УДК 648

С.В. Орчинський, нач.відділу
Український науково-дослідний інститут Веста
І.В. Петко, д.т.н., проф.
Київський національний університет технологій та дизайну

ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ БАРАБАННОЇ МАШИНИ З НЕЛІНІЙНИМ ПРУЖИННИМ ПІДВІСОМ БАКА ПРИ КОЛИВАННЯХ У ВЕРТИКАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ

Пропонується порядок розрахунків власних частот барабанних машин.

Постановка завдання й мета досліджень. Дослідженням динамічних процесів присвячена значна кількість робіт [1]–[11]. Параметри динамічних систем барабанних машин залежать від значень власних частот. Метою даних досліджень є визначення власних частот при нелінійній характеристиці пружної підвіски бака.

Основний матеріал. Прийняті до уваги маса $m_{2\Sigma}$ бака 2 разом з барабаном, противагами, двигуном, шківами пасової передачі й жорсткості пружин підвіски (їхня кількість дорівнює n). Через малість коливань корпуса 1 машини в порівнянні з коливаннями бака (що підтверджено експериментально) корпус машини приймаємо нерухомим. Зневажаємо також дисипативними опорами при деформації пружин і переміщенні штоків демпферів через малість впливу цих опорів на власні частоти системи. Початок O нерухомої системи координат yOz (рис. 1) розташовуємо на геометричній осі завантажувального отвору передньої стінки машини в статичному стані машини. Приймається, що відсутнє обертання ротора двигуна й барабана щодо бака. З баком у зборі жорстко зв'яжемо відносну систему координат $y_2O_2z_2$ з початком (O_2) у центрі мас бака. Вісь O_2y_2 направимо паралельно осі отворів кріплення пружин на баці, вісь O_2z_2 – перпендикулярно до O_2y_2.

паралельно осі отворів кріплення пружин на баці, вісь O_2z_2 – перпендикулярно до O_2y_2.

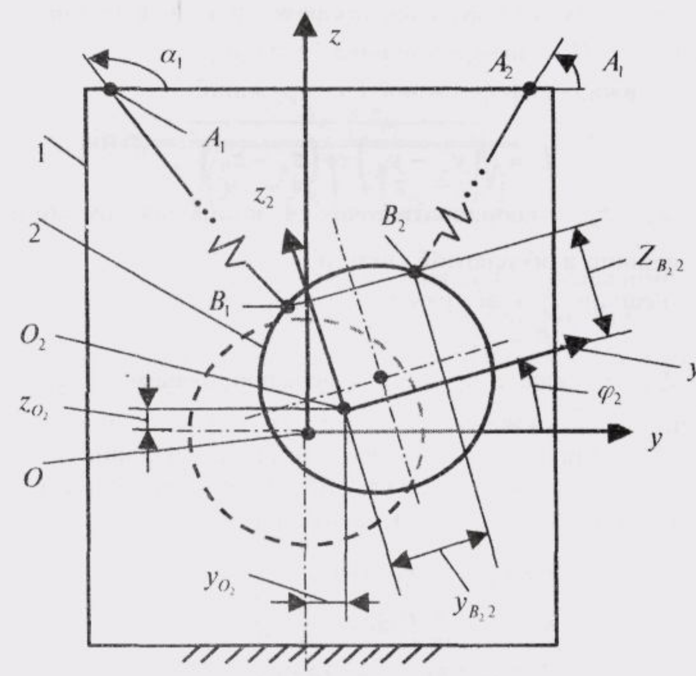

Рис. 1. Розрахункова схема

Зсув центра O_2 мас бака відносно початку O нерухомої системи координат позначимо через y_{O_2}, z_{O_2}; кут φ_2 абсолютного повороту бака відраховуємо від осі Oy в напрямку, протилежному обертанню годинної стрілки. Координати точок B_i кріплення пружини до бака в системі yOz виразимо через координати y_{O_2}, z_{O_2}, φ_2:

$$y_{B_i} = y_{O_2} + y_{B_i 2} \cos\varphi_2 - z_{B_i 2} \sin\varphi_2, \tag{1}$$

$$z_{B_i} = z_{O_2} + y_{B_i2} \sin\varphi_2 + z_{B_i2} \cos\varphi_2 , \quad i = \overline{1,n} .$$

Тут y_{B_i2}, z_{B_i2} – значення координат y_{B_i}, z_{B_i} точок B_i відносно нерухомо пов'язаної з баком системи координат $y_2O_2z_2$ з початком O_2 у центрі мас бака (у зборі).

Довжина деформованої i-ої пружини:

$$L_i = \sqrt{\left(y_{A_i} - y_{B_i}\right)^2 + \left(z_{A_i} - z_{B_i}\right)^2} , \tag{2}$$

де y_{A_i}, z_{A_i} – координати точок A_i кріплення пружин до корпуса машини в абсолютній системі координат yOz.

Реакція P_i i-ої пружини, що діє на бак:

$$P_i = c_i\left(L_i - L_{i,O}\right), \tag{3}$$

де $L_{i,O}$ – довжина пружини в недеформованому стані, c_i – жорсткість i-ої пружини.

Рівняння вільних коливань бака на пружинному підвісі як системи, що робить плаский рух (3 ступеня волі, узагальнені координати y_{O_2}, z_{O_2}, φ_2), мають вигляд [1]:

$$\begin{aligned}
&m_{2\Sigma}\ddot{y}_{O_2} = \sum_{i=1}^{n} P_i \cos\alpha_i , \\
&m_{2\Sigma}\ddot{z}_{O_2} = \sum_{i=1}^{n} P_i \sin\alpha_i - m_{2\Sigma} g , \\
&I_2\ddot{\varphi}_2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(y_{B_i} - y_{O_2}\right)P_i \sin\alpha_i - \left(z_{B_i} - z_{O_2}\right)P_i \cos\alpha_i\right], \\
&i = \overline{1,n} .
\end{aligned} \tag{4}$$

Тут α_i – поточний кут між віссю Oy й геометричною віссю i-ої пружини, відлічуваний проти руху годинної стрілки (рис. 1); g – прискорення вільного падіння; $m_{2\Sigma}$ – сумарна маса бака (разом із противагами, двигуном, пасовою передачею й т.ін.); I_2 – момент інерції бака в зборі щодо осі, що проходить через його центр мас O_2 паралельно осі обертання барабана; n – кількість пружин підвіски бака.

Вхідні в (4) тригонометричні функції кутів α_i, виражені через постійні координати точок A_i і змінні – точок B_i, а також узагальнені координати y_{O_2}, z_{O_2}, φ_2, визначаються залежностями:

$$\cos\alpha_i = \frac{y_{A_i} - y_{B_i}}{\sqrt{\left(y_{A_i} - y_{B_i}\right)^2 + \left(z_{A_i} - z_{B_i}\right)^2}},$$
$$\sin\alpha_i = \frac{z_{A_i} - z_{B_i}}{\sqrt{\left(y_{A_i} - y_{B_i}\right)^2 + \left(z_{A_i} - z_{B_i}\right)^2}} \qquad (5)$$
$$0 \le \alpha_i \le \pi .$$

Істотно нелінійні праві частини рівнянь (4) позначимо відповідно як $\Phi_1\left(y_{O_2}, z_{O_2}, \varphi_2\right)$, $\Phi_2\left(y_{O_2}, z_{O_2}, \varphi_2\right)$, $\Phi_3\left(y_{O_2}, z_{O_2}, \varphi_2\right)$.

Для визначення власних частот лінеаризуємо праві частини рівнянь (4) поблизу положення статичної рівноваги $y_{O_2} = a$, $z_{O_2} = b$, $\varphi_2 = \varphi_{O_2}$. Для цього представимо праві частини у вигляді кратного ряду Тейлора з утриманням лінійних членів, тобто

$$\begin{aligned}&\Phi_i\left(y_{O_2}, z_{O_2}, \varphi_O\right) \approx \Phi_i\left(a, b, \varphi_O\right) + \\ &+ \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_{O_2}}\Big|_{(a,b,\varphi_O)}\left(y_{O_2} - a\right) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_{O_2}}\Big|_{(a,b,\varphi_O)}\left(z_{O_2} - b\right) + \\ &+ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi_2}\Big|_{(a,b,\varphi_O)}\left(\varphi_2 - \varphi_O\right), \qquad i = \overline{1,3}.\end{aligned} \qquad (6)$$

Через громіздкість виражень часток похідних $\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_{O_2}}$, $\frac{\partial \Phi_i}{\partial z_{O_2}}$, $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \varphi_2}$ їхні аналітичні залежності були отримані (на ЕОМ) з використанням стандартної програми MAPLE.

З огляду на те, що для положення статичної рівноваги:

$$\Phi_i\left(a, b, \varphi_O\right) = 0\,, \quad i = \overline{1,3}\,, \qquad (7)$$

і заміняючи змінні

$$y_{O_2} - a = \Delta y_{O_2}\,, \quad z_{O_2} - b = \Delta z_{O_2}\,, \quad \varphi_2 - \varphi_O = \Delta\varphi_2\,, \qquad (8)$$

з (4) одержимо диференціальні рівняння для малих коливань в околі положення статичної рівноваги в наступному вигляді:

$$
\begin{aligned}
m_{2\Sigma}\Delta\ddot{y}_{O_2} &= \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_2}}\right|_{(a,b,\varphi_O)}\Delta y_{O_2} + \\
&+ \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_{O_2}}\right|_{(a,b,\varphi_O)}\Delta z_{O_2} + \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial \varphi_2}\right|_{(a,b,\varphi_O)}\Delta\varphi_2 , \\
m_{2\Sigma}\Delta\ddot{z}_{O_2} &= \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial y_{O_2}}\right|_{(a,b,\varphi_O)}\Delta y_{O_2} + \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}\right|_{(a,b,\varphi_O)}\Delta z_{O_2} + \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial \varphi_2}\right|_{(a,b,\varphi_O)}\Delta\varphi_2 , \\
I_2\Delta\ddot{\varphi}_2 &= \left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial y_{O_2}}\right|_{(a,b,\varphi_O)}\Delta y_{O_2} + \left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial z_{O_2}}\right|_{(a,b,\varphi_O)}\Delta z_{O_2} + \left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial \varphi_2}\right|_{(a,b,\varphi_O)}\Delta\varphi_2 .
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Частиний розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь (9) можна представити у формі [2], [3]:

$$
\Delta y_{O_2} = A_y \sin\omega t , \quad \Delta z_{O_2} = A_z \sin\omega t , \quad \Delta\varphi_2 = A_\varphi \sin\omega t , \tag{10}
$$

де A_y, A_z, A_φ – амплітуди, ω – частота.

Підставляючи (10) в (9), одержимо:

$$
\begin{aligned}
&\left(m_{2\Sigma}\omega^2 + \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_2}}\right|_{(a,b,\varphi_O)}\right)A_y + \\
&+ \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_{O_2}}\right|_{(a,b,\varphi_O)}A_z + \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial \varphi_2}\right|_{(a,b,\varphi_O)}A_\varphi = 0 , \\
&\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial y_{O_2}}\right|_{(a,b,\varphi_O)}A_y + \left(m_{2\Sigma}\omega^2 + \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}\right|_{(a,b,\varphi_O)}\right)A_z + \\
&+ \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial \varphi_2}\right|_{(a,b,\varphi_O)}A_\varphi = 0 ,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial y_{O_2}}\right|_{(a,b,\varphi_O)} A_y + \left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial z_{O_2}}\right|_{(a,b,\varphi_O)} A_z +$$

$$+\left(I_2\omega^2 + \left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_2}\right|_{(a,b,\varphi_O)}\right)A_\varphi = 0$$

Система однорідних лінійних рівнянь (11) дозволяє визначити відношення амплітуд A_y, A_z, A_φ. Крім того, для одержання рішень, відмінних від нуля, визначник, складений з коефіцієнтів при A_y, A_z, A_φ в (11), дорівнює нулю, тобто:

$$\begin{vmatrix} m_{2\Sigma}\omega^2 + \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{O_2}}\right|_c & \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial z_{O_2}}\right|_c & \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_2}\right|_c \\ \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{O_2}}\right|_c & m_{2\Sigma}\omega^2 + \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial z_{O_2}}\right|_c & \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2}\right|_c \\ \left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial y_{O_2}}\right|_c & \left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial z_{O_2}}\right|_c & I_2\omega^2 + \left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_2}\right|_c \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

Це дає можливість одержати частотне рівняння системи у вигляді:

$$\omega^6 + N_1\omega^4 + N_2\omega^2 + N_3 = 0. \quad (13)$$

Коефіцієнти N_k в (13):

$$N_1 = \frac{1}{m_{2\Sigma}}\left(\left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{O_2}}\right|_c + \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial z_{O_2}}\right|_c\right) + \frac{1}{I_2}\cdot\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_2},$$

$$N_2 = \frac{1}{m_{2\Sigma}^2}\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{O_2}}\Big|_c + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z_{O_2}}\Big|_c +$$

$$+\frac{1}{m_{2\Sigma}I_2}\left(\left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{O_2}}\right|_c \cdot \left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_2}\right|_c + \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial z_{O_2}}\right|_c \left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_2}\right|_c - \right. \quad (14)$$

$$\left. -\left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial y_{O_2}}\right|_c \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_2}\right|_c - \left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial z_{O_2}}\right|_c \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi_2}\right|_c\right) - \frac{1}{m_{2\Sigma}^2} \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{O_2}}\right|_c \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial z_{O_2}}\right|_c,$$

$$N_3 = \frac{1}{m_2^2 I_2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_2}}\bigg|_c\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}\bigg|_c\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\bigg|_c-\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}\bigg|_c\frac{\partial\Phi_3}{\partial z_{O_2}}\bigg|_c\right)+$$

$$+\frac{1}{m_2^2 I_2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y_{O_2}}\bigg|_c\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_2}\bigg|_c\cdot\frac{\partial\Phi_3}{\partial z_{O_2}}\bigg|_c-\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_{O_2}}\bigg|_c\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\bigg|_c\right)+$$

$$+\frac{1}{m_2^2 I_2}\frac{\partial\Phi_3}{\partial y_{O_2}}\bigg|_c\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_{O_2}}\bigg|_c\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}\bigg|_c-\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_2}\bigg|_c\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}\bigg|_c\right).$$

Необхідні для обчислення власних частот координати a, b, φ_0 статичної рівноваги на підставі (4) і (6) при $\ddot{y}_{O_2} = 0, \ddot{z}_{O_2} = 0, \ddot{\varphi}_2 = 0$ можуть бути визначені послідовними наближеннями до системи рівнянь:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_{O_2}}\bigg|_{(a_j,b_j,\varphi_{Oj})}\cdot a_j+\frac{\partial\Phi_i}{\partial z_{O_2}}\bigg|_{(a_j,b_j,\varphi_{Oj})}\times\\ \times b_j+\frac{\partial\Phi_i}{\partial\varphi_2}\bigg|_{(a_j,b_j,\varphi_{Oj})}\cdot\varphi_{Oj}=\\ =\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_{O_2}}\bigg|_{(a_j,b_j,\varphi_{Oj})}y_{O_2(j)}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial z_{O_2}}\bigg|_{(a_j,b_j,\varphi_{Oj})}\times\\ \times z_{O_2(j)}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial\varphi_2}\bigg|_{(a_j,b_j,\varphi_{Oj})}\varphi_{2(j)}-\Phi_i(a_j,b_j,\varphi_{Oj}).\\ i=\overline{1,3},\qquad j=\overline{1,k}.\end{gathered}\tag{15}$$

Приймаючи, наприклад, що $j=1$, $y_{O_2(1)}=0$, $z_{O_2(1)}=0$, $\varphi_{O(1)}=0$, із системи рівнянь (15) знаходимо $a_{(1)}$, $b_{(1)}$, $\varphi_{O(1)}$ – попередні значення координат центра мас при $j=1$. Використовуючи далі (15) для другого наближення ($j=2$) й роблячи заміни $y_{O_2(2)}=a_{(1)}$, $z_{O_2(2)}=b_{(1)}$, $\varphi_2=\varphi_{O(1)}$, обчислюємо $a_{(2)}$, $b_{(2)}$,

$\varphi_{O(2)}$. Далі дана процедура повторюється. Щоразу перевіряються нерівності:

$$-\varepsilon < \frac{\Phi_i(y_{O_2(j)},\ z_{O_2(j)},\ \varphi_{2(j)})}{m_{2\Sigma}g} < \varepsilon\ , \qquad (16)$$

$$i = \overline{1,\ 3}\ ,$$

де ε – малий параметр (наприклад 10^{-4}). Після виконання умов (16) в k-му циклі $(j = k)$ остаточні значення координат центра O_2 мас і кут повороту бака в статичному положенні приймаються рівними:

$$y_{O_2.C} = a_k,\ z_{O_2.C} = b_k,\ \varphi_{2.C} = \varphi_{Ok}\ . \qquad (17)$$

Через істотну нелінійність похідних $\dfrac{\partial\Phi_i}{\partial y_{O_2}},\ \dfrac{\partial\Phi_i}{\partial z_{O_2}},\ \dfrac{\partial\Phi_i}{\partial\varphi_2}$ умови (16) можуть бути невиконані.

Тоді вибирається найкраща з перевірених s-та ітерація й фіксуються значення:

$$\Phi_{1(s)},\ \Phi_{2(s)},\ \Phi_{3(s)},\ \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_1}}\right|_{(s)},\ \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}\right|_{(s)},\ \left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\right|_{(s)};$$

за ними обчислюється:

$$\Delta y_{O_2(s+1)} = \frac{\Phi_{1(s)}}{\left.\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_2}}\right|_{(s)}}\ ,\quad \Delta z_{O_2(s+1)} = \frac{\Phi_{2(s)}}{\left.\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}\right|_{(s)}}\ ,$$

$$\Delta\varphi_{2(s+1)} = \frac{\Phi_{3(s)}}{\left.\dfrac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\right|_{(s)}}\ , \qquad (18)$$

$$z_{O_2(s+1)} = z_{O_2(s)} - \Delta z_{O_2(s+1)}\ ,$$

$$y_{O_2(s+1)} = y_{O_2(s)} - \Delta y_{O_2(s+1)}\ ,$$

$$\varphi_{2(s+1)} = \varphi_{(s)} - \Delta\varphi_{(s+1)}\ .$$

За отриманим значенням $y_{O_2(s+1)}$, $\Delta z_{O_2(s+1)}$, $\varphi_{2(s+1)}$, як і раніше, проводимо $(s+1)$-ту ітерацію, обчислюємо

$\Phi_{1(s+1)}, \Phi_{2(s+1)}, \Phi_{3(s+1)}$, $\left.\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_2}}\right|_{(s+1)}$, $\left.\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}\right|_{(s+1)}$, $\left.\dfrac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\right|_{(s+1)}$ і зіставляємо з (16) до виконання нерівностей.

На підставі отриманих координат центра мас у статичному положенні системи:

$$y_{O_2C} \approx y_{O_2(t)}, \qquad z_{O_2C} \approx z_{O_2(t)}, \qquad \varphi_{2C} \approx \varphi_{2(t)} \qquad (19)$$

з (12) знаходять три власні частоти системи.

Позначення $\left.\dfrac{\partial\Phi_i}{\partial y_{O_2}}\right|_C$, $\left.\dfrac{\partial\Phi_i}{\partial z_{O_2}}\right|_C$, $\left.\dfrac{\partial\Phi_i}{\partial\varphi_2}\right|_C$ ставляться до значень зазначених часток похідних у положенні статичної рівноваги.

Як видно з (12) при "симетрії" системи, тобто, наприклад, при

$$i = 2,\ y_{A_1} = -y_{A_2},\ z_{A_1} = z_{A_2},\ y_{B_1} = -y_{B_2},$$

$$z_{B_1} = z_{B_2},\ c_1 = c_2,\ L_{1,0} = L_{2,0}$$

система (12) розпадається на дві підсистеми внаслідок того, що

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_{O_2}} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial y_{O_2}} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2} = \frac{\partial\Phi_3}{\partial z_{O_2}} = 0\,. \qquad (20)$$

Таким чином, наведена жорсткість $c_{z,c}$ обох пружин у статичному стані (по координаті z_{O_2}) і відповідна власна частота ω_z при зазначеній симетрії можуть бути представлені залежностями:

$$c_{z,c} = -\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}\right|_c = 2c_1\left.\left(1 - \frac{L_{1,0}\cos^2\alpha_1}{\sqrt{\left(y_{A_1} - y_{B_1}\right)^2 + \left(z_{A_1} - z_{B_1}\right)^2}}\right)\right|_c, \qquad (21)$$

$$\omega_1 = \omega_Z = \sqrt{\frac{c_{z,c}}{m_{2\Sigma}}}\,.$$

В (21) кут α_1 і координати y_{B_1}, z_{B_1} повинні прийматися для положення статичної рівноваги відповідно до (1) і (5) і $y_{O_2} = y_{O_2C}$, $z_{O_2} = z_{O_2C}$, $\varphi_2 = \varphi_{2C}$. Зв'язані власні частоти горизонтальних і кутових коливань такої "розсипаної симетричної" системи визначаються з біквадратного рівняння:

$$\omega^4 + \omega^2 \left(\frac{1}{J_2} \left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_2}\right|_c + \frac{1}{m_{2\Sigma}} \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{O_2}}\right|_c \right) + \\ + \frac{1}{m_{2\Sigma} J_2} \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{O_2}}\right|_c \left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_2}\right|_c - \\ - \frac{1}{m_{2\Sigma} J_2} \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_2}\right|_c \left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial y_2}\right|_c = 0 \qquad (22)$$

Однакові частоти $(\omega_2 = \omega_3)$ у цій підсистемі можуть бути одержані при параметрах:

$$\frac{1}{J_2} \cdot \left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_2}\right|_c - \frac{1}{m_{2\Sigma}} \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{O_2}}\right|_c = \pm 2 \sqrt{\frac{1}{m_{2\Sigma} J_2} \cdot \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi_2}\right|_c \cdot \left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial y_{O_2}}\right|_c}\,,$$

$$\omega_{2,3} = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{J_2} \cdot \left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial y_{O_2}}\right|_c + \frac{1}{m_{2\Sigma}} \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{O_2}}\right|_c \right)}\,, \qquad (23)$$

якщо одержувані $\omega_{2,3}$ – дійсні числа.

Деякий інтерес може представити визначення власних частот розглянутої системи при центральному моменті інерції $I_2 = 0$ (варіант незавантаженої барабанної машини).

У цьому випадку третє рівняння (4) дає залежність $\Phi_3(y_{0_2}, z_{0_2}, \varphi_2) = 0$, внаслідок чого

$$\Delta \varphi_2 = - \frac{1}{\left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi_2}\right|_c} \left(\left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial y_{O_2}}\right|_c \Delta y_{O_2} + \left.\frac{\partial \Phi_3}{\partial z_{O_2}}\right|_c \Delta z_{O_2} \right). \qquad (24)$$

Таким чином, частотне рівняння може бути знайдене з визначника другого порядку:

$$\begin{vmatrix} m_{2\Sigma}\omega^2 + \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_2}}\right|_c - \frac{1}{\left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\right|_c}\left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial y_{O_2}}\right|_c\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_2}\right|_c & \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_{O_2}}\right|_c - \frac{1}{\left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\right|_c}\left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial z_{O_2}}\right|_c\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_2}\right|_c \\ \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial y_{O_2}}\right|_c - \frac{1}{\left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\right|_c}\left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial y_{O_2}}\right|_c\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}\right|_c & m_{2\Sigma}\omega^2 + \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}\right|_c - \frac{1}{\left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\right|_c}\left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial z_{O_2}}\right|_c\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}\right|_c \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

Якщо система при цьому має «симетричні» параметри, то члени визначника a_{12} й a_{21} дорівнюють нулю через $\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial z_{O_2}}\right|_c = \left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial z_{O_2}}\right|_c = \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial y_{O_2}}\right|_c = \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi_2}\right|_c = 0$ й обидві частоти системи можуть бути знайдені із залежностей:

$$\omega_1 = \sqrt{-\frac{1}{m_{2\Sigma}}\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}\right|_c},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{m_{2\Sigma}}\left(-\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_2}}\right|_c + \frac{\left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial y_{O_2}}\right|_c\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi_2}\right|_c}{\left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi_2}\right|_c}\right)}. \quad (26)$$

Як видно, при $I_2 = 0$ й зазначеній симетрії параметрів змінюється тільки частота ω_2.

Для проведення розрахунків з визначення координат статичної рівноваги й власних частот барабанних машин розроблена програма для ЕОМ.

Наприклад для «симетричної» системи (барабанні пральні машини-автомати із фронтальним завантаженням) з параметрами:

$m_{2\Sigma} = 58{,}82$ кг, $J_2 = 0$ кгм^2, $g = 9{,}8$ м/с^2, $y_{A_1} = -0{,}265$ м, $y_{A_2} = 0{,}265$ м, $z_{A_1} = z_{A_2} = 0{,}31$ м,

$y_{B_1} = 0{,}221$ м, $y_{B_2} = 0{,}221$ м, $z_{B_1} = z_{B_2} = 0{,}157$ м, $c_1 = c_2 = 4625$ Н/м, $L_{1,0} = L_{2,0} = 0{,}1465$ м

У результаті розрахунку одержимо:

$$y_{O_2,c} = 0\,,\ z_{O_2,c} = -0{,}0261\ \text{м},\ \varphi_{2,c} = 0\,,\ P_1 = 297{,}1\ \text{Н},$$

$$\alpha_1 = 1{,}8117\ \text{рад},\ \ \sin\alpha_1 = 0{,}9711,$$

$$\cos\alpha_1 = -0{,}2386,$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_{O_2}}\right|_c = -\,0{,}3932\cdot 10^4\ \text{Н/м},$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z_{O_2}}\right|_c = -1{,}4971\cdot 10^4\ \ \text{Н/м},\ \left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial\varphi}\right|_c = -0{,}075\ \text{Н/м},$$

$$\omega_1 = 15{,}954\ \text{рад/с},\quad \omega_2 = 13{,}696\ \text{рад/с},$$

$$\omega_3 = 8{,}168\ \text{рад/с}.$$

Використовувані іноді наближені формули [2], [3] для обчислення частот ω_1^* і ω_2^* при $c_1 = c_2$ дають інші результати: $\omega_1^* = \sin\alpha_1\sqrt{\dfrac{2C_1}{m_{2\Sigma}}} = 12{,}177$ рад/с., $\omega_2^* = \cos\alpha_1\sqrt{\dfrac{2C_1}{m_{2\Sigma}}} = 2{,}992$ рад/с.

Висновки. Розрахунки для барабанних машин, проведені за розробленим автором алгоритмом, істотно уточнюють значення власних частот, розрахованих за наближеними залежностями, наведеними у відомих роботах [2], [3], [4], [5].

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Бухгольц Н.Н.* Основний курс теоретичної механіки. Частина 2. – М.: Наука, 1966. – 332 с.
2. *Кожевников С.Н.* Динаміка машин із пружними ланками. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. – 160 с.
3. *Філіппов А.П.* Коливання механічних систем. – Київ: Наук. думка, 1965. – 716 с.
4. *Голубенцов А.Н.* Динамика переходных процессов в машинах со многими массами. – М.: Машгиз, 1959. – 160 с.
5. *Кожевников С.Н.* Динамика нестационарных процессов в машинах. К.: Наук. думка, 1986. – 288 с.

6. *Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П.* Нестационарные колебания механических систем. – К.: Наук. думка, 1966. – 336 с.
7. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. – 440 с.
8. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука. – 1967. – 420 с.
9. *Plakhtienko N.P.* Nonlinear Transnational Vibrations of a Solid with a Graviti – Friction Seismic Damper // Int.Apple.Mech. – 2003. – 39. – № 9. – P. 1093–1099.
10. *Gulyaev V.I.* Complex Notion of Elastic Systems // Int. Apple. Mech. – 2003. – 39. – № 5. – P. 525–548.
11. *Попов В.И., Локтев В.И.* Динамика станков. – К.: Техніка, 1975. – 136 с.

ОРЧИНСЬКИЙ Сергій Васильович – інженер, начальник дослідно-конструкторського відділу білизнообробної техніки УкрНДІЕМ "Веста" Мінпромполітики.

Наукові інтереси:
– складні електропобутові машини й прилади;
– динаміка барабанних машин.

Тел.: (044)4833744.

ПЕТКО Ігор Валентинович – доктор технічних наук, професор кафедри електропобутових машин Київського національного університету технологій та дизайну.

Наукові інтереси:
– електропобутові машини;
– технологія й устаткування для легкої промисловості;
– гідрообробка матеріалів.

Тел.: (044)256214.

Подано 13.05.2005