

Удосконалення математичної моделі визначення координат космічного апарата наземним радіотехнічним комплексом при однопунктній технології вимірювання в інформаційно-вимірювальній системі

На сьогодні велика кількість завдань вимагає розгляду руху космічних апаратів над площиною місцевого горизонту наземного радіотехнічного комплексу. Актуальними є завдання, в основі яких лежить розробка моделей, завдяки яким у будь-який момент часу можна визначити місце положення космічного апарата відносно наземного радіотехнічного комплексу. Ці моделі прийнято називати моделями прогнозу. Вони необхідні під час дослідження процесу супроводу космічних апаратів наземним радіотехнічним комплексом, а також при аналізі різних варіантів технічних рішень на етапах проектування наземних радіотехнічних комплексів. У цьому разі будемо говорити, що йдеться про дослідницькі математичні моделі. Моделі, які використовуються за такого типу досліджень, можна поділити на дві категорії. Моделі першої категорії назвемо розгорнутими, а другої – спрощеними. Розгорнуті моделі можна описати за такою схемою: 1) опис руху космічного апарата в абсолютній системі координат тією чи іншою мірою враховує збурюючі сили, що впливають на тіло; 2) перехід до опису руху в системі координат, пов'язаної зі спостерігачем на поверхні Землі (перехід виконується з урахуванням обертання Землі, тимчасових прив'язок і прив'язки наземного радіотехнічного комплексу на місцевості).

Ключові слова: інформаційно-вимірювальна система; однопунктна технологія вимірювання; космічний апарат; розгорнута модель; спрощена модель.

Актуальність теми. Дослідження, які проводяться для прогнозування місцезнаходження космічного апарата в будь-який момент часу відносно наземного радіотехнічного комплексу, здійснюється тільки на основі розширених моделей. На даний момент розроблені детальні моделі, які досить повно враховують збурюючі сили, що впливають на космічні апарати, і при забезпеченні відповідної точності тимчасових прив'язок і прив'язки наземного радіотехнічного комплексу на місцевості дають можливість здійснити прогноз з необхідною для практичних цілей точністю.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, на які спираються автори. Методи вимірювання координат та супроводження космічних апаратів за допомогою математичних моделей з однопунктною інформаційно-вимірювальною системою розглянуто у роботах [1–6].

Метою статті є розробка моделі, завдяки якій у будь-який момент часу можна визначити місце положення космічного апарата відносно наземного радіотехнічного комплексу, а також для аналізу різних варіантів технічних рішень на етапах проектування інформаційно-вимірювальних систем наземних радіотехнічних комплексів.

Викладення основного матеріалу. Зауважимо, що при реалізації програмного або комбінованого наведення наземних радіотехнічних комплексів математичні моделі, які при цьому використовуються, поступаються за точністю найбільш повним з розроблених на сучасному етапі (це пов'язано з обмеженням часу, що відводиться на прогноз, і при відповідному виборі періоду, по закінченню якого вносяться поправки до вихідних даних для прогнозу). Розширені моделі широко використовуються і з дослідницькою метою. Найважливіше практичне застосування цих моделей полягає в тому, що вони слугують деяким еталоном при оцінці похибок менш точних моделей.

Спрощеними моделями будемо вважати ті моделі, які не дають можливості прогнозувати, хоча б з найгіршою точністю, напрямком з конкретного радіотехнічного комплексу на конкретний космічний апарат. Вони дозволяють моделювати напрямки на космічний апарат з деякого абстрактного радіотехнічного комплексу, для якого положення на поверхні Землі може бути вибрано будь-яким (задається щодо площини руху космічного апарату). У цих моделях в основі опису руху космічного апарату – Кеплерова модель, обертання Землі не враховується. Спрощені моделі можуть застосовуватися при вирішенні дослідницьких завдань або завдань аналізу різних варіантів проектних рішень.

Спрощені моделі використовуються, коли потрібно провести аналітичне дослідження кінематики супроводу космічного апарата наземним радіотехнічним комплексом на основі розширених моделей [1]. Отже, призначення спрощених моделей, по-перше, в тому, щоб дати легкодоступні для огляду функціональні залежності кутових величин, що визначають напрямком на космічний апарат від значень параметрів, які задають траєкторію його руху і розташування наземного радіотехнічного комплексу щодо

цієї траєкторії. По-друге, ці моделі дають можливість істотно скоротити час на проведення аналізу, наприклад, на знаходження оцінок для ряду характеристик, що особливо актуально на етапі розгляду різних варіантів проектних рішень. До «спрощених» моделей належать, наприклад, математичні моделі, представлені в [2] та ін.

Кожна з цих моделей заснована на описі зміни в часі положення космічного апарата, отже, напрямком на цей космічний апарат описується як функція часу. Ці моделі досить наочні, зручні для проведення аналітичних досліджень і оцінки основних характеристик. Спрощена модель є універсальною, тобто дозволяє описати загальні властивості для будь-якого інтервалу видимості космічного апарата, і при варіації ряду параметрів проаналізувати інтервали видимості. У цієї математичної моделі зміна положення космічного апарата описується не як функція часу, а як функція деякого універсального параметра, який протягом будь-якого інтервалу видимості космічного апарата змінює своє значення однаковим чином (від 0 до 180°). В основі цих математичних моделей лежить підхід, заснований на тому, що в русі космічного апарата відносно точки розташування наземного радіотехнічного комплексу можна виокремити дві складові. По-перше, це зміна ділянки траєкторії, видимої з радіотехнічного комплексу, а також зміна розташування цієї ділянки відносно точки місцезнаходження радіотехнічного комплексу, по-друге, рух космічного апарата по видимій ділянці траєкторії. Основне призначення спрощеної математичної моделі: не враховуючи обертання Землі, розглянути варіанти видимих ділянок траєкторії і їх розташування відносно наземного радіотехнічного комплексу, і для кожного з таких інтервалів промодельювати напрямком на космічний апарат як функцію запропонованого універсального параметра, який на кожному інтервалі проходить одні й ті самі значення.

У такому разі розглянемо математичну модель [3–5]. Нехай S космічний апарат, який рухається по кеплеровій орбіті. Параметри орбіти: висота перигею h_p , ексцентриситет e , нахил орбіти i , довгота висхідного вузла Ω , аргумент перигею ω . Направлення на космічний апарат визначається значеннями азимута A і кута місця γ . Назвемо кульмінаційною ту з точок, в якій радіус-вектор, що задає положення космічного апарата, перпендикулярний лінії перетину площини орбіти і площини місцевого горизонту – пряма $l_1 l_2$ (S_c на рис. 1–3).

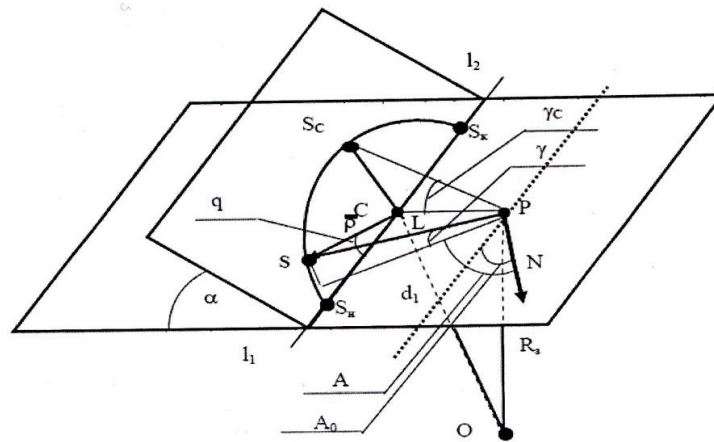


Рис. 1. Ділянка орбіти, яка видна з наземного радіотехнічного комплексу

Взаємне положення площини орбіти і площини місцевого горизонту задамо кутом α між цими площинами. Пряма $l_1 l_2$ ділить площину місцевого горизонту на дві півплощини. Кут α відкладається від тієї півплощини, якій не належить точка розташування радіотехнічного комплексу P . Видиму ділянку кеплерівської траєкторії космічного апарата для миттєвого положення наземного радіотехнічного комплексу на нерухомій земній сфері може бути однозначно визначено двома величинами – значенням істинної аномалії Θ_c (рис. 4), відповідним положенням космічного апарата на орбіті в кульмінаційній точці, і кутом α (рис. 3). Значення Θ_c задає в площині орбіти орієнтацію прямої $l_1 l_2$, відтїнає видиму ділянку траєкторії, а кут α визначає відстань $d = \frac{R}{\sin \alpha}$ від центра Землі до прямої (в цьому випадку R – радіус Землі).

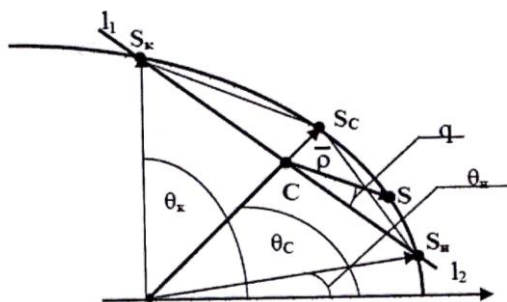


Рис. 2. Вигляд розрізу орбіти

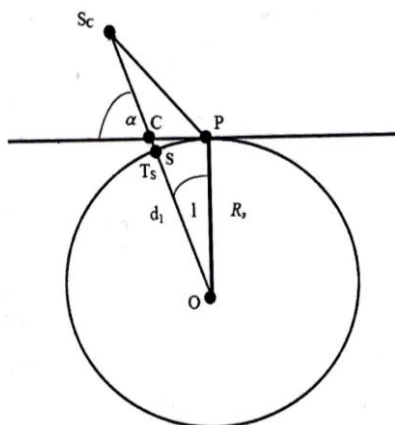


Рис. 3. Напрямок з наземного радіотехнічного комплексу

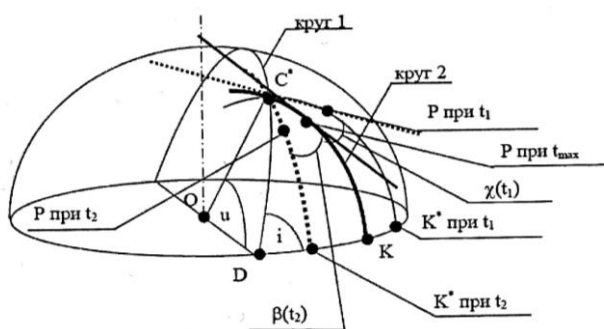


Рис. 4. Зміна положень спостерігача в точці P відносно точки C, яка відповідає підсупутниковій у момент часу t_{max}

Множина ділянок орбіти космічного апарата S_n , які видимі з наземного радіотехнічного комплексу, на заданій території визначаються парами можливих значень θ_c і α . При цьому $\theta_c \in [\theta_1, \theta_2] \cup [\theta_3, \theta_4]$, де

$$\theta_1 = -\omega + \arcsin \frac{\sin \varphi_{\Gamma_{min}}}{\sin i},$$

$$\theta_2 = -\omega + \arcsin \frac{\sin \varphi_{\Gamma_{max}}}{\sin i},$$

$$\theta_3 = -\omega + \pi - \arcsin \frac{\sin \varphi_{\Gamma_{max}}}{\sin i},$$

$$\theta_4 = -\omega + \pi - \arcsin \frac{\sin \varphi_{\Gamma_{min}}}{\sin i},$$

а $\varphi_{\Gamma_{\max}}$ і $\varphi_{\Gamma_{\min}}$ – максимальне і мінімальне значення географічної широти території передбачуваного місцезнаходження наземного радіотехнічного комплексу. Область значень α при конкретному значенні θ_c визначається таким чином:

$$\alpha(\theta_c) \in \left[\alpha_{\min}(\theta_c), \frac{\pi}{2} \right],$$

де $\alpha_{\min}(\theta_c) = \arcsin \frac{R}{r(\theta_c)}$;

$r(\theta_c)$ – радіус-вектор, що задає положення космічного апарата на орбіті за істинної аномалії, яка дорівнює θ_c .

Положення космічного апарата в площині орбіти на інтервалі видимості запропоновано задавати вектором \vec{P} , початок якого збігається з основою перпендикуляра з наземного радіотехнічного комплексу на лінію перетину площини орбіти з площиною місцевого горизонту (точка C на рисунку 3), а кінець з точкою місцезнаходження космічного апарата (на рисунках 3–4 це точка S). Напрямок вектора задає кут q , який відкладається в площині орбіти від прямої $l_1 l_2$ по ходу руху космічного апарата. На будь-якому інтервалі видимості значення q послідовно змінюється від 0 до 180 градусів. Значення істинної аномалії θ , модуль радіус-вектора космічного апарата \bar{r} , радіус-вектор $\bar{\rho}$ визначені як функції кута q . Азимут і кут місця з урахуванням значень α , θ_c , $\theta(q)$, $r(q)$, $\rho(q)$ також визначені як функції кута. Рівняння для розрахунку азимута і кута місця представлені нижче:

$$\theta(q) = \theta_c + z\theta_d(q), \quad (1)$$

де

$$z = \begin{cases} -1 & \text{при } q \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{при } q > \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad \theta_d(q) = 2 \arctg \left[\frac{-b}{c-a} + \sqrt{\left(\frac{-b}{c-a}\right)^2 - \frac{c+a}{c-a}} \right], \quad (2)$$

де $a = \frac{\cos q}{d_1} - \frac{e \cos \theta_c \cos q}{p}$, $b = \left(\frac{\sin q}{d_1} + \frac{e \cos q \sin \theta_c}{p} \right) z$, $c = \frac{-\cos q}{p}$, а $p = (1+e)(R+h_p)$ – фокальний параметр.

$$r(q) = \frac{p}{1 + e \cos \theta(q)}, \quad (3)$$

$$\rho(q) = -d_1 \sin q + \sqrt{r(q)^2 - d_1^2 \cos^2 q}, \quad (4)$$

$$A(q) = A_0 + \arctg \frac{d + \rho(q) \sin q \cos \alpha}{\rho(q) \cos q} + D, \quad (5)$$

$$\gamma(q) = \arctg \frac{\rho(q) \sin q \sin \alpha}{\sqrt{\rho(q)^2 \cos^2 q + (d + \rho(q) \sin q \cos \alpha)^2}}, \quad (6)$$

де $D = \begin{cases} 0 & \text{при } q \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi & \text{при } q > \frac{\pi}{2} \end{cases}$, $d = R \operatorname{ctg}(\alpha)$;

A_0 – кут між напрямком на північ і променем, який виходить з точки розташування наземного радіотехнічного комплексу та співнаправлений з променем, який виходить з точки C і проходить через точку S , початку видимої ділянки орбіти космічний апарат. Таким чином, кут A_0 задає орієнтацію прямої $l_1 l_2$ в площині місцевого горизонту.

Проте спрощена модель дає похибки, які вносять нехтування обертянням Землі [6, 7]. Тому побудуємо удосконалену математичну моделі визначення місця розташування космічного апарата на орбіті наземним радіотехнічним комплексом, яка відрізняється від спрощеної тим, що вона буде враховувати кінематику обертання Землі і дозволить істотно поліпшити точність існуючих моделей кінематичної схеми відстеження космічного апарата наземним радіотехнічним комплексом при однопунктній технології управління. Для цього розглянемо Земну сферу. У момент часу, коли на інтервалі видимості кут місця

досягає кульмінаційного значення (назвемо цей момент часу кульмінаційним і позначимо t_{\max}), точка розташування наземного радіотехнічного комплексу P знаходиться на великому колі 1, площина якого перпендикулярна площині орбіти (рис. 4).

Точка C^* лежить на перетині кола 1 з великим колом 2, площина якого збігається з площиною руху космічного апарата. Точка P знаходиться від точки C^* по одну або іншу сторону великого кола 2 на відстані дуги $l = \pi/2 - \alpha$. Точки C^* і C розташовані на прямій (рис. 4), якій належить радіус-вектор, що задає положення орбітального тіла в момент часу t_{\max} (у запропонованій моделі це $q = \pi/2$).

Велике коло 1 перетинає площину екватора в точці K . Розглянемо дугу C^*K . Будемо вважати, що один її кінець закріплений в точці C^* , а інший – робить рух внаслідок обертання Землі. Отже, в довільний момент часу інтервал видимості, відмінний від кульмінаційного моменту часу t_{\max} , а рухомий кінець розглянутої дуги знаходиться в деякій точці K^* (можливі варіанти розташувань представлені для моментів часу t_1 і t_2 не збігаються з моментом t_{\max} , показані на рис.4). Прийmemo, що шуканий кут χ дорівнює куту KC^*K^* сферичного трикутника KC^*K^* . Для знаходження кута χ вирішується завдання сферичної тригонометрії, хід рішення якої представлений нижче.

1. Розглядається прямокутний сферичний трикутник DC^*K , у якого кут C^*DK дорівнює нахилу орбіти i , а сторона DC^* у випадку визначається таким чином:

$$|DC^*| = |\arctg(u)|, \text{ де } u = \theta_c - \omega.$$

Користуючись цими даними, знаходимо сторони C^*K і DK трикутника DC^*K :

$$C^*K = \arcsin(\sin(DC^*)\text{tg}(i)), \quad DK = \arcsin\left(\frac{\sin(C^*K)}{\sin(i)}\right).$$

2. Розглядається сферичний трикутник DC^*K . Сторона сферичного трикутника DK^* дорівнює $DK^* = DK \pm KK^*$, де знак «+» або «-» залежить від положення наземного радіотехнічного комплексу. Величина дуги KK^* – дорівнює куту ΔL , на який повернулася Земля від моменту часу t_{\max} до поточного моменту часу t . Щоб виразити кут ΔL як функцію кута q , використовуємо те, що справжня аномалія визначена в запропонованій моделі як функція кута q , тобто

$$\theta(q) = \theta_c + z\theta_d(q), \quad (7)$$

де

$$z = \begin{cases} -1 & \text{при } q \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{при } q > \frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad \theta_d(q) = 2\arctg\left[\frac{-b}{c-a} + \sqrt{\left(\frac{-b}{c-a}\right)^2 - \frac{c+a}{c-a}}\right], \quad (8)$$

де

$$a = \frac{\cos q}{d_1} - \frac{e \cos \theta_c \cos q}{p}, \quad b = \left(\frac{\sin q}{d_1} + \frac{e \cos q \sin \theta_c}{p}\right)z, \quad c = \frac{-\cos q}{p},$$

а $p = (1+e)(R+h_p)$ – фокальний параметр.

Через значення істинної аномалії $\theta(q)$ визначаємо значення ексцентричної аномалії $E(q)$, припустивши, що $\tau = 0$

$$E(q) = 2\arctg\left(\text{tg}\left(\frac{\theta(q)}{2}\right)\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\right). \quad (9)$$

З використанням значення $E(q)$ поточний час також визначаємо як функцію кута q .

$$t(q) = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(E(q) - e \sin E(q)),$$

де μ – гравітаційний параметр Землі. Інтервал часу з моменту t_{\max} до поточного моменту часу t відповідає різниці значень між $t(q)$ і $t(q = \pi/2)$, оскільки згідно з запропонованою моделлю $t_{\max} = t(q = \pi/2)$.

Абсолютну величину кута ΔL з урахуванням кутової швидкості обертання Землі ω_3 можна знайти за $\Delta L(q) = \omega_3|t(q) - t(\pi/2)|$,

а кутову величину дуги DK^* – із виразу

$$DK^*(q) = DK \pm z \|\Delta L(q)\|,$$

де z визначається з рівності (2).

3. Для сферичного трикутника DC^*K^* знаходиться величина кута DC^*K^* , позначимо його χ^*

$$\chi^*(q) = \arctg \left(\frac{\sin i}{\frac{\sin(C^*D)}{\operatorname{tg}(DK^*)} - \cos(CD)\cos(i)} \right).$$

4. Значення кута χ можна визначити з використанням значення χ^* на основі такого виразу:

$$\chi(q) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \chi^*(q) & \text{при } q \leq \frac{\pi}{2} \\ \chi^*(q) - \frac{\pi}{2} & \text{при } q > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Отримане значення $\chi(q)$ використовується для уточнення існуючих моделей, які описують рух космічного апарата на орбіті відносно інтервалу видимості наземного радіотехнічного комплексу.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Отже, в результаті проведеної роботи вдалося побудувати два типи математичних моделей: спрощену та вдосконалену. Спрощена модель дає досить хороші результати в діапазоні кутів місця приблизно від 60° до 90° (повний збіг при кутах місця в околиці 90° і найбільша похибка 1° при кутах місця низьких 60°). Крім того, обґрунтовано параметри удосконаленої математичної моделі, точність якої є кращою на порядок від існуючих моделей. При цьому запропонована удосконалена модель зберегла досить високий рівень узагальнення та універсальності. Отже, для розрахунку кутів, які задають напрям на космічний апарат, використовуються ті самі вихідні дані, як і в більшості подібних моделей, тобто параметри кеплерової орбіти, проте азимут і кут місця визначаються як функції універсального параметра Q . Для розрахунку низки характеристик наземного радіотехнічного комплексу при його проектуванні доцільно використовувати дані зазначені моделі.

Список використаної літератури:

1. В'юнник О.В. Математична модель схеми супроводу космічних апаратів наземним радіотехнічним комплексом на базі однопунктової технології управління / О.В. В'юнник // Зв'язок. – К. : ДУТ, 2013. – № 5 (105). – С. 29–31.
2. Тихонов В.І. Метод динамічного керування цифровими потоками в інтегрованій технології телекомунікацій UA-ITT / В.І. Тихонов // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2013. – № 1. – С. 64–71.
3. Хусанінов Д.Я. Введення в моделювання динамічних систем / Д.Я. Хусанінов, І.І. Харченко, А.В. Шатирко. – Київ : Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2010. – 132 с.
4. Стеклов В.К. Оптимізація та моделювання пристроїв і систем зв'язку / В.К. Стеклов, Л.Н. Беркман С.В. Кільчицький. – К. : Техніка, 2004. – 576 с.
5. Наумов О.В. Перспективи розвитку навігаційних засобів / О.В. Наумов // Збірник наукових праць Державного науково-дослідного інституту авіації. – 2011. – № 14. – С. 105–108.
6. Лаврут О.О. Математичне моделювання процесів функціонування фрагменту мобільного компоненту системи зв'язку ЗС України / О.О. Лаврут, Л.М. Блашко // Системи обробки інформації. – 2011. – № 8 (98). – С. 170–174.

References:

1. Viunnik, O.V. (2013), «Matematychna model skhemy suprovodu kosmichnykh aparativ nazemnym radiotekhnichnym kompleksom na bazi odnopunktovoi tekhnologii upravlinnia», *Zviazok*, DUT, K., No. 5 (105), pp. 29–31.
2. Tikhonov, V.I. (2013), «Metod dynamichnoho keruvannia tsyfrovymy potokamy v intehrovanii tekhnologii telekomunikatsii UA-ITT», *Naukovi pratsi ONAZ im. O.S. Popova*, No. 1, pp. 64–71.
3. Khusaninov, D.Ya., Kharchenko, I.I. and Shatyрко, A.V. (2010), *Vvedennia v modeliuвання dynamichnykh system*, Kyivskiy natsionalnyi universytet imeni Tarasa Shevchenka, Kyiv, 132 p.
4. Steklov, V.K., Berkman, L.N. and Kilchyskyi, Ye.V. (2004), «Optimizatsiia ta modeliuвання prystroiv i system zviazku», *Tekhnika*, K., 576 p.
5. Naumov, O.V. (2011), «Perspektyvy rozvytku navihatsiinykh zasobiv», *Zbirnyk naukovykh prats Derzhavnoho naukovo-doslidnoho instytutu aviatsii*, No. 14, pp. 105–108.
6. Lavrut, O.O. and Blazhko, L.M. (2011), «Matematychno modeliuвання protsesiv funktsionuvannia frahmentu mobilnoho komponentu systemy zviazku ZS Ukrainy», *Systemy obrobky informatsii*, No. 8 (98), pp. 170–174.

Шульга Олександр Васильович – доктор технічних наук, доцент, професор кафедри інформаційно-вимірювальних технологій Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»/

Наукові інтереси:

- автоматизовані інформаційно-вимірювальні системи;
- цифрова обробка сигналів і відеозображень;
- метрологія, засоби вимірювання;
- радіотехнічні пристрої та засоби телекомунікацій.

Сокіріна Валерія Олександрівна – аспірантка інформаційно-вимірювальних технологій Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Наукові інтереси:

- автоматизовані інформаційно-вимірювальні системи;
- цифрова обробка сигналів і відеозображень;
- метрологія, засоби вимірювання;
- радіотехнічні пристрої та засоби телекомунікацій.

E-mail: sokirinavaleria@gmail.com.

Shulga O.V., Sokirina V.O.

Improvement of the mathematical model of determining the coordinates of the spacecraft by the terrestrial radio-technical complex with one-point control technology of the information-measuring system.

Today, a large number of tasks require consideration of the movement of spacecraft over the plane of the local horizon of the terrestrial radio engineering complex. The tasks that are based on the development of models are relevant, thanks to which it is possible to determine the position of the spacecraft relative to the terrestrial radio engineering complex at any moment in time. These models are called forecast models. They are necessary in the study of the process of accompanying space vehicles with a ground-based radio-technical complex, as well as in the analysis of various options for technical solutions at the design stages of ground-based radio-technical complexes. In this case, we will say that we are talking about research mathematical models. The models used in this type of research can be divided into two categories. We will call the models of the first category expanded, and the second category simplified. The developed models can be described by the following scheme: 1) the description of the movement of the spacecraft in the absolute coordinate system to one degree or another takes into account the disturbing forces affecting the body; 2) transition to the description of movement in the coordinate system associated with the observer on the surface of the Earth (the transition is performed taking into account the rotation of the Earth, temporary bindings and binding of the terrestrial radio-technical complex on the ground).

Keywords: information and measurement system; one-point measurement technology; spacecraft; expanded model; simplified model.

Стаття надійшла до редакції 17.03.2023.