

О.А. Бертман, Н.І. Бурау, Л.М. Гельман

АНАЛІЗ ПАРАМЕТРІВ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ ОБ'ЄКТА ДЛЯ ДІАГНОСТИКИ ТА ОЦІНЮВАННЯ ВТОМНИХ ТРІЩИН МЕТОДОМ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ

Проведені теоретичні дослідження методу вільних коливань для діагностики та оцінки відносного розміру тріщини нелінійного об'єкта. Отримані нові аналітичні залежності спектральної густини вільних коливань лінійного об'єкта, на основі аналізу яких запропонований вектор діагностичних ознак.

Відомо [3], що наявність дефектів та пошкоджень (наприклад, втомних тріщин) в досліджуваному об'єкті призводить до зміни параметрів його вільних коливань. В результаті таких змін спектральні амплітуди вищих гармонік вільних коливань об'єкта з тріщиною відрізнятимуться від нуля, що може слугувати однією з ознак наявності тріщини [1]. З урахуванням того, що реальні об'єкти діагностики є нелінійними і за відсутності тріщини, метою даної статті є аналіз параметрів вільних коливань нелінійного об'єкта за відсутності та наявності втомної тріщини, а також вибір ознак для діагностики та оцінки її відносного розміру.

Як об'єкт діагностики розглянемо коливальну систему з одним ступенем волі, що складається з інерційного (маса m), пружного та демпфіруючого елементів у припущенні пропорційності сил опору першому ступеню швидкості деформації \dot{x} та нелінійній залежності між напруженою F та деформацією x в матеріалі об'єкта:

$$F(x) = c \cdot x - c_1 \cdot x^3,$$

де c – значення жорсткості матеріалу об'єкта у випадку лінійної характеристики відновлюючої сили; c_1 – мале значення жорсткості, що враховує відхилення характеристики від лінійної; знак «-» обраний з урахуванням розглядання «м'якої» нелінійності.

Вільні коливання нелінійного об'єкта описуються диференціальним рівнянням

$$x + 2hx + \omega^2 x - \mu x^3 = 0, \quad (1)$$

де $\omega^2 = c / m$; $\mu = \omega^2(c_1 / c)$; μ – коефіцієнт, що визначає ступінь нелінійності; h – показник демпфірування.

Для початкових умов $t = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = V_0$ розв'язок рівняння (1) можна представити у вигляді [2]

$$x(t) = A(t) \sin \omega_x t + B(t) \sin 3\omega_x t, \quad (2)$$

де

$$A(t) = \frac{V_0}{\omega_x} e^{-ht} - 3 \cdot B(t); \quad B(t) = \frac{\mu}{32\omega_x^2} \left(\frac{V_0}{\omega_x} \right)^3 \cdot e^{-3ht}; \quad \omega_x^2 = \omega^2 - h^2 - 0,75\mu \left(\frac{V_0}{\omega_x} \right)^2 \cdot e^{-2ht};$$

V_0 – стала швидкість.

Як видно з розв'язку (2), вільні коливання нелінійного об'єкта за відсутності тріщини відрізняються від гармонічних.

За наявності тріщини матеріал об'єкта матиме різні значення жорсткості при розтягу та стиску [1], [3]: при стиску ($x < 0$) матеріал поводить себе як суцільний, і його жорсткість c_c дорівнює жорсткості матеріалу без тріщини – $c_c = c$; при розтягу ($x \geq 0$) жорсткість матеріалу зменшується на величину Δc : $c_s = c - \Delta c$, де c – жорсткість матеріалу без тріщини. Відношення Δc і c вважаємо таким, що дорівнює відношенню довжини тріщини Δl до розміру об'єкта l в напрямку тріщини [3]:

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta l}{l}.$$

З урахуванням введених позначень вільні коливання об'єкта з тріщиною описуються системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x + 2hx + \omega_s^2 x - \mu_s x^3 = 0, & x \geq 0; \\ x + 2hx + \omega_c^2 x - \mu_c x^3 = 0, & x < 0, \end{cases} \quad (3)$$

де

$$\mu_s = \omega_s^2(c_1 / c_s); \quad \mu_c = \omega_c^2(c_1 / c_c); \quad \omega_s^2 = c_s / m; \quad \omega_c^2 = c_c / m.$$

Розв'язок рівнянь (3) для раніше прийнятих початкових умов, наведений до одного періоду вільних коливань об'єкта з тріщиною, має вигляд

$$x(t) = \begin{cases} A_1(t) \sin \omega_1 t + B(t) \sin 3\omega_1 t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_1}; \\ -A_2(t) \sin \omega_2 \left(t - \frac{\pi}{\omega_1}\right) - B_2(t) \sin 3\omega_2 \left(t - \frac{\pi}{\omega_1}\right), & \frac{\pi}{\omega_1} < t < \frac{2\pi}{\omega_0}, \end{cases} \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \frac{V_0}{\omega_1} e^{-ht} - 3B(t); \quad B_1(t) = \frac{\mu_s}{32\omega_1^2} \left(\frac{V_0}{\omega_1}\right)^3 e^{-3ht}; \\ A_2(t) &= \left[\frac{V_0}{\omega_2} - \frac{3\mu_c}{32\omega_2^2} \left(\frac{V_0}{\omega_2}\right)^3 e^{-2h\frac{\pi}{\omega_1}} \right] e^{-ht}; \quad B_2(t) = \frac{\mu_c}{32\omega_2^2} \left(\frac{V_0}{\omega_2}\right)^3 e^{-3ht}; \\ \omega_1^2 &= \omega_s^2 - h^2 - 0,75\mu_s \left(\frac{V_0}{\omega_1}\right)^2 e^{-2ht}; \quad \omega_2^2 = \omega_c^2 - h^2 - 0,75\mu_c \left(\frac{V_0}{\omega_2}\right)^2 e^{-2ht}; \\ \omega_0 &= \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}; \end{aligned}$$

ω_0 – основна частота нелінійних коливань об'єкта з тріщиною.

Розглянемо отримані в (2) та (4) вирази для частот нелінійних коливань об'єкта без тріщини ω_x та об'єкта з тріщиною ω_1, ω_2 . Покладаючи $h = 0$, легко отримати залежність кожної з розглянутих частот ω_i від значення коефіцієнта μ_i :

$$\omega_i^2 = \frac{\omega_{i0}^2}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{3\mu_i V_0^2}{\omega_{i0}^4}} \right], \quad (5)$$

де ω_0 – частота коливань об'єкта для випадку лінійної первісної характеристики відновлюючої сили.

Як впливає з (5), частота нелінійних коливань об'єкта без тріщини ω_x та частоти нелінійних коливань об'єкта з тріщиною при розтягуванні ω_1 та стиску ω_2 у випадку «м'якої» нелінійності зменшуються зі збільшенням ступеня нелінійності μ_i .

При розгляданні об'єкта з тріщиною у випадку лінійної первісної характеристики відновлюючої сили, тобто за $\mu_s = \mu_c = 0$, відношення частот коливань об'єкта при розтягуванні ω_1 та стиску ω_2 залежить лише від відносного розміру тріщини $\Delta l / l$ [1]:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \left(1 - \frac{\Delta l}{l} \right)^{\frac{1}{2}} = \zeta. \quad (6)$$

У цьому випадку основна частота коливань об'єкта з тріщиною ω_0 також залежить від відносного розміру тріщини і зменшується із збільшенням $\Delta l / l$:

$$\omega_0 = \frac{2\zeta}{1+\zeta} \omega_2. \quad (7)$$

Для нелінійної первісної характеристики відновлюючої сили об'єкта з тріщиною, враховуючи, що $\mu_s = \mu_c = \mu$, після математичних перетворень відношення частот ω_1 і ω_2 матиме більш складну залежність від відносного розміру тріщини:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \left[\frac{\zeta^2 + (\zeta^4 - b_c)^{\frac{1}{2}}}{1 + (1 - b_c)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

де $b_c = \frac{3\mu V_0^2}{\omega_c^4}$ – член, що враховує первісну нелінійність характеристики відновлюючої сили.

Залежності (8) і (6) збігаються за $\mu = 0$.

У випадку наявності демпфірування ($h \neq 0$) з виразів (2) і (4) видно, що з часом частоти коливань ω_x , ω_1 , і ω_2 прагнуть до своїх значень, що відповідають випадку лінійної первісної характеристики між напругою та деформацією в матеріалі об'єкта. При цьому залежності відношення частот ω_1 / ω_2 та частоти ω_0 від відносного розміру тріщини Δ/l за малих значень розсіювання енергії з часом прагнуть до залежностей (6) і (7) відповідно. Однак для малих значень h та малих значень часу спостереження залежність основної частоти нелінійних коливань об'єкта з тріщиною від відносного розміру тріщини значно ускладнюється, що, у свою чергу, ускладнює задачу діагностики та оцінки тріщини при використанні зміни основної частоти вільних коливань, як діагностичної ознаки.

Проаналізуємо поточну спектральну щільність нелінійних коливань $x(t)$, яку подамо у вигляді [4]

$$S_t(\omega) = \int_0^{t_k} x(t) \exp(-j\omega t) dt, \quad (9)$$

де t_k – час спостереження.

Покладаючи час спостереження t_k кратним періоду коливань об'єкта за основною частотою, спектральну щільність (9) розглядатимемо для дискретних значень основної частоти коливань.

Для об'єкта без тріщини, використовуючи розв'язок (2), поточну спектральну щільність отримаємо у вигляді:

$$S_t(k\omega_x) = \frac{V_0}{\omega_x^2} \left\{ \frac{1 - \frac{1}{2} e^{-n\pi b} [(1+k)e^{-jn\pi(k-1)} + (1-k)e^{-jn\pi(k+1)}]}{1 - k^2 + b^2 + j2kb} - \frac{a \left[1 - \frac{1}{2} e^{-3n\pi b} [(1+k)e^{-jn\pi(k-1)} + (1-k)e^{-jn\pi(k+1)}] \right]}{1 - k^2 + 9b^2 + j6kb} + \frac{a \left[1 - \frac{1}{6} e^{-3n\pi b} [(3+k)e^{-jn\pi(k-3)} + (3-k)e^{-jn\pi(k+3)}] \right]}{9 - k^2 + 9b^2 + j6kb} \right\}, \quad (10)$$

де $b = h / \omega_x$; $a = \frac{3\mu}{32\omega_x^2} \left(\frac{V_0}{\omega_x} \right)^2$; k – номер гармонік основної частоти ω_x ; n – число періодів коливань.

З виразу (10) видно, що при $a = 0$ спектральна щільність $S_t(k\omega_x)$ являтиме собою спектральну щільність загасаючої синусоїди з рівними нулю спектральними амплітудами вищих гармонік.

Нелінійність характеристики відновлюючої сили зумовлює появу в спектральній щільності вищих непарних гармонік ($k = 3$ у розглядуваному випадку).

За наявності тріщини спектральна щільність нелінійних коливань (4) об'єкта діагностики матиме вигляд:

$$S_i(k\omega_0) = \frac{V_0}{\omega_0^2} \left\{ \frac{1 - (-i)^n e^{-\frac{n\pi d}{\lambda_1}} e^{-j\frac{n\pi k}{\lambda_1}}}{\lambda_1^2 - k^2 + d^2 + j2kd} - \frac{a_1 [1 - (-1)^n e^{-\frac{2n\pi d}{\lambda_1}} e^{-j\frac{n\pi k}{\lambda_1}}]}{\lambda_1^2 - k^2 + 9d^2 + j6kd} + \right. \\ \left. + \frac{a_1 [1 - (-1)^n e^{-\frac{2n\pi d}{\lambda_1}} e^{-j\frac{n\pi k}{\lambda_1}}]}{9\lambda_1^2 - k^2 + 9d^2 + j6kd} + \frac{(1 - a_2 e^{-\frac{2n\pi d}{\lambda_1}}) [(-1)^n e^{-2n\pi d} - e^{-\frac{n\pi d}{\lambda_1}} e^{-j\frac{n\pi k}{\lambda_1}}]}{\lambda_2^2 - k^2 + d^2 + j2kd} + \right. \\ \left. + \frac{a_2 [(-1)^n e^{-6n\pi d} - e^{-\frac{3n\pi d}{\lambda_1}} e^{-j\frac{n\pi k}{\lambda_1}}]}{9\lambda_2^2 - k^2 + 9d^2 + j6kd} \right\}, \quad (11)$$

де $a_1 = \frac{3\mu_s}{32\omega_1^2} \left(\frac{V_0}{\omega_1}\right)^2$; $a_2 = \frac{3\mu_c}{32\omega_2^2} \left(\frac{V_0}{\omega_2}\right)^2$; $\lambda_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}$; $\lambda_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0}$; $d = \frac{h}{\omega_0}$; k - номер гармонік основної частоти ω_0 ; n - число періодів $T_0 = 2\pi / \omega_0$ коливань об'єкта з тріщиною; a_1, λ_i, d - функції відносного розміру тріщини.

Як видно з виразу (11), при $a_1 = a_2 = 0$ спектральна щільність $S_i(k\omega_0)$ являє собою спектральну щільність коливань об'єкта з тріщиною за лінійної первісної характеристики відновлюючої сили [1].

На рис. 1 наведені оцінки спектральної щільності потужності нелінійного об'єкта за відсутності та наявності тріщини для $c_1 = 0,01$ с, $h = 0,1$, $n = 200$.

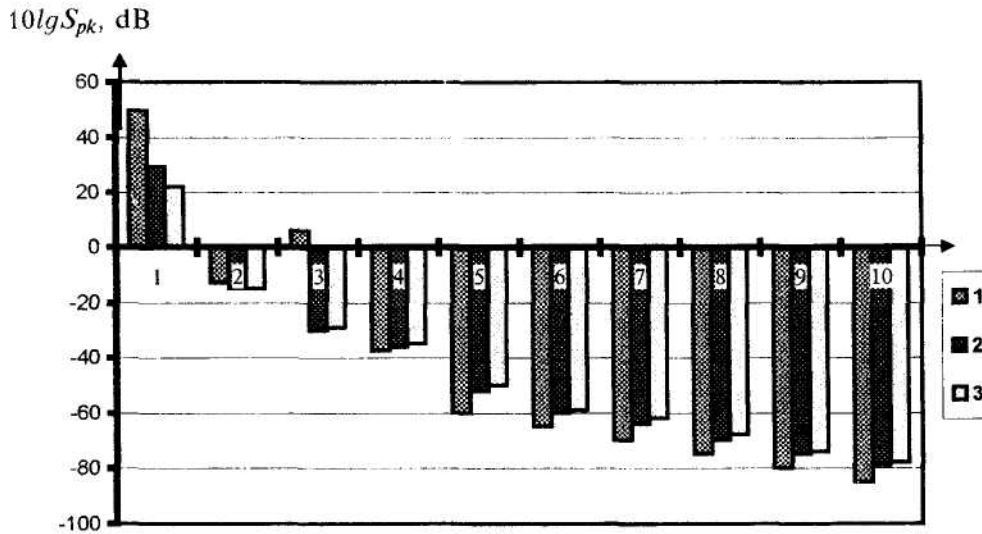


Рис. 1. Оцінки спектральної щільності потужності S_{pk} нелінійного об'єкта за відсутності (1) та наявності тріщини (2 - $\Delta l / l = 0,3$; 3 - $\Delta l / l = 0,5$)

Аналіз отриманих оцінок показує, що наявність тріщини та збільшення її відносного розміру викликає істотне зменшення спектральної амплітуди основної ($k = 1$) гармоніки та незначне збільшення спектральних амплітуд вищих ($k > 1$) гармонік, за виключенням $k = 3$, що зумовлена первісною нелінійністю об'єкта діагностики.

При дослідженні діагностичного методу вільних коливань без урахування первісної нелінійності об'єкта діагностики [1] як діагностичну ознаку було запропоновано багатомірний вектор, складові якого являють собою відношення спектральних щільностей потужності вищих ($k > 1$) та основної ($k = 1$) гармонік:

$$Y = \left\{ \frac{S_{p2}}{S_{p1}}, \frac{S_{p3}}{S_{p1}}, \dots, \frac{S_{pK}}{S_{p1}} \right\}. \quad (12)$$

Вектор (12) не залежить від інтенсивності збудження вільних коливань об'єкта діагностики, а його складові збільшуються із збільшенням відносного розміру тріщини [1].

Аби виключити вплив первісної нелінійності об'єкта на результати діагностики та оцінки втомних тріщин вектор (12) має містити в собі складові, що являють собою відношення S_{pk} вищих ($k > 3$) та основної ($k = 1$) гармонік, або відношення S_{pk} вищих парних ($k = 4, 6, 8, \dots$) та основної ($k = 1$) гармонік.

Графіки залежності вектора діагностичних ознак від відносного розміру тріщини наведені на рис. 2.

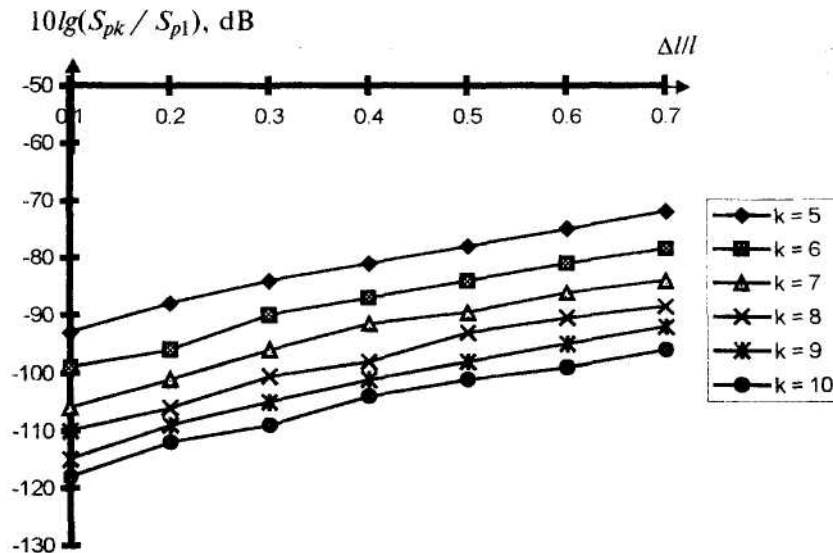


Рис. 2. Графіки залежності складових вектора діагностичних ознак від відносного розміру тріщини

Як видно з наведених на рис. 2 графіків, складові вектора діагностичних ознак збільшуються із збільшенням відносного розміру тріщини, що може використовуватись для діагностики та оцінки втомних тріщин у нелінійному об'єкті методом вільних коливань.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Bouraou N., Gelman L. «Theoretical Bases of Free Oscillation Method for Acoustical Non-Destructive Testing». In Proceedings of the 1997 National Conference on Noise Control Engineering, State College, Pennsylvania. – Book 1. – 1997. – 553 p.
2. Каннингхем В. Введение в теорию нелинейных систем (пер. с англ.). – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962. – 456 с.
3. Карасев В.А., Ройтман А.Б. Доводка эксплуатационных машин. Вибродиагностические методы. – М.: Машиностроение, 1986. – 192 с.
4. Харкевич А.А. Спектры и анализ. – М.: Гос. изд-во технико-теорет. литер., 1957. – 236 с.

БЕРТМАН Олександр Анатолійович – інженер НВО «Славутич».

Наукові інтереси:

- механічні коливання;
- віброакустичні методи діагностики.

БУРАУ Надія Іванівна – доцент Національного технічного університету України «КПІ».

Наукові інтереси:

- обробка сигналів;
- віброакустичні методи діагностики;
- неруйнівний контроль та оцінювання.

ГЕЛЬМАН Леонід Мусійович – професор Національного технічного університету України «КПІ».

Наукові інтереси:

- обробка сигналів;
- віброакустичні методи діагностики;
- неруйнівний контроль та оцінювання;
- адаптивні системи.