

УДК 621.647-534.5

І.М. Городецький, ст. викл.

Львівський державний аграрний університет

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ КРИСТАЛІЗАЦІЇ КЕРАМІЧНИХ РОЗПИЛЮВАЧІВ У СТАЦІОНАРНІЙ ФОРМІ

(Представлено д.т.н., проф. Василенком І.І.)

У статті охарактеризовано проблему технологічного забезпечення точності виготовлення керамічних розпилювальних пристроїв, наголошено на важливості ефективного формоутворення напівфабрикатів, у якому етап кристалізації відіграє важливу роль як чинник, що визначає продуктивність процесу і якість деталей. Завдяки математичному моделюванню отримано залежності, що дозволяють визначити температурно-часові параметри процесу тверднення залежно від конструктивних особливостей устави, розмірів деталей, технологічного регулювання процесів (температури охолоджувального середовища, формування), властивостей і теплофізичних характеристик матеріалів форм і пуансонів.

Постановка проблеми. Значну кількість різноманітних розпилювальних пристроїв (РП), що є робочими органами машин для хімічного захисту рослин та внесення рідких добрив, виготовляють з керамічних матеріалів, які мають низку властивостей, що забезпечують їм певну перевагу над іншими матеріалами, це, зокрема, висока міцність, стійкість до спрацювання, твердість, хімічна інертність та ін. Однак існуючі на ринку РП, зокрема струменеві, щільного типу характеризуються низкою конструктивних недоліків, зумовлених технологією виготовлення [1–3]. Керамічні розпилювальні пристрої виготовляють за допомогою різноманітних засобів, методів і способів, що є складовими керамічних технологій і мають подібну загальну принципову схему, але відрізняються засобами і методами реалізації технологічних прийомів на різних етапах керамічної технології [4–10].

Принципова загальна технологічна схема виготовлення розпилювачів з керамічних матеріалів умовно складається з кількох етапів, серед яких одним з найважливіших є етап виготовлення напівфабрикатів (НФ) або формування. На основі використання властивостей ливарних систем за допомогою спеціального обладнання

утворюється виріб (напівфабрикат) потрібної форми і розмірів, при цьому дуже важливим є дотримання температурно-часових режимів процесу тверднення залежно від конструктивних особливостей устави, розмірів НФ, технологічного регулювання процесів, властивостей і теплофізичних характеристик матеріалів форм і пуансонів, оскільки вони безпосередньо визначають якість виготовлення деталей і продуктивність процесу формування. Для аналізу впливу зазначених чинників на перебіг технологічного процесу і якісні показники виготовлених деталей виникає потреба їх моделювання, що уможливує отримання теоретичних залежностей, опрацювання яких дозволяє досягнути поставлених цілей [11–12].

Ефективними методами моделювання, що передують конструюванню і безпосередньому створенню пристроїв і конструкцій є математичні, що дозволяють отримати формалізований опис структури і процесу функціонування системи для однозначності їх розуміння, а також відобразити процес функціонування у вигляді, що допускає аналітичне дослідження системи. Математична модель являє собою формалізований опис системи за допомогою абстрактної мови, зокрема за допомогою математичних співвідношень, що відображають процес функціонування системи. Для складання моделі можна використати будь-які математичні засоби: алгебраїчне, диференціальне та інтегральне числення, теорію множин, теорію алгоритмів тощо. За суттю вся математика створена для складання і дослідження моделей об'єктів або процесів. Тому основна **мета** статті полягає у математичному моделюванні температурно-часових параметрів процесу тверднення НФ залежно від конструктивних особливостей устави, розмірів деталей, технологічного регулювання процесів (температури охолоджувального середовища, формування), властивостей і теплофізичних характеристик матеріалів форм і пуансонів.

Викладення основного матеріалу. Розглядаючи передумови процесу охолодження НФ, слід зазначити, що після подавання рідкого шлікера під тиском у форму, його температура знижується і він поступово кристалізується, утворюючи деталь-напівфабрикат. Процес охолодження відбувається протягом певного часу, що залежить від властивостей шлікера, теплового режиму, форми і розмірів відливка та інших чинників. Його умовно можна розділити на етапи: 1) охолодження під час заповнення форми; 2) охолодження шлікера у формі до утворення твердого шару; 3) охолодження пошарове до

тверднення усього об'єму відливка; 4) охолодження у твердому стані до виймання (температури навколишнього середовища).

Якщо розглядати перебіг процесу тверднення за певні короткі проміжки часу ΔT , то кожному з таких часових проміжків буде відповідати тверднення шару шлікера певної товщини Δr залежно від умов охолодження. Тому механізм процесу тверднення шлікера у формі можна умовно розділити як пошаровий. Реально за нескінченно малий проміжок часу dT відбувається зниження температури dt і в певний час тверднення шару нескінченно малої товщини dr , і відповідно процес тверднення не ступінчастий, пошаровий, а неперервний. Після досягнення температури кристалізації у всіх елементах відливка процес тверднення завершується. Подальше охолодження спричиняє зменшення об'єму в твердому стані.

Як відомо, кількість тепла, яку одержує одиниця об'єму тіла за одиницю часу, становить [13]:

$$C \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

де C – питома об'ємна теплоємність тіла, Дж/м³ · К.

Згідно з законом Фур'є вектор густини теплового потоку:

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \text{grad}T, \quad (2)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м · К).

Тоді рівняння теплопровідності буде мати вигляд:

$$\text{div}(\lambda \text{grad}T) = C \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3)$$

Приймаючи λ і C постійними, рівняння теплопровідності зводиться до наступного вигляду:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (4)$$

де $a = \lambda/C$ – коефіцієнт температуропровідності, (м²/с);

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \text{оператор Лапласа у}$$

декартовій системі координат;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \text{оператор Лапласа}$$

відповідно у циліндричній системі координат [14–15].

За допомогою цього диференціального рівняння у часткових

похідних можна досліджувати скалярне поле. Якщо відомі значення гармонічної функції у точках замкнутої поверхні, то цим визначається значення цієї функції у всіх точках всередині цієї поверхні.

Процес охолодження (тверднення) шлікера у формі реально є процесом утворення НФ КЦР. Тому дослідження особливостей процесу теплообміну між шлікером (НФ) і формою, а також аналіз впливу різних чинників на характер процесу охолодження на всіх етапах, і відповідно якість відливка, мають важливе значення.

Для дослідження стану шлікера під час другого–четвертого етапів тверднення умовно розділимо НФ на циліндри. Розглянемо нестационарне температурне поле однорідного циліндра зі скінченною довжиною l , зовнішнім r_2 і внутрішнім r_1 радіусами, що є частиною НФ (рис. 1). Початкова температура циліндра $T_0 = \text{const}$. Між зовнішнім середовищем і циліндром відбувається конвективний теплообмін по зовнішній бічній поверхні циліндра та його торцевих поверхнях, а внутрішню поверхню циліндра будемо вважати теплоізолюваною. Крім того, будемо вважати, що температура середовища (води і форми) стаціонарна (не змінюється у часі) і постійна $\Theta = \text{const}$.

Ця осесиметрична задача описується згідно з (4) диференціальним рівнянням:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (5)$$

за початкової умови: $t = 0$, $T = T_0$ і граничних умовах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\alpha}{\lambda} (T - \Theta) &= 0 \text{ при } r = r_2, \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= 0, \text{ при } r = r_1, \\ \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\alpha_1}{\lambda} (T - \Theta) &= 0, \text{ при } z = l/2, \\ \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\alpha_2}{\lambda} (T - \Theta) &= 0, \text{ при } z = -l/2, \end{aligned} \quad (6)$$

де a , α_1 , α_2 – коефіцієнти тепловіддачі.

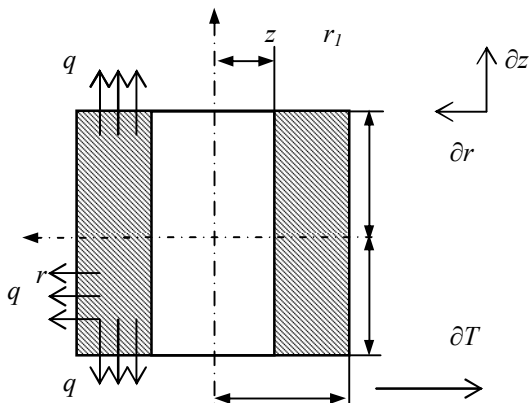


Рис. 1. Схема для розрахунку температурного поля під час охолодження НФ

Для зручності аналізу введемо безрозмірні координати та час відповідно: $\rho = r/r_2$, $\eta = z/l$, $\tau = a \cdot t/r_2^2$, $\tau_1 = a \cdot t/l^2$ і розв'язок задачі будемо шукати у вигляді:

$$T = \Theta + (T_0 - \Theta) T_1 T_2, \quad (7)$$

де $T_1 = T_1(\rho, t)$, $T_2 = T_2(\eta, t)$.

Якщо підставити (7) в (5) і (6), то можемо переконатися, що дані співвідношення будуть виконуватися, коли функції T_1 і T_2 задовольняють наступним диференціальним рівнянням та відповідним початковим і граничним умовам, а саме: функція $T_2(\eta, t)$ задовольняє диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial \eta^2} = \frac{\partial T_2}{\partial \tau_1}, \quad (8)$$

початковій умові $T_2 = 1$ при $\tau = 0$ і граничним умовам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial \eta} + C_1 T_2 &= 0 \text{ при } \eta = 1/2, \\ \frac{\partial^2 T_2}{\partial \eta^2} - C_2 T_2 &= 0 \text{ при } \eta = -1/2, \end{aligned} \quad (9)$$

де $C_1 = \alpha_1 l/\lambda$, $C_2 = \alpha_2 l/\lambda$.

Функція $T_1(\rho, t)$ задовольняє рівняння:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_1}{\partial \rho} = \frac{\partial T_1}{\partial \tau}, \quad (10)$$

початковій умові $T_1 = 1$ при $\tau_1 = 0$ і граничним умовам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \rho} + C_3 T_1 &= 0, \text{ при } \rho = 1, \\ \frac{\partial T_1}{\partial \rho} &= 0, \text{ при } \rho = d = r_1 / r_2, \end{aligned} \quad (11)$$

де $C_3 = \alpha r_2 / \lambda$.

Функцію $T_2(\eta, \tau_1)$ будемо шукати у вигляді добутку двох функцій:

$$T_2(\eta, \tau_1) = T_3(\eta) \cdot T_4(\tau_1), \quad (12)$$

Підставивши (2.55) у (2.53), одержимо:

$$T_3''(\eta) T_4(\tau_1) = T_3(\eta) \cdot T_4'(\tau_1), \quad (13)$$

або

$$\frac{T_3''(\eta)}{T_3(\eta)} = \frac{T_4'(\tau_1)}{T_4(\tau_1)} = -\mu^2, \quad (14)$$

де μ – довільна постійна величина.

Тоді:

$$\begin{aligned} T_4' + \mu^2 T_4 &= 0, \\ T_3'' + \mu^2 T_3 &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

звідси знаходимо:

$$\begin{aligned} T_4(\tau_1) &= e^{-\mu^2 \tau_1}, \\ T_3(\eta) &= A \cos(\mu \eta) + B \sin(\mu \eta). \end{aligned} \quad (16)$$

Підставляємо (16) у граничні умови (9) і одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів A і B :

$$\begin{aligned} A \left(C_1 \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) - \mu \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) \right) + B \left(\mu \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) + C_1 \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) \right) &= 0, \\ A \left(-C_2 \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) \right) + B \left(C_2 \sin\left(\frac{\mu}{2}\right) + \mu \cos\left(\frac{\mu}{2}\right) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Оскільки система (17) однорідна, а значення A і B повинні бути ненульовими, то визначник цієї системи рівнянь повинен дорівнювати нулю. Після деяких перетворень одержимо трансцендентне рівняння для знаходження значень довільної величини μ , що залежить від питомої теплоємності тіла:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\mu(C_1 + C_2)}{\mu^2 - C_1 C_2}. \quad (18)$$

Це рівняння має нескінченну кількість розв'язків. Його корені при великих значеннях μ близькі до $\mu_k = k\pi$.

Якщо відомі корені цього рівняння і $\mu_k > 0$, то функцію $T_2(\eta, \tau_1)$ можна подати у вигляді:

$$T_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k (\cos(\mu_k \eta) + D_k \sin(\mu_k \tau)) e^{-\mu_k^2 \tau_1} \right), \quad (19)$$

де D_k – частка постійних:

$$D_k = \frac{C_1 - \mu_k \operatorname{tg} \left(\frac{\mu_k}{2} \right)}{\mu_k + C_1 \operatorname{tg} \left(\frac{\mu_k}{2} \right)}.$$

Постійні A_k знаходимо з початкових умов відповідно при $\tau_1 = 0$, а також $T_2(\eta, 0) = 1$, тобто:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k (\cos(\mu_k \eta) + D_k \sin(\mu_k \eta)) = 1. \quad (20)$$

Рівняння (20) домножуємо на $\cos(\pi n \eta)$ та інтегруємо у межах $-0,5 \leq \eta \leq 0,5$. У результаті одержуємо лінійну систему рівнянь відносно A_k :

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{\sin \left(\frac{\mu_k}{2} \right)}{\mu_k} = \frac{1}{2}, \quad (21)$$

$$\sum_{k=1}^n \left(A_k \left[\frac{\sin \left(\frac{\mu_k - \pi n}{2} \right)}{\mu_k - \pi n} + \frac{\sin \left(\frac{\mu_k + \pi n}{2} \right)}{\mu_k + \pi n} \right] \right) = 0,$$

де $n = 1, 2, \dots$.

Звичайно, при знаходженні коренів μ_k і при розв'язуванні системи рівнянь (21) досить знайти їх 12–15 значень.

Функцію $T_1(\rho, \tau)$ подамо у формі добутку:

$$T_1(\rho, \tau) = T_5(\rho) \cdot T_6(\tau). \quad (22)$$

Підставивши (22) у (10), одержимо:

$$(T_5'' + 1/\rho T_5') = T_5 T_4, \quad (23)$$

або

$$1/T_5 (T_5'' + 1/\rho T_5') = T_6'/T_6 = -\beta^2, \quad (24)$$

де β – довільна стала величина (для зазначених конкретних умов).

Тоді будемо мати два диференціальні рівняння:

$$\begin{aligned} T_6' + \beta^2 T_6 &= 0, \\ T_5'' + 1/\rho T_5' + \beta^2 T_5 &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Розв'язки цих рівнянь будуть наступними:

$$\begin{aligned} T_6(\tau) &= e^{-\beta^2 \tau}, \\ T_6(\rho) &= M J_0(\beta \rho) + N Y_0(\beta \rho), \end{aligned} \tag{26}$$

де M, N – довільні постійні;

$J_0(\beta \rho)$ і $Y_0(\beta \rho)$ – функції Бесселя нульового порядку відповідно першого і другого роду.

Як відомо, функції Бесселя цілого (n -го) порядку можна подати у вигляді рядів [14-15] зі сталою Ейлера.

Функцію $J_0(z)$ можна представити також через інтеграл:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - z \sin t) dt \quad n = 0, 1, 2 \dots \tag{27}$$

Підставляємо розв'язок (25) у граничні умови (11), враховуючи при цьому відомі з теорії бesselевих функцій залежності:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_0(z)}{dz} &= -J_1(z), \quad \frac{dY_0(z)}{dz} = -Y_1(z), \\ M(-\beta J_1(\beta) + C_3 J_0(\beta)) + N(-\beta Y_1(\beta) + C_3 Y_0(\beta)) &= 0, \\ -M\beta J_1(\beta d) - N\beta Y_1(\beta d) &= 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Ця однорідна лінійна система рівнянь має розв'язок тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто:

$$Y_1(\beta d)(C_3 J_0(\beta) - \beta J_1(\beta)) - J_1(\beta d)(C_3 Y_0(\beta) - \beta Y_1(\beta)) = 0. \tag{29}$$

Якщо корені цього рівняння позначити через $\beta_k > 0$, то функцію $T_1(\rho, \tau)$ можна подати так:

$$N_k = -\frac{J_1(\beta_k d)}{Y_1(\beta_k d)} M_k, \tag{30}$$

$$T_1(\rho, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} (M_k J_0(\beta_k \rho) + N_k Y_0(\beta_k \rho)) e^{-\beta_k^2 \tau}.$$

Постійні M_k знаходимо з умови, що розв'язок (30) повинен задовольняти початкову умову при $\tau = 0$ і $T_1 = 1$, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} (M_k J_0(\beta_k \rho) + N_k Y_0(\beta_k \rho)) = 1. \tag{31}$$

Зберігаючи у цій сумі m доданків і надаючи ρ певну кількість m значень з проміжку

$$d \leq \rho_s \leq l \quad s = 1, 2, \dots, m,$$

одержимо лінійну систему рівнянь для знаходження m значень постійних M_k :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(M_k J_0(\beta_k \rho_s) - \frac{J_1(\beta_k d)}{Y_1(\beta_k d)} Y_0(\beta_k \rho_s) \right) = 1. \quad (32)$$

Якщо циліндр суцільний, то $d = 0$, $N = 0$ і співвідношення (28) і (31) спрощуються.

Характеристичне рівняння для знаходження β_k набуває виду:

$$C_3 J_0(\beta) - \beta J_1(\beta) = 0. \quad (33)$$

Функцію $T_1(\rho, \tau)$ відповідно можна подати так:

$$T_1(\rho, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(M_k J_0(\beta_k \rho) e^{-\beta_k^2 \tau} \right) \quad (34)$$

і рівняння для знаходження постійних M_k :

$$\sum_{k=1}^m M_k J_0(\beta_k \rho_s) = 1, \quad 0 < \rho_s \leq l \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (35)$$

Таким чином, спільний розв'язок рівнянь (8), (18), (19), (21), (29), (30) і (35), що описують нестационарне температурне поле циліндра певної довжини, з врахуванням відповідно умов $d \leq \rho \leq l$, $-0,5 \leq \eta \leq 0,5$, та значень $C_1 = \alpha_1 \cdot l / \lambda$, $C_2 = \alpha_2 \cdot l / \lambda$, $C_3 = \alpha_1 \cdot \eta_2 / \lambda$, а також допоміжних A_k , B_k , D_k , A , M_k , $N_k = -J_1(B_k d) \cdot M_k / Y_1(B_k d)$, дозволяє визначити температурно-часові параметри процесу тверднення залежно від конструктивних особливостей устави, розмірів НФ, технологічного регулювання процесів (температури охолоджувального середовища, формування), властивостей і теплофізичних характеристик матеріалів (форми, знаків).

Висновки. Теоретично охарактеризовано процес охолодження шлікера у формі як такий, що відбувається протягом певного часу і залежить від властивостей шлікера, теплового режиму, форми і розмірів відливка та інших чинників й реально є процесом утворення НФ керамічних щілинних РП. Його умовно можна розділити на етапи: 1) охолодження під час заповнення форми; 2) охолодження шлікера у формі до утворення твердого шару; 3) охолодження пошарове до тверднення усього об'єму відливка; 4) охолодження у твердому стані до виймання (температури навколишнього середовища). Запропоновано математичну модель, що дозволяє визначити температурно-часові параметри процесу тверднення залежно від конструктивних особливостей устави, розмірів НФ, технологічного

регулювання процесів (температури охолоджувального середовища, формування), властивостей і теплофізичних характеристик матеріалів (форми, знаків).

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Барановський О.С.* Технічний рівень обприскувачів та ефективність використання пестицидів // Техніка АПК. – 1998. – № 2. – С. 10–11.
2. *Силниекс А.О., Вартукаптейнис К.Э.* Оптимальный шаг распылителей // Техническое обеспечение производства зерна по интенсивной технологии: Труды ЛСХА. – Вып. 259. – Елгава, Латвийская с.-х. акад., 1989. – С. 46–51.
3. *Городецький І.* Умови стабільної роботи розпилювачів штангових обприскувачів // Вісник ЛДАУ: Агроінженерні дослідження. – 2000. – № 4. – С. 122–128.
4. *Гаршин А.П., Гропянов В.М., Зайцев Г.П. и др.* Машиностроительная керамика. – С.-Пб.: Изд-во С.-Пб.ТТУ, 1997. – 726 с.
5. *Mutsuddy B.C., Ford R.G.* Ceramic Injection Molding. – London, N.Y., Tokyo: Chapman & Hall Publ., 1995. – 368 p.
6. Специальные способы литья: Справочник / В.А. Ефимов, Г.А. Анисович, В.Н. Бабич и др.; Под. ред. В.А. Ефимова. – М.: Машиностроение, 1991. – 436 с.
7. *Richerson D.W.* Modern ceramic engineering: properties, processing, and use in design. 2nd ed., rev. and expanded. – New York: M. Dekker, 1992. – 860 p.
8. *Швайка Д.И.* Исследование процесса формирования структуры керамических изделий при формировании их на роторных прессах с целью повышений качества, снижения удельных теплоэнергзатрат и повышения производительности труда: Автореф. дис... к.т.н. – К., 1982. – 22 с.
9. *Иванова Л.А.* Процессы формирования отливок с тонкорельефной поверхностью повышенного качества: Автореф. дис... д.т.н. – Л., 1984. – 41 с.
10. *Тимофеев Г.И., Леушин И.О., Нищенков А.В.* Компьютерное моделирование процесса заполнения формы при литье под давлением // Литейное производство. – 1991. – № 10. – С. 15–

- 19.
11. Воробьев Л.С., Жевлаков Г.Н., Пешкуров Ю.А. Математическое моделирование процесса охлаждения отливки // Литейное производство. – 1979. – № 3. – С. 7–8.
 12. Дульнев Г.Н., Парфенов В.Г., Сигалов А.В. Применение ЭВМ для решения задач теплообмена. – М.: Высш. шк., 1990. – 207 с.
 13. Lienhard J.H.IV, Lienhard J.H.V. A Heat Transfer Textbook. Third edition. – Cambridge, MA: Phlogiston Press, 2004. – 749 p.
 14. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1964. – 608 с.
 15. Беляев Н.М., Рядно А.А. Математические методы исследования теплопроводности. – К.: Выща школа, 1993. – 415 с.

ГОРОДЕЦЬКИЙ Іван Миколайович – інженер, старший викладач кафедри управління проектами та безпеки виробництва в АПК Львівського державного аграрного університету.

Наукові інтереси:

- технологія машинобудування;
- технологічне забезпечення точності виготовлення керамічних розпилювальних пристроїв для обприскувачів;
- інженерний менеджмент.

Тел. 8 050 560-58-40.

E-mail: ivan.hor@mail.ru

Подано 30.08.2007