УДК 681.3.082.5

М.С. Курінний, аспір.
О.Н. Романюк, к.т.н., доц.
Вінницький державний технічний університет

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПІКСЕЛІВ ДЛЯ ЗАДАЧ АНТИАЛІАЙЗИНГУ

В статті розглянуті математичні моделі пікселів, які використовуються у методах крайового антиаліайзингу. Запропоновано модель пікселя, яка забезпечує порівняно з існуючими підходами більш високу точність визначення інтенсивності кольору точок зображення і, як наслідок, більш високу якість.

У більшості сучасних комп'ютерних систем зображення представляється у дискретній формі. Через це при відображенні інформації мають місце спотворення і на неперервних краях об'єктів з'являються чітко виражені сходинки або зубці. Цей артефакт отримав назву ступінчастого ефекту чи ефекту *аліайзингу* [1]. Ефект аліайзингу суттєво погіршує якість сформованого зображення.

Методи усунення ступінчастого ефекту в основному розділяють на дві групи [2]. До першої групи відносяться методи, які базуються на збільшенні дискретизації. В даних методах сцена спочатку розраховується з вищою роздільною здатністю, що дає можливість врахувати дрібні деталі, а при відображенні зменшується шляхом усереднення. Основний недолік даних методів полягає у великій обчислювальній складності, оскільки при збільшенні дискретизації в n разів, кількість пікселів (а отже і кількість обчислень на один піксель) збільшується в n^2 разів [2]. В методах другої групи піксель розглядається не як умовна точка, а як скінченна область. При цьому інтенсивність пікселів на краях об'єктів встановлюється пропорційно до площі тих частин пікселів, які покриваються даним об'єктом. Дані методи відрізняються меншою обчислювальною складністю, а отже є більш прийнятними для випадків, коли необхідно генерувати зображення у масштабі часу [3].

Від того, яка використовується математична модель для форми пікселя, безпосередньо залежить складність обчислення площі покриття. Більшість існуючих алгоритмів розглядають піксель як квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці, оскільки при цьому значно спрощуються формули для знаходження площі частини пікселя, яка покривається об'єктом. Математична модель пікселя, яка розглядає піксель як одиничне коло є більш адекватною реальності, а отже забезпечує більш високу якість зображення. Дана модель не набула широкого використання через складність виразів для розрахунку площі покриття. Тому актуальним є питання знаходження апроксимаційних формул для обчислення площі, що відтинається від пікселя різними графічними примітивами, які мають меншу обчислювальну складність.

Знайдемо площу, що відтинається від пікселя ідеальним ребром багатокутника. Піксель будемо розглядати як скінчену область у формі кола з одиничним діаметром.

На рис. 1 зображений перетин пікселя ребром багатокутника. Відстань від центра пікселя до ребра багатокутника дорівнює h. Пряма CD проходить через центр пікселя і паралельна ребру багатокутника. Частина пікселя, яка знаходиться всередині багатокутника, позначена сірим кольором. Як видно з рис.1, ця площа складається з декількох частин: площі трикутника AOB, S площі круга та площі секторів AOC та BOD. Відповідно формула для шуканої площі може бути записана наступним чином:

$$S = S_{\Delta AOB} + 2 \cdot S_{сектAOC} + \frac{\pi R^2}{2}. \qquad (1)$$

Запишемо вираз для знаходження площі трикутника AOB:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{AB \cdot OE}{2} = 2\sqrt{R^2 - h^2} \cdot \frac{h}{2} = h\sqrt{R^2 - h^2}.$$

Враховуючи, що $R = 1/2$, отримуємо:

$$S_{\Delta AOB} == h\sqrt{\frac{1}{4} - h^2}. \qquad (2)$$

Площа сектора AOC знаходиться за формулою:

$$S_{сектAOC} = \frac{R^2}{2} \cdot \alpha(рад). \qquad (3)$$

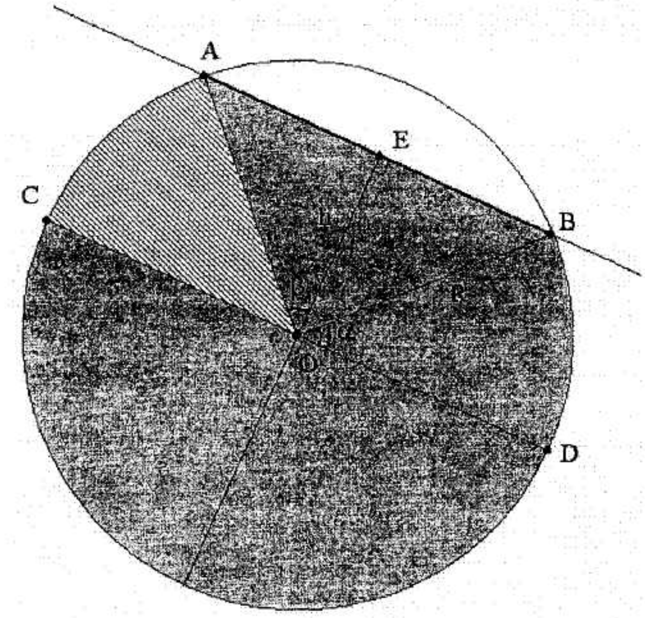

Рис. 1. Перетин пікселя ідеальним відрізком прямої

Для знаходження кута α скористаємось наступними співвідношеннями:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta ;$$

$$\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) = \cos\beta ;$$

$$\alpha = \arcsin(\cos\beta) .$$

З трикутника AOE:

$$\cos\beta = \frac{OE}{AO} = \frac{h}{R} = 2h . \tag{4}$$

Враховуючи вираз (4) маємо наступну формулу для кута α:

$$\alpha = \arcsin(2h) . \tag{5}$$

Підставивши отриманий вираз в формулу (3) та врахувавши, що $R = 1/2$, отримуємо:

$$S_{сектAOC} = \frac{R^2}{2} \cdot \arcsin(2h) = \frac{\arcsin(2h)}{8} . \tag{6}$$

Підставивши вирази (2) та (6) в формулу (1), отримуємо:

$$S = h\sqrt{\frac{1}{4} - h^2} + 2\frac{\arcsin(2h)}{8} + \frac{\pi}{8} = h\sqrt{\frac{1}{4} - h^2} + \frac{\arcsin(2h)}{4} + \frac{\pi}{8} . \tag{7}$$

Відповідно до принципу "крайового антиаліайзингу" інтенсивність кольору точки встановлюється пропорційно до площі тієї частини пікселя, яка відтинається ребром багатокутника. Інтенсивність кольору i-го пікселя визначається за формулою:

$$I_i = I_M \frac{S_i}{S_{\max}} , \tag{8}$$

де I_M – інтенсивність кольору, з якою треба відтворити ребро багатокутника;

S_i – площа, яка відтинається від i-го пікселя ребром багатокутника;

$S_{\max}$ – площа пікселя. У випадку, коли піксель розглядається як коло діаметром 1, $S_{\max} = \pi R^2 = \pi/4$.

Позначимо співвідношення $\frac{S_i}{S_{\max}}$ як $f(h)$. З врахуванням виразу (7), отримуємо:

$$f(h) = \frac{S_i}{S_{\max}} = \frac{h\sqrt{\frac{1}{4} - h^2} + \frac{\arcsin(2h)}{4} + \frac{\pi}{8}}{\pi/4} = \frac{4h\sqrt{\frac{1}{4} - h^2}}{\pi} + \frac{\arcsin(2h)}{\pi} + \frac{1}{2} . \tag{9}$$

Безпосереднє обчислення за виразом (9) вимагає великих часових витрат, а отже при використанні його для антиаліайзингу ребра багатокутника призведе до значного зменшення швидкодії формування зображення.

Доведемо, що замість виразу (9) можна використати вираз

$$g(h) = h + 1/2\,, \tag{10}$$

при цьому похибка складатиме в найгіршому випадку не більше 6 %.

Розглянемо функцію $d(h) = f(h) - g(h)$. З врахуванням виразу (9) отримуємо:

$$d(h) = f(h) - g(h) = \frac{4h\sqrt{\frac{1}{4}-h^2}}{\pi} + \frac{\arcsin(2h)}{\pi} + \frac{1}{2} - h - \frac{1}{2} = \frac{4h\sqrt{\frac{1}{4}-h^2}}{\pi} + \frac{\arcsin(2h)}{\pi} - h\,.$$

На рис. 2 зображено графік функції $d(h)$.

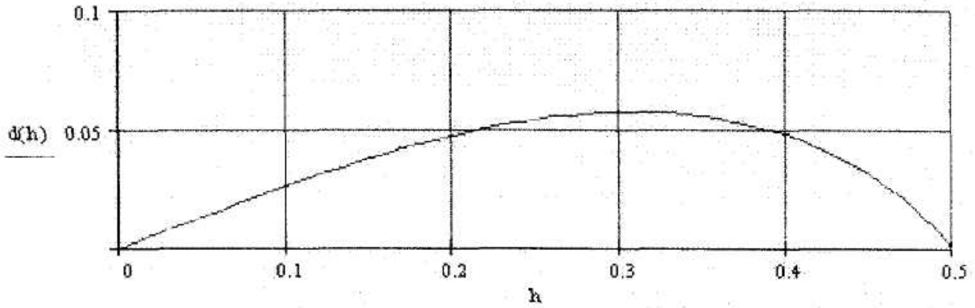

Рис. 2. Графік функції $d(h)$

Для визначення максимального значення, яке може приймати функція $d(h)$, знайдемо похідну даної функції:

$$d'(h) = \left(\frac{4h\sqrt{\frac{1}{4}-h^2}}{\pi} + \frac{\arcsin(2h)}{\pi} - h\right)' = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{1}{4}-h^2} - \frac{4h^2}{\pi\sqrt{1/4-h^2}} + \frac{2}{\pi\sqrt{1-4h^2}} - 1\,.$$

Прирівняємо даний вираз до нуля:

$$\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{1}{4}-h^2} - \frac{4h^2}{\pi\sqrt{1/4-h^2}} + \frac{2}{\pi\sqrt{1-4h^2}} - 1 = 0\,.$$

Розв'язками даного рівняння є $h_0 = \frac{1}{8}\sqrt{16-\pi^2} \approx 0{,}309$; $h_1 = -\frac{1}{8}\sqrt{16-\pi^2}$. Відповідно максимальне значення похибки дорівнює:

$$d_{max} = d(h_0) = 0{,}058\,.$$

Отже, замість виразу (9) можна в розрахунках використовувати вираз (10), причому похибка складе не більше 6 %.

Розглянемо алгоритм усунення ступінчастого ефекту для границі кола, оснований на отриманих раніше формулах.

На кожному кроці при обчислені площі тієї частини пікселя, яка знаходиться всередині кола, відрізок дуги апроксимується прямою. Відстань від прямої до центра пікселя дорівнює відстані від центра пікселя до кола.

В даному випадку відповідно до принципу крайового антиаліайзингу інтенсивність кольору i-го пікселя визначається за формулою:

$$I_i = (h_i + 1/2)\cdot I_M\,, \tag{11}$$

де I_M – інтенсивність кольору, з якою треба відтворити коло;

h_i – відстань від центра пікселя до кола.

Відстань від центра пікселя до кола визначається за формулою:

$$h_i = R - \sqrt{x_i^2 + y_i^2}\,. \tag{12}$$

Наявність у виразі "довгих" операцій призводить до збільшення обчислювальних витрат і зниження швидкодії. Обчислення квадратного кореня можна спростити, і тим самим підвищити швидкодію алгоритму.

Відомо, що квадратний корінь можна наближено обчислювати за формулою Герона [4]:

$$s_i = \frac{1}{2}\left(s_{i-1} + \frac{a}{s_{i-1}}\right),$$

$$\sqrt{a} \approx s_i,$$

де s_0 – перше наближення до кореня;

s_i – наближене значення виразу $\sqrt{a}$, отримане на i-й ітерації (є більш точною апроксімацією кореня ніж попереднє значення); $i = 0,1,2...N$.

З кожним кроком значення s_i все більше наближається до дійсного значення виразу $\sqrt{a}$.

Для нашого випадку: $a = \sqrt{x^2 + y^2}$, тому початкове наближення доцільно взяти рівним радіусу кола: $s_0 = R$.

Розглянемо похибку, яка виникає у разі використання лише одної ітерації для наближеного обчислення квадратного кореня. У даному випадку наближене значення обчислюється за формулою:

$$s_1 = \frac{1}{2}\left(s_0 + \frac{x^2 + y^2}{s_0}\right) = \frac{1}{2}\left(R + \frac{x^2 + y^2}{R}\right). \tag{13}$$

Визначимо різницю між наближеним значенням (13) та точним значенням виразу $\sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(R + \frac{x^2 + y^2}{R}\right) - \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{R^2 + x^2 + y^2}{2R} - \frac{2R\sqrt{x^2 + y^2}}{2R} =$$
$$= \frac{R^2 - 2R\sqrt{x^2 + y^2} + \left(x^2 + y^2\right)}{2R} = \frac{\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2}{2R} \tag{14}$$

При коловій інтерполяції, більшість алгоритмів забезпечує виконання наступної умови:

$$\left|R - \sqrt{x^2 + y^2}\right| \le \frac{1}{2}.$$

Враховуючи останню умову та вираз (14), отримуємо максимальне значення похибки:

$$\Delta \le \frac{1}{8R}.$$

Таким чином, похибка обернено пропорційна радіусу окружності і для найменшого радіуса ($R = 2$) максимальна похибка складає 6,25 %.

Отже, замість виразу (12) можна використати наступний вираз:

$$h_i = R - \frac{1}{2}\left(R + \frac{x^2 + y^2}{R}\right) = \frac{R^2}{2R} - \frac{x^2 + y^2}{2R} = \frac{R^2 - (x^2 + y^2)}{2R} \tag{15}$$

В алгоритмах колової інтерполяції за методом оцінювальної функції найбільш часто використовується оцінювальна функція виду:

$$OF = x^2 + y^2 - R^2.$$

Підставивши (15) в (11) та врахувавши останній вираз, отримуємо наступну формулу для визначення інтенсивності кольору:

$$I_i = \frac{I_M}{2} + \frac{R^2 - (x^2 + y^2)}{2R} I_M = \frac{I_M}{2} - \frac{OF}{2R} I_M.$$

Для того, щоб уникнути в циклі інтерполювання необхідності виконувати операцію ділення та множення інтенсивність кольору пікселів будемо приймати рівною дискретним рівням: $\frac{I_M}{2}; \frac{I_M}{4}; \frac{I_M}{8}; \frac{I_M}{16}; ....$. Кількість дискретних рівнів визначається в залежності від необхідної точності та якості формування кінцевого зображення.

Розглянемо приклад алгоритму антиаліайзингу для границі кола, який використовує 3 дискретних рівнянь інтенсивності кольору і оснований на алгоритмі колової інтерполяції за методом оцінювальної функції.

1. Встановлюємо початкові значення: $OF = 0$; $x = 0$; $y = R$.
2. Встановлюємо інтенсивність піксела $I(x,y) = \frac{I_M}{2}$.
3. Якщо $x \ge y$, то переходимо на крок 8.
4. Якщо $OF \ge 0$, то $OF = OF + 2x + 2y + 2$; инакше $OF = OF + 2x + 1$.
5. Якщо $OF \ge 0$, то $x = x + 1; y = y + 1$; $OF' = OF$;
   инакше $x = x + 1$; $OF' = OF + 2y + 1$.
6. Встановлюємо інтенсивність пікселя за наступними правилами:
   якщо $|OF'| \ge R$ та $OF' \ge 0$, то $I(x,y) = \frac{I_M}{2} - \frac{I_M}{2}$;
   якщо $|OF'| \ge R$ та $OF' < 0$, то $I(x,y) = \frac{I_M}{2} + \frac{I_M}{2}$;
   якщо $|OF'| \ge \frac{R}{2}$ та $OF' \ge 0$, то $I(x,y) = \frac{I_M}{2} - \frac{I_M}{4}$;
   якщо $|OF'| \ge \frac{R}{2}$ та $OF' < 0$, то $I(x,y) = \frac{I_M}{2} + \frac{I_M}{4}$;
   якщо $|OF'| \ge \frac{R}{4}$ та $OF' \ge 0$, то $I(x,y) = \frac{I_M}{2} - \frac{I_M}{8}$;
   якщо $|OF'| \ge \frac{R}{4}$ та $OF' < 0$, то $I(x,y) = \frac{I_M}{2} + \frac{I_M}{8}$.
7. Переходимо до кроку 3.
8. Кінець.

Наведений алгоритм не містить довгих операцій та може бути просто реалізований як програмно так і апаратно.

Запропонована модель пікселя забезпечує порівняно з існуючими підходами більш високу точність визначення інтенсивності кольору точок зображення і, як наслідок, більш високу його якість.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Роджерс Д.* Алгоритмические основы машинной графики / Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 512 с.
2. *Crow, Franklin C.* The Aliasing problem in Computer Generated Shaded Images, // CACM. – Vol. 20. – P. 40–47.
3. *Crow, Franklin C.* A Comparison of Antialiasing Techniques // IEEE CG & A. – 1981 – Vol. 1. – P. 40–47.
4. *Попов Б.А., Теслер Г.С.* Вычисление функций на ЭВМ. – Киев: Наукова думка, 1984. – С. 189.

КУРІННИЙ Михайло Сергійович – аспірант Вінницького державного технічного університету.

Наукові інтереси:

– програмні та апаратні засоби комп'ютерної графіки.

Тел.: 8-(043 2)-219196.

E-mail: vinmisha@ukr.net

РОМАНЮК Олександр Никифорович – доцент, кандидат технічних наук, заступник директора з наукової роботи інституту ІнІТКІ Вінницького державного технічного університету.

Наукові інтереси:

– методи формування та перетворення графічних зображень

Тел.: 8-(043 2)-322411.

E-mail: rom@vstu.vinnica.ua

Подано 09.08.2002