

В.Б. Мокін, к.т.н., доц.  
 Інститут магістратури, аспірантури та докторантури  
 Вінницького державного технічного університету

### СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ЗАКОНУ УПРАВЛІННЯ СКИДАМИ СТІЧНИХ ВОД ДО РІЧКИ В РАЗІ ЇЇ АВАРІЙНОГО ЗАБРУДНЕННЯ ЗА ПРИНЦИПОМ “РІВНИХ МОЖЛИВОСТЕЙ”

Розглянуто задачу синтезу оптимального закону управління скидами стічних вод до річки за умов надзвичайної ситуації, пов'язаної із непередбачуваним забрудненням річкової води вище за течією від ділянки річки, що розглядається, або на самій ділянці. Синтезований алгоритм дозволяє розрахувати нові нормативи на ГДС джерел забруднення річкових вод, які забезпечують нормативну якість води в заданому створі, даючи можливість працювати, хоча й, як правило, в меншому обсязі, підприємствам-джерелам стічних вод і далі без аварійної зупинки. Управління здійснюється за принципом “рівних можливостей”, коли кожне підприємство скидає однаковий відсоток стічних вод від власних потреб. Описано авторський пакет програм “ЕкоКерування”, в якому реалізовано розроблений алгоритм синтезу оптимального закону управління. Наведено приклад розв'язання задачі за допомогою цього пакету програм.

#### 1. Вихідні передумови. Постановка задачі

Річки здавна виконують роль приймачів стічних вод. Як правило, на джерелах забруднення (підприємствах, фермах тощо) встановлюють очисні споруди, котрі очищають стічні води до нормативного стану. Відомо, що якщо  $N$  джерел забруднення скидають до річки однотипні забруднення, тоді їх “пайові” внески визначаються умовою [1, 2]:

$$\sum_{i=1}^N \frac{U_i}{X^*} \leq 1, \quad U_i = u_i q_i, \quad X^* = x^* \cdot Q^*, \quad (1)$$

де  $U_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) – обсяг забруднення, який дозволено скидати  $i$ -ому джерелу забруднення – добуток значення концентрації речовини  $u_i$  в стічних водах на витрати цих вод  $q_i$ ;  $X^*$  – задана якість води в річці – добуток гранично допустимої концентрації (ГДК) речовини  $x^*$  на витрати води  $Q^*$ .

Враховуємо в (1) те, що джерела забруднення скидають стічні води в різні створи річки, а також ненульове фонове забруднення води  $X_0$  та дію процесів самоочищення річки на ці стічні води:

$$\frac{X_0 M(0)}{X^*} + \sum_{i=1}^N \frac{U_i M(i)}{X^*} \leq 1, \quad (2)$$

де  $M(i)$  – математична модель, що визначає, який відсоток забруднення стічних вод, скинутих в  $i$ -ому створі, дійшов до створу, в якому перевіряється виконання умови (2) [3].

Фактично, співвідношення (2) задає квоту  $a$  на максимально допустимий сумарний скид стічних вод до річки:

$$a = X^* - X_0 M(0) - \sum_{i=1}^N U_i M(i). \quad (3)$$

Скиди стічних вод до річки регламентуються величиною ГДС (“гранично допустимий скид”), яка в якості фонового враховує тільки певне середньостатистичне природне забруднення річки [1]. У разі ж аварійного забруднення постає задача розробки нових ГДС відповідно до нового закону оптимального управління якістю річкової води. Оскільки швидко покращити якість стічних вод не можна, треба управляти їх витратами, дозволяючи джерелу забруднення не максимальні витрати  $q_i^*$ , а, можливо, менші –  $q_i$ .

В роботі [2] задача розв'язана для випадку, коли джерелам забруднення з більшими  $q_i^*$  дозволяються значно більші  $q_i$ . Якщо ж джерела забруднення, що розглядаються, мають однаковий порядок величини  $q_i^*$ , тоді управління слід проводити за принципом “рівних

можливостей”, коли усі  $q_i$  є однаковим відсотком від  $q_1^*$ .

Поставимо задачу: “Знайти такі значення витрат  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) стічних вод, які задовольнили б співвідношенням

$$\frac{q_1}{q_1^*} = \frac{q_i}{q_i^*}, \quad i = \overline{2, N}, \quad (4)$$

з урахуванням обмежень фізичного характеру у вигляді нерівностей

$$\sum_{i=1}^N q_i \leq a, \quad q_i^* \geq q_i \geq 0, \quad q_i^* \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N q_i^* \geq a \geq 0 \quad (5)$$

і, в той же час, забезпечили б максимум лінійному критерію оптимізації

$$J_L = \sum_{i=1}^N q_i. \quad (6)$$

## 2. Розв’язання задачі

Співвідношення для розв’язання задачі зручно сформулювати у вигляді теореми.

**Теорема 1.** Оптимальними значеннями  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), які задовольняють співвідношенням (4), обмеженням (5) з урахуванням (3), та забезпечують максимум критерію (6), є такі:

$$q_i = \frac{aq_i^*}{\sum_{j=1}^N q_j^*}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

Доведення.

Виразимо з (4)  $q_i$  ( $i = 2, 3, \dots, N$ ) через  $q_1$

$$q_i = \frac{q_1 q_i^*}{q_1^*}, \quad i = \overline{2, N}. \quad (8)$$

З порівняння функціоналу (6) з першим з обмежень (5) видно, що максимумом критерію управління (6) є значення  $J = a$ . Отже для пошуку оптимальних значень  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), які задовольняють співвідношенням (4), першому з обмежень (5) та забезпечують максимум критерію (6), треба підставити вирази (8) в таке рівняння (див. (6)):

$$q_1 + q_2 + \dots + q_i + \dots + q_N = a, \quad (9)$$

тобто

$$q_1 + \frac{q_1 q_2^*}{q_1^*} + \dots + \frac{q_1 q_i^*}{q_1^*} + \dots + \frac{q_1 q_N^*}{q_1^*} = a \quad (10)$$

або

$$q_1 \frac{q_1^* + q_2^* + \dots + q_i^* + \dots + q_N^*}{q_1^*} = a, \quad (11)$$

звідки

$$q_1 = \frac{aq_1^*}{\sum_{j=1}^N q_j^*}. \quad (12)$$

Підставляємо (12) в (8):

$$q_i = \frac{\frac{aq_1^*}{\sum_{j=1}^N q_j^*} q_i^*}{q_1^*} = \frac{aq_i^*}{\sum_{j=1}^N q_j^*}, \quad i = \overline{2, N}. \quad (13)$$

Легко бачити, що формула (12) ідентична формулі (7) у випадку  $i = 1$ , а формула (13) – у випадку  $i = 2, 3, \dots, N$ . Тепер перевіримо виконання виразом (7) інших обмежень (5), окрім першого.

Фактично, третє та четверте обмеження (5) є додатковими умовами задачі.

Якщо виконуються третя умова та права частина четвертої:

$$q_i^* \geq 0, \quad a \geq 0, \tag{14}$$

тоді, як випливає з (7), є справедливою і умова  $q_i \geq 0$ , тобто виконується права частина другої нерівності (5).

Доведемо виконання лівої частини другої нерівності (5). Із (7) зрозуміло, що  $q_i$  буде тим більшим, чим більшим буде значення  $a$ . А як випливає з четвертого обмеження (5), максимальним значенням квоти  $a$  може бути  $a = \sum_{i=1}^N q_i^* = \sum_{j=1}^N q_j^*$ . Підставимо це значення в (7):

$$q_i = \frac{q_i^* \sum_{j=1}^N q_j^*}{\sum_{j=1}^N q_j^*} = q_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{15}$$

тобто друге обмеження не порушується.

Отже, використання для обчислень оптимальних значень  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) формули (7) дійсно задовольняє співвідношенням (4), забезпечує максимум критерію (6), не порушуючи обмежень (5) з урахуванням виразу (3). Теорема доведена.

За реальних умов застосування закону управління (7) з'являється нова проблема – оскільки невідомими є витрати стічних вод  $q_i$ , то в кінцевому створі річки, де перевіряється значення  $X^*$ , не можна заздалегідь вказати значення

$$X^* = x^* Q^* = x^* (Q_0 + q_1 + q_2 + \dots + q_N), \tag{16}$$

де  $Q_0$  – витрати річкової води в початковому створі ділянки річки, що розглядається.

Фактично, до розв'язання поставленої задачі можна задати значення не  $X^*$ , а – тільки  $x^*$ . В цьому разі розв'язок задачі знає певних змін.

**Теорема 2.** *Оптимальними значеннями  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), які задовольняють співвідношенням (4), обмеженням (5) з урахуванням виразів (3), (16), та забезпечують максимум критерію (6), є такі:*

$$q_i = \alpha q_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{17}$$

$$\alpha = \frac{(x^* - x_0 M(0)) \cdot Q_0}{(u_i M(i) - x^*) \sum_{i=1}^N q_i^*} = \frac{b}{\sum_{i=1}^N \beta_i q_i^*}. \tag{18}$$

Доведення.

Для розв'язання поставленої задачі пропонується шукати, який відсоток  $\alpha$  потреб джерел забруднення на скид стічних вод  $q_i^*$  може забезпечити виконання умови (2). Підставивши  $U_i = u_i q_i = u_i \alpha q_i^*$  в (2) можна записати

$$\alpha \sum_{i=1}^N u_i q_i^* M(i) \leq X^* - X_0 M(0). \tag{19}$$

Зрозуміло, що максимум критерію (6) забезпечується у разі, якщо ліва частина нерівності (16) (сумарний скид стічних вод) дорівнює правій (квота на скид стічних вод). З урахуванням цього, підставляючи (16) в (19), отримуємо

$$\alpha = \frac{(x^* - x_0 M(0)) \cdot Q_0}{\sum_{i=1}^N u_i q_i^* M(i) - x^* \sum_{i=1}^N q_i^*} = \frac{(x^* - x_0 M(0)) \cdot Q_0}{(u_i M(i) - x^*) \sum_{i=1}^N q_i^*} = \frac{b}{\sum_{i=1}^N \beta_i q_i^*}. \tag{20}$$

Теорема доведена.

Як видно з виразів (7) та (17), (18), перехід від фіксації змінної  $X^*$  до  $x^*$  спричинив появу у виразі розв'язку коефіцієнта  $\beta_i$  та заміну квоти  $a$  на  $b$ .

**3. Програмна реалізація розробленого математичного забезпечення.**

**Приклад розв'язання задачі**

В ліцензійному середовищі Delphi 5.0 спільно зі студентом ВДТУ Катасоновим А. І.

розроблено пакет програм «ЕкоКерування», який дозволяє за даними екомоніторинга синтезувати оптимальні значення  $q_i$  за законом управління (11), (12).

На рис. 1 приведено схему ділянки деякої річки та джерел її забруднення.

Джерелами забруднення ділянки річки на рис. 1 є “Вхід 1”, що скидає стічні води у річку на відстані 5820 м від початкового створу ділянки, яка розглядається, та “Вхід 2”, що скидає стічні води на відстані 11535 м.

Меню програми (див. рис. 1) має такі складові [3]:

- “Файл” – операції роботи з проектом (створення нового, а також зберігання та завантаження проекту, тобто схеми річкової ділянки та ідентифікованих структури і параметрів моделі процесів річкового самоочищення), вихід з програми;

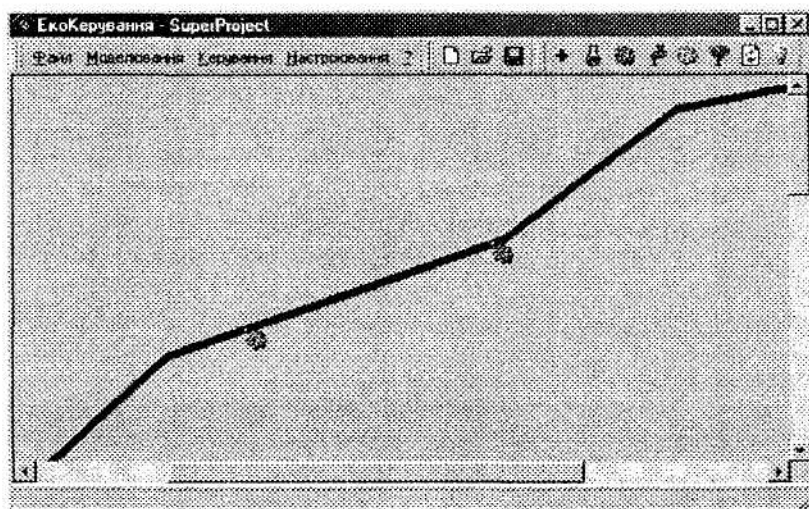


Рис. 1. Схема ділянки річки та джерел її забруднення

- “Моделювання” – здійснення ідентифікації параметрів математичної моделі, проведення моделювання на основі цієї моделі як по всій ділянці в цілому, так і в будь-якій заданій точці, прогнозування наслідків від можливого нового забруднення в річковій системі, знаходження координат та об’ємів незареєстрованих входів, відображення та редагування схеми та структури річкової системи;

- “Керування” – введення обмежень на змінні управління та безпосередньо синтез закону керування;

- “Настроювання” – зміна параметрів відображення річкової ділянки (розміри робочої області, товщину лінії річки, позначки об’єктів тощо), розрахункових алгоритмів (точність обчислень та кількість ітерацій в розрахунках) та виведення результатів розрахунків (кольори графіків тощо);

- “?” – інформація про саму програму та її авторів.

Програма розраховує закон управління, який забезпечує задану якість води (певне значення показника якості) в заданому річковому створі (задається відстань від початкового створу ділянки річки) за рахунок регулювання обсягів скидів стічних вод з використанням принципу “рівних можливостей” для джерел забруднення.

Для роботи з пакетом програм “ЕкоКерування” є необхідним комп’ютер класу не нижче Celeron або AMD K6 з операційною системою Windows 98 або 2000.

Програма проходить випробування в Держу правлінні екології та природних ресурсів Вінницької області. Може використовуватись і в будь-якій іншій організації чи установі (санітаемістанції, басейнові водогосподарські об’єднання, управління з надзвичайних ситуацій тощо), яка зацікавлена в охороні навколишнього середовища.

На рис. 2 приведено результати розрахунків за теоремою 2 для двох джерел (входів) стічних вод ділянки річки, приведеної на рис. 1.

Квоти для входів				
Квоти				
Назва джерела	Координата	Якість води	Максимальний об'єм скиду	Дозволений об'єм скиду
Вхід 1	5820	150	100	84,7106281084896
Вхід 2	11535	500	50	42,3553140542448

Рис. 2. Розв'язання задачі управління якістю води для випадку двох джерел забруднення

Синтезовані значення змінних управління забезпечують концентрацію заданих хімічних речовин 80 одиниць на відстані 14 км від початку річкової ділянки, яка розглядається. Розрахунки проводяться з урахуванням попередньо ідентифікованих математичних моделей процесів самоочищення, які протікають в річці на даній ділянці, тобто використовується умова (2), а не (1).

Як видно з результатів розрахунку, розроблений закон управління дійсно дозволяє здійснювати скид стічних вод обом підприємствам, але в обсязі  $q_1 = 84,71$  один. з максимально можливих  $q_1^* = 100$  один. та  $q_2 = 42,36$  один. з  $q_2^* = 50$  один.

#### ЛІТЕРАТУРА:

1. Економіка і екологія водних ресурсів Дніпра: Посібник / В.Я. Шевчук, М.В. Гусєв, О.О. Мазуркевич та ін.; За ред. В. Я. Шевчука. – К.: Вища шк., 1996. – 207 с.
2. Мокін В. Б. Синтез оптимальної системи управління скидами стічних вод у річку в разі її аварійного забруднення // Вісник ВПІ. – Вінниця: ВДТУ, 2002. – № 2. – С. 36–41.
3. Розробка моделей та законів управління якістю річкової води. Розробка інструментальних програмних засобів реалізації законів управління якістю річкової води: Звіт про НДР / Б.І. Мокін, В.Б. Мокін / Вінниц. гос. техн. ун-т. – 84-Д-227; № ДР 0202U004181. – К., 2002. – 52 с.

МОКІН Віталій Борисович – кандидат технічних наук, доцент кафедри ЕМСА, директор Інституту магістратури, аспірантури та докторантури Вінницького державного технічного університету, завідувач науково-дослідної лабораторії екологічних досліджень та екологічного моніторингу ВДТУ.

Наукові інтереси:

- моніторинг (одно-, дво- та тривимірне динамічне моделювання, прогнозування) та управління якістю поверхневих вод;
- дослідження якості підземних вод, геоінформаційні екологічні системи.

Тел.: (0432) 44-05-88.

E-mail: [vmekin@vstu.vinnica.ua](mailto:vmekin@vstu.vinnica.ua).

Подано 21.08.2002