МАТЕМАТИЧНЕ І КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ І СИСТЕМ

УДК 681.51:519.95

С.Л. Алмазов, інж.
Український науково-дослідний інститут радіоапаратури
В.Л. Баранов, д.т.н., пров. н.с.
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України
Г.Л. Баранов, д.т.н.
Центральний науково-дослідний інститут навігації і управління

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИНТЕЗУ ЗАМКНУТИХ ЗАКОНІВ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ РУХОМИМИ ОБ'ЄКТАМИ

Запропоновано метод синтезу замкнутих законів оптимального керування, заснований на диференціальних перетвореннях двоточкової крайової задачі. Показано, що диференціальні перетворення дозволяють встановити зв'язок між вектором оптимального керування і вектором поточного стану рухомого об'єкта у вигляді системи скінчених рівнянь.

Розв'язання задач траєкторного керування сучасними аерокосмічними об'єктами вимагає реалізації законів оптимального керування в реальному часі з високою точністю. До таких задач відносяться задачі виведення аерокосмічних об'єктів на орбіту, задачі входу в атмосферу, виведення в заданий район посадки, задачі польоту літальних апаратів по заданому маршруту, виведення їх на задану висоту і ряд інших задач. Відомі методи синтезу оптимального керування, засновані на методах варіаційного числення, принципі максимуму Понтрягіна і динамічному програмуванні вимагають виконання великого обсягу обчислень і не завжди відповідають вимогам високоточного оптимального керування в реальному часі швидкісними рухомими об'єктами. Методи варіаційного числення і принцип максимуму Понтрягіна дозволяють чисельно синтезувати тільки програмне оптимальне керування, що є нестійким до дії зовнішніх збурень на об'єкт керування. Складність розв'язання двоточкової крайової задачі, до якої зводять задачу оптимального керування методи варіаційного числення і принцип максимуму Понтрягіна, вносить значне запізнювання в контур керування в процесі замикання зворотного зв'язку на основі програмного оптимального керування. З іншого боку, хоча методи динамічного програмування дають можливість синтезувати замкнутий закон оптимального керування, вони зводять задачу чисельного синтезу оптимального керування до ще більш складної в обчислювальному відношенні задачі інтегрування диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Недоліки відомих методів пропонується усунути методом диференціальних перетворень [1, 2], що дозволяє звести проблему синтезу замкнутого закону оптимального керування до розв'язання системи скінчених рівнянь, що поєднують вектор оптимального керування з вектором поточного стану рухомого об'єкта.

Розглянемо математичну модель задачі оптимального керування [3]. Динаміка руху рухомого об'єкта описується векторним диференціальним рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \qquad (1)$$

де $x = x(t)$ – n-мірний вектор стану;

u – m-мірний вектор керування ($m \le n$);

f – неперервна і неперервно-диференційована по сукупності змінних t, x, u вектор-функція узагальненої сили;

$t \in [t_0, T]$ – час, граничне значення якого вважається заданим. Якість процесу керування оцінюється функціоналом

$$I = S[x(T), T] + \int_{t_0}^{T} \phi(t, x, u)dt, \qquad (2)$$

де задані функції S і ϕ мають неперервні частинні похідні по x і u. Вважаємо, що обмеження на вектори стану і керування враховані в процесі вибору вигляду функціонала (2). Потрібно синтезувати закон оптимального керування зі зворотним зв'язком

$$u = u(x,t), \tag{3}$$

який у кожний момент часу t, використовуючи інформацію про поточний стан $x(t)$ рухомого об'єкта, забезпечує досягнення оптимального значення функціоналом (2).

Замкнутий закон оптимального керування (3) реагує на зміну поточного стану рухомого $x(t)$ об'єкта в результаті дії зовнішніх збурень і тому, на відміну від програмного оптимального керування $u(t)$, дозволяє компенсувати дію збурюючих факторів.

Методика синтезу замкнутого закону оптимального керування (3) складається з декількох етапів.

На першому етапі задача оптимального керування (1), (2) методами варіаційного числення або принципом максимуму Понтрягіна зводиться до двоточкової крайової задачі, що у векторно-матричній формі має вигляд [3]

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u), \quad x(t_0) = x_0, \tag{4}$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)'\lambda - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \lambda(T) = \frac{\partial s[x(T),T]}{\partial x(T)}, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)'\lambda + \frac{\partial \phi}{\partial u} = 0, \tag{6}$$

де штрих позначає операцію транспонування. Система $2n$ диференціальних рівнянь (4), (5) з $2n$ граничними умовами описує двоточкову крайову задачу, розв'язок якої визначає n-мірні вектори $x(t)$ і $\lambda(t)$. Рівняння (6) дозволяє знайти m-мірний вектор оптимального керування $u(t)$.

На другому етапі синтезу застосуємо диференціальні перетворення [1, 2] до системи рівнянь (4)–(6). Диференціальні перетворення часової функції $x(t)$ в довільній точці t_0 описуються виразами

$$X(K,t_0) = \frac{H^K}{K!}\left[\frac{d^K x(t_0+\tau)}{d\tau^K}\right]_{\tau=0}, \tag{7}$$

$$x(t_0+\tau) = \sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{\tau}{H}\right)^K X(K,t_0), \tag{8}$$

де $X(K,t_0)$ — дискретна функція цілочисельного аргументу $K = 0, 1, 2, 3, \ldots$; τ — локальний часовий аргумент, значення якого вибирається в межах $H \ge \tau \ge 0$; H — відрізок часового аргументу, на якому розглядається функція $x(t_0+\tau)$, довжина відрізка H повинна бути менше радіуса збіжності ряду Тейлора в околі точки t_0.

Вираз (7) визначає перетворення часової функції $x(t_0+\tau)$ в диференціальний спектр $X(K,t_0)$, що для кожного цілочисельного значення $K = 0, 1, 2, 3, \ldots$ називаються дискретами.

Перехід від диференціального спектра $X(K,t_0)$ до часової функції $x(t_0+\tau)$ здійснюється оберненими диференціальними перетвореннями (8) у виді ряду Тейлора.

Математична модель двоточковій крайовій задачі (4)–(6) диференціальними перетвореннями (7) переводиться в область зображень у формі рекурентних виразів:

$$X(K+1,t_0) = \frac{H}{K+1}F[\Theta(K,t_0),X(K,t_0),U(K,t_0)], \tag{9}$$

$$\Lambda(K+1,t_0) = -\frac{H}{K+1}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)' \times \Lambda(K,t_0) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\right], \tag{10}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)' \times \Lambda(K,t_0) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = 0, \tag{11}$$

де F – зображення функції f, $\Theta(K,t_0)$ – зображення часового аргументу $t=t_0+\tau$, риска знизу є символом диференціальних перетворень (7), а символ $\times$ позначає виконання операції множення в області зображень. Рекурентні вирази (9)–(11) дозволяють, послідовно задаючи значення цілочисельному аргументу $K=0,1,2,3,\dots$, визначити в області зображень диференціальні спектри векторів $X(K,t_0)$, $\Lambda(K,t_0)$ і $U(K,t_0)$, якщо задані вектори нульових дискрет

$$X(0)=x(t_0)=x_0;\ \Lambda(0)=\lambda(t_0)=\lambda_0;\ U(0)=u(t_0)=u_0. \tag{12}$$

Виконуючи за рекурентними виразами (9)–(11) обчислення в аналітичному вигляді від символьних заданих початкових умов (12), отримаємо диференціальні спектри у вигляді

$$X(K,t_0,x_0,\lambda_0,u_0);\ \Lambda(K,t_0,x_0,\lambda_0,u_0);\ U(K,t_0,x_0,\lambda_0,u_0),\ K=0,1,2,3,\dots \tag{13}$$

На основі обернених перетворень (8) при $t=H=T$ і граничних умовах (5) знайдемо систему n рівнянь для визначення початкового вектора λ_0:

$$\sum_{K=0}^{\infty}\Lambda(K,t_0,x_0,\lambda_0,u_0)=\frac{\partial s[x(T),T]}{\partial x(T)}. \tag{14}$$

Система n-рівнянь, записана у векторній формі (14), разом із системою m-рівнянь (6) дозволяє знайти невідомий вектор оптимального керування в довільний момент часу t_0 у формі замкнутого зворотним зв'язком закону (3).

Таким чином, на третьому етапі синтезу необхідно розв'язати систему скінчених рівнянь (6) і (14) щодо вектора керування $U(t_0,x_0)$. Оскільки момент часу t_0 був обраний довільно $t_0=t$ в інтервалі $T\ge t\ge 0$, то обираючи крок $H=T-t$, розв'язки системи скінчених рівнянь (6), (14) у кожен поточний момент часу t будуть визначати закон керування зі зворотним зв'язком у формі (3).

В окремих випадках із системи скінчених рівнянь (6), (14) вдається виключити вектор допоміжних змінних λ_0 і аналітично розв'язати рівняння відносно вектора оптимального керування у формі (3). У загальному випадку, система скінчених рівнянь (6), (14) розв'язується чисельними методами. Наприклад, методом Ньютона система скінчених рівнянь (6), (14) зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язання яких не викликає ускладнень на ЕОМ. Оскільки синтез закону оптимального керування був виконаний на основі необхідних умов оптимальності функціоналів, то отриману систему варто перевірити методами моделювання на ЕОМ відносно оптимальності і стійкості керування рухомим об'єктом.

Методику синтезу замкнутого закону оптимального керування продемонструємо на простому прикладі.

Нехай математична модель задачі оптимального керування містить опис динаміки рухомого об'єкта

$$\frac{dx}{dt}=-ax+u,\ x(0)=x_0, \tag{15}$$

і функціонал, що мінімізується, вигляду

$$I=\frac{1}{2}\int_0^T\left(x^2+u^2\right)dt. \tag{16}$$

На заданому інтервалі часу $t\in[0,T]$ потрібно синтезувати закон оптимального керування вигляду (3), що мінімізує функціонал (16).

Двоточкова крайова задача (4)-(6) для математичної моделі (15), (16) має вигляд:

$$\frac{dx}{dt}=-ax+u,\ x(0)=x_0, \tag{17}$$

$$\frac{d\lambda}{dt}=a\lambda-x,\ \lambda(T)=0, \tag{18}$$

$$u+\lambda=0. \tag{19}$$

Переведемо математичну модель (17)–(19) диференціальними перетвореннями (7) в область зображень:

$$X(K+1)=-\frac{H}{K+1}[aX(K)-U(K)], \tag{20}$$

$$\Lambda(K+1)=\frac{H}{K+1}\left[a\Lambda(K)-X(K)\right], \tag{21}$$

$$U(K)=-\Lambda(K), \tag{22}$$

$$X(0)=x_0,\ \Lambda(0)=\lambda_0,\ U(0)=u_0=-\lambda_0 \tag{23}$$

Послідовно задаючи цілочисельному аргументу K значення $0, 1, 2, \ldots$ від символьно заданих початкових умов (23) за рекурентними формулами (20)–(22) обчислимо диференціальні спектри:

$$X(0)=x_0,\ X(1)=-H(ax_0+\lambda_0),\ X(2)=\frac{H^2}{2}\left(a^2+1\right)x_0,\ \ldots$$
$$\Lambda(0)=\lambda_0,\ \Lambda(1)=H(a\lambda_0-x_0),\ \Lambda(2)=\frac{H^2}{2}\left(a^2+1\right)\lambda_0,\ \ldots. \tag{24}$$

Підставляючи диференціальний спектр (24) у вираз (14), отримаємо рівняння для визначення допоміжної змінної λ_0:

$$\lambda_0+H(a\lambda_0-x_0)+\frac{H^2}{2}\left(a^2+1\right)\lambda_0=0. \tag{25}$$

Рівняння (25) є наближеним, тому що підсумовування дискрет у виразі (14) обмежено значенням $K=2$.

З рівняння (25) отримаємо:

$$\lambda_0=\frac{H}{1+aH+\left(a^2+1\right)\frac{H^2}{2}}x_0. \tag{26}$$

Підставляючи (26) у рівняння (19), маємо:

$$u_0=-\lambda_0=-\frac{H}{1+aH+\left(a^2+1\right)\frac{H^2}{2}}x_0. \tag{27}$$

Закон керування (27) отриманий для довільних початкових умов (23). Тому, поклавши $t=t_0$, $H=T-t$, вираз (27) представимо у формі (3) замкнутого закону керування зі зворотним зв'язком:

$$u[t,x(t)]=-\frac{T-t}{1+a(T-t)+\frac{1}{2}\left(a^2+1\right)(T-t)^2}x(t). \tag{28}$$

Закон керування (28) є квазіоптимальним, тому що для його синтезу використовувалося наближене рівняння (25). Для отримання необхідної точності варто збільшити кількість дискрет диференціального спектра, що враховуються у виразі (14).

У висновку відзначимо переваги і недоліки запропонованого методу синтезу замкнутих законів оптимального керування на основі диференціальних перетворень. У порівнянні з методами динамічного програмування запропонований метод замість чисельного розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних вимагає розв'язання системи $m+n$ скінчених рівнянь, де m — розмірність вектора керування, n — розмірність вектора стану. У тих випадках, коли систему скінчених рівнянь вдається розв'язати аналітично у формі закону оптимального керування зі зворотним зв'язком (3), обчислювальна реалізація оптимального керування на ЕОМ стає найбільш простою в сенсі обсягу обчислень і не пред'являє високих вимог до продуктивності й обсягу пам'яті бортових ЕОМ рухомих об'єктів.

Недоліком запропонованого методу є необхідність перевірки оптимальності і стійкості синтезованого закону керування зі зворотним зв'язком. Цей недолік може бути усунутий попереднім відпрацьовуванням синтезованих законів керування на наземних моделюючих комплексах чи ЕОМ. Після відпрацьовування на ЕОМ чи наземних моделюючих комплексах синтезований закон оптимального керування може бути реалізований у бортових ЕОМ і в системах автоматичного керування рухомих об'єктів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Пухов Г.Е.* Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. – Киев: Наукова думка, 1988. – 216 с.

2. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. — Киев: Наукова думка, 1990. – 184 с.
3. Брайсон А.Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. – М.: Мир, 1972. – 544 с.

АЛМАЗОВ Сергій Леонідович — магістрант, інженер Українського науково-дослідного інституту радіоапаратури м. Києва.
Наукові інтереси:
– моделювання;
– оптимізація;
– управління;
— диференціальні перетворення.
Тел.: (044)544-3740.
E-mail: ukrniira@ln.ua

БАРАНОВ Володимир Леонідович — доктор технічних наук, провідний науковий співробітник Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України м. Києва.
Наукові інтереси:
– моделювання;
– оптимізація;
– управління;
— диференціальні перетворення.

БАРАНОВ Георгій Леонідович — доктор технічних наук, заступник директора Центрального науково-дослідного інституту навігації і управління м. Києва.
Наукові інтереси:
– моделювання;
– оптимізація;
– управління;
– диференціальні перетворення.

Подано 5.09.2002