{l_1} \times \\
 \times \delta'(y - l) - \mu n_{y2} \frac{l_1}{\omega} \left( sh \frac{\omega a_{H2}}{l_1} - sh \frac{\omega a_{K2}}{l_1} \right) \delta'(y) - \mu F_{y2} ch \frac{\omega a_{F2}}{l_1} \delta'(y).
 \end{aligned} \tag{23}$$

Подставляя (20)–(23) в (19) и учитывая значение  $\alpha^*$ , получим полное выражение для нагрузки  $q(y)$  при свободных краях пластинки в направлении оси  $OY$ . Заметим, что выражение (20)–(23) могут использоваться в дальнейшем и при других граничных условиях.



Наиболее простой вид функция  $X(x)$  имеет при шарнирном закреплении кромок пластинки в направлении оси  $OY$ :

$$X(x) = \sin \frac{\omega x}{l_1},$$

следовательно выражение для нагрузки  $q(y)$  можно записать, используя (20):

$$\begin{aligned} \int_0^{l_1} q(x, y) X(x) dx = & -n_{x1} [\delta'(y - d_{H1}) - \delta'(y - d_{K1})] \frac{l_1}{\omega} (\cos \omega - 1) - F_{y1} \delta''(y - d_{F1}) \frac{l_1}{\omega} \times \\ & \times (\cos \omega - 1) + n_{y1} \left( \cos \frac{\omega a_{K1}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{H1}}{l_1} \right) H(y - l) + F_{y1} \frac{\omega}{l_1} \cos \frac{\omega a_{F1}}{l_1} H(y - l) + n_{y2} \frac{\omega}{l_1} \times \\ & \times \left( \cos \frac{\omega a_{K2}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{H2}}{l_1} \right) + F_{y2} \frac{\omega}{l_1} \cos \frac{\omega a_{F2}}{l_1} + \mu \frac{\omega}{l_1} n_{x1} [H(y - d_{H1}) - H(y - d_{K1})] + \\ & + \mu \frac{\omega}{l_1} F_{x1} \delta(y - d_{F1}) + \mu n_{x2} \frac{\omega}{l_1} \cos \omega [H(y - d_{H2}) - H(y - d_{K2})] + \mu F_{x2} \frac{\omega}{l_1} \cos \omega \times \\ & \times \delta(y - d_{F2}) - \mu n_{y1} \frac{l}{\omega} \left( \cos \frac{\omega a_{H1}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{K1}}{l_1} \right) \delta'(y - l) - \mu F_{y1} \sin \frac{\omega a_{F1}}{l_1} \delta'(y - l) - \mu n_{y2} \times \\ & \times \frac{l}{\omega} \times \left( \cos \frac{\omega a_{H2}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{K2}}{l_1} \right) \delta'(y) - \mu F_{y2} \sin \frac{\omega a_{F2}}{l_1} \delta'(y). \end{aligned} \quad (24)$$

Выражение (24) значительно упростится, если ограничиться рассмотрением только нагрузок  $n_{y1}$  и  $F_{y1}$  (рис. 4), что в наибольшей степени соответствует реальному нагружению пластинки.

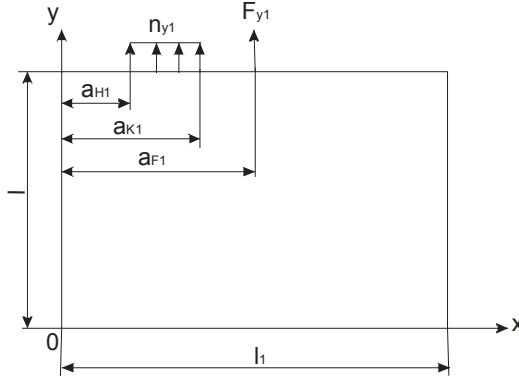


Рис. 4. Частный случай нагружения

В этом случае имеем:

$$q(y) = n_{y1} \frac{\omega}{l_1} \left( \cos \frac{\omega a_{K1}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{H1}}{l_1} \right) H(y-l) + F_{y1} \frac{\omega}{l_1} \cos \frac{\omega a_{F1}}{l_1} H(y-l) - \mu n_{y1} \frac{l_1}{\omega} \times \\ \times \left( \cos \frac{\omega a_{H1}}{l_1} - \cos \frac{\omega a_{K1}}{l_1} \right) \delta'(y-l) - \mu F_{y1} \sin \frac{\omega a_{F1}}{l_1} \delta'(y-l).$$

**Вывод.** Таким образом, изложенная методика позволяет, используя Н-функцию Хевисайда и  $\delta$ -функцию Дирака, описать любую нагрузку, рассматриваемую в плоской задаче теории упругости. Приведенный алгоритм хорошо программируется и может быть реализован в MATLAB, DELPHI или какой-либо иной среде программирования.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Теоретичні основи динаміки машин: Навчальний посібник / М.Г. Сурьянінов, О.Ф. Дащенко, В.О. Білоус. – Одеса: Бахва, 2003. – 308 с.
2. Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф., Сурьянінов Н.Г. Численные методы в механике. – Одесса: СТАНДАРТЬ, 2005. – 563 с.

СУРЬЯНИНОВ Н.Г. – кандидат технических наук, доцент кафедры динамики, прочности машин и сопротивления материалов Одесского национального политехнического университета.

Научные интересы:

– численные методы расчета конструкций.

Тел.: (раб.) (80482)28-85-96;

(дом.) 42-72-82.

E-mail: [nio@te.net.ua](mailto:nio@te.net.ua).

Подано 29.08.2007