М.В. Новожилова, О.К. Пандорін

ВИКОРИСТАННЯ ПОНЯТТЯ Ф-ФУНКЦІЇ В 2D ЗАДАЧАХ ГЕОМЕТРИЧНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

Вивчення та моделювання широкого класу практичних оптимізаційних задач викликало необхідність подальшого дослідження одного з основних понять теорії геометричного проектування – поняття Ф-функції. У поданій статті поширення поняття Ф-функції розглядається у двох напрямках. По-перше, розглядається побудова Ф-функції для геометричних об'єктів, що є ніде не щільними множинами, а, по-друге, аналізується побудова Ф-функції для геометричних об'єктів зі змінними метричними характеристиками.

Вступ

Задачі геометричного проектування виникають в різноманітних галузях науки і техніки. Основною властивістю, яка об'єднує ці задачі, є, як правило, надзвичайна складність, що виводить їх за межі класичних теорій. Майже всі вони пов'язані з обробленням геометричної інформації в тій її частині, де йдеться про розміщення замкнених точкових множин (далі геометричних об'єктів) довільної просторової форми, що дозволяє виділити ці задачі до окремого класу так званих задач геометричного проектування [6, 7]. Ці задачі полягають в пошуку оптимального розміщення кінцевої множини S геометричних об'єктів $\{S_i\}$, $i = 1, 2, ..., n$ в заданих областях S_0 при наявності різноманітних обмежень та критеріїв якості розміщення.

До цього класу відносяться задачі оптимального розкрою матеріалів на фігурні шаблони, задачі побудови трас порізки тощо. У межах даної роботи будемо розглядати тільки ті задачі геометричного проектування, в яких як об'єкти, так і область розміщення належать арифметичному евклідовому простору R^2, тобто є двовимірними геометричними об'єктами.

Можливість подання великого числа важливих промислових задач як класу задач геометричного проектування викликала необхідність всебічного вивчення цього класу задач і розроблення адекватних математичних моделей для їхнього розв'язання.

Серед найважливіших обмежень, що задають область припустимих розв'язків у задачах геометричного проектування, є умова взаємного неперетину об'єктів, що розміщуються.

Конструктивним засобом формалізації умови взаємного неперетину об'єктів розміщення є Ф-функції [4, 5], що вводяться для кожної пари (S_i, S_j), $i, j = 1, 2, ..., n$, $i \neq j$ об'єктів, що розміщуються.

Наведемо традиційне визначення Ф-функції, яке сформульоване для класу в загальному випадку неопуклих геометричних об'єктів S_i, S_j з кусочно-лінійною межею без самоперетинів, що складаються з однієї компоненти зв'язності. Гомотопічний тип [1] компоненти лінійної зв'язності межі є коло у R^2. Інакше кажучи, об'єкти S_i мають непусту внутрішність [2], тобто

$$int\, S_i \neq \varnothing$$

Введемо до розгляду параметри $u_i = (x_i, y_i)$ розміщення об'єктів S_i, що є координатами полюсу O_i, тобто координатами центру власної системи координат X_iOY_i.

Визначення 1. Будь-яка всюди визначена неперервна функція $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$ у R^4, що характеризується наступною властивістю:

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) > 0, \text{ якщо } S_i(u_i) \cap S_j(u_j) = \varnothing \tag{1}$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = 0, \text{ якщо } S_i(u_i) \cap S_j(u_j) \neq \varnothing \tag{2}$$

$$int\, S_i(u_i) \cap int\, S_j(u_j) = \varnothing$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) < 0, \text{ якщо } int\, S_i(u_i) \cap int\, S_j(u_j) \neq \varnothing \tag{3}$$

називається *Ф*-функцією.

Позначимо 0 - поверхню $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$-функції об'єктів S_i та S_j, що визначається умовою торкання (2), через T^4. Очевидно, точкова множина T^4 є кусково-лінійна гіперповерхня в просторі R^4 параметрів розміщення об'єктів S_i та S_j. На рис. 1 зображено проекцію 0 – поверхні $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$-функції, якщо $u_i=0$.

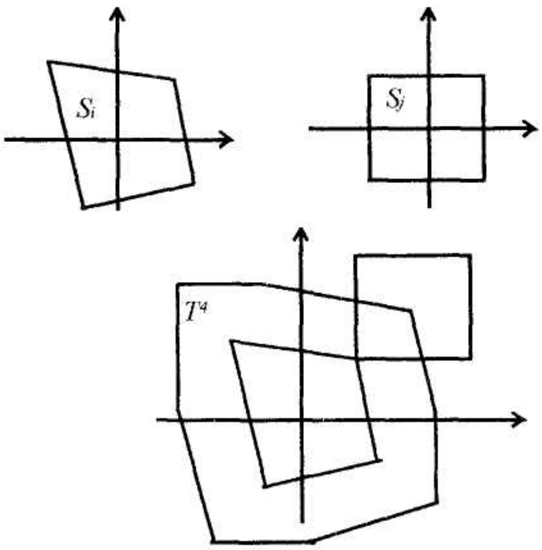

Рис. 1

1. Поширення поняття Ф-функції на клас ніде не щільних геометричних об'єктів

Традиційно Ф-функція визначена лише для тіл, тобто для об'єктів, що мають непусту внутрішність. Але в цілому ряді задач геометричного проектування, зокрема, при проектуванні і оптимізації трас порізки промислових матеріалів найбільш природною формою математичної моделі об'єктів є замкнені та незамкнені криві, що складаються з дуг кіл і відрізків прямих, тобто об'єкти з порожньою внутрішністю. У цьому випадку низка надзвичайно зручних при формалізації та побудові рішень властивостей нормалізованої Ф-функції [3, 4] (визначення відстаней між об'єктами, простота формалізації, умови відсутності взаємних перетинів і самоперетинів...) не може бути безпосередньо використана. Тому виникає необхідність поширити визначення нормалізованої Ф-функції на випадок, коли один чи обидва геометричні об'єкти S_i, S_j мають пусту внутрішність, тобто, наприклад, в арифметичому евклідовому просторі R^2 на пари об'єктів з таких класів, як точки, відрізки, прямі, дуги та об'єкти, що є об'єднанням скінченного числа об'єктів з перелічених класів об'єктів з пустою внутрішністю та тіл.

Тоді пряме поширення класичного **визначення 1** набуває наступного вигляду.

Визначення 2. Будь-яка всюди визначена неперервна функція $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$ у R^4 , що характеризується наступною властивістю:

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) > 0, \text{ якщо } S_i(u_i) \cap S_j(u_j) = \varnothing , \tag{4}$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = 0, \text{ якщо } S_i(u_i) \cap S_j(u_j) \neq \varnothing \tag{5}$$

$$\left[int\, S_i(u_i) \cap S_j(u_j) = \varnothing\right] \vee \left[S_i(u_i) \cap int\, S_j(u_j) = \varnothing\right]$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) < 0, \text{ якщо } \left[int\, S_i(u_i) \cap S_j(u_j) \neq \varnothing\right] \vee \left[S_i(u_i) \cap int\, S_j(u_j) \neq \varnothing\right] \tag{6}$$

називається Ф-функцією.

Відзначимо, що умова (4) співпадає з умовою (1) з класичного визначення.

Таким чином, Ф-функція дорівнює нулю, якщо перетинаються лише межі об'єктів, а перетин внутрішностей з межами порожній.

Більш зручним для використання у вигляді теста неперетину є наступне визначення.

Визначення 3. Будь-яка всюди визначена неперервна функція $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$ у R^4 , що характеризується наступною властивістю:

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) > 0, \text{ if } S_i(u_i) \cap S_j(u_j) = \varnothing \tag{7}$$

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = -\inf_{t \in R^2} \| t \|_2 \quad \text{за умовою} \quad S_i(u_i + t) \cap S_j(u_j) = \varnothing \tag{8}$$

називається Ф-функцією.

Цей спосіб, узгоджений з відомим зв'язком між поверхнями рівня Φ-функції та сумою Мінковського, на жаль, не припускає покомпонентного обчислення. Для розв'язання оптимізаційних задач (наприклад, прямим скануванням або переглядом точок області припустимих розв'язків задачі, що є підозрілими на екстремум) зручно подавати як допоміжний результат ще і набір екстремальних множин, на яких такий вектор досягається.

При розв'язанні ряду задач геометричного проектування можливо обмежити рухи об'єктів таким чином, що з факту неперетину меж випливає неперетин і внутрішностей об'єктів. Маючи на увазі введену описаним вище способом Φ-функцію в таких задачах можна замінити побудову області припустимих розв'язків, що задає умови неперетину об'єктів, побудовою умов неперетину їхніх меж, що є значно простішим у випадку використання продовжень Φ-функцій, що припускають покомпонентне обчислення.

Крім того, в задачах з мінімально припустимими відстанями можна обмежити рухи об'єктів таким чином, що всі значення Φ-функції, що є припустимими в оптимізаційному процесі, будуть позитивні і таким чином можна обійтися без обчислення від'ємних значень Φ-функції і, внаслідок цього, описати лише обчислення відстаней між кожною парою примітивів межі.

2. Властивості Φ-функції, що враховують можливість афінного перетворення подібності об'єктів

В багатьох задачах геометричного проектування розглядаються оптимізаційні перетворення над геометричними об'єктами, що мають змінні метричні характеристики. До цього класу належить, наприклад, задача, про яку йдеться у [3].

Знову розглянемо клас у загальному випадку неопуклих геометричних об'єктів S_i, S_j з кусочно-лінійною межею без самоперетинів, що складаються з однієї компоненти зв'язності.

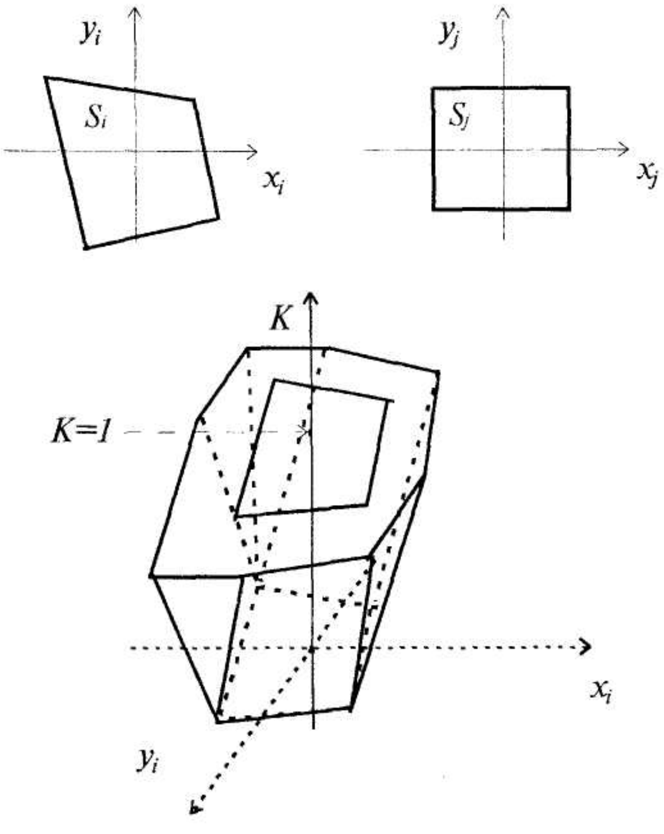

Рис. 2

Введемо у розгляд коефіцієнт подібності K, що пов'язаний з одним з об'єктів S_i, S_j, наприклад, з об'єктом S_j , тобто $S_j = S_j(u_j, K)$.

Якщо покласти, що коефіцієнт подібності K задовольняє нерівності

$$0 < K \leq 1,$$

то обидва об'єкти мають непусту внутрішність.

Тепер $\Phi_{ij}(u_i, u_j, K)$-функція залежить від 5 параметрів та є визначеною всюди у напівпросторі простору R^5, крім гіперплощини $K = 0$.

Якщо коефіцієнт подібності K дорівнює 0, об'єкт S_j вироджується в точку. У цьому випадку 0- поверхня $\Phi_{ij}(u_i, u_j, K)$ у R^5 є незамкненою згідно з визначенням 1.

Інакше кажучи, якщо коефіцієнт подібності K дорівнює 0, об'єкт S_j вироджується в точку.

Маючи на увазі аналіз першого пункту роботи, визначимо $\Phi_{ij}(u_i,u_j,K)$-функцію у точках гіперплощини $K = 0$ наступним чином:

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j, K) = -\inf_{t \in R^2} \|t\|_2$$

$$\textit{за умовою} \quad S_i(u_i + t, K) \cap S_j(u_j) = \varnothing$$

Проекція 0- поверхні $\Phi_{ij}(u_i, u_j, K)$ у простір R^3 за умови, що $u_i = 0$, наведена на рис. 2. Це поверхня зрізаної піраміди, одна основа якої міститься у площині $K = 0$ та співпадає з об'єктом S_i, а інша належить площині $K = 1$ та межа її є кусково-лінійна множина T^4.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Келлі Дж.* Загальна топологія/Пер. з англ. – М.: Наука, 1981. – 432 с.
2. *Колмогоров А.Н., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – М.: Наука, 1978. – 487 с.
3. *Новожилова М.В., Пшенична В.Д.* Побудова початкового наближення для задачі розміщення опуклого многогранника в опуклій багатогранній області зі змінними метричними характеристиками. Ін-т пробл. машинобуд. НАН України. – Харків, 1996. – 12 с. – Деп. ВІНІТІ №2694-96.
4. *Стоян Ю.Г.* Автоматизація об'ємно-планувального проектування у машинобудуванні. // Вісн. АН УРСР, 1979. – № 3. – С. 46 – 52.
5. *Стоян Ю.Г.* Про одне узагальнення функції щільного розміщення. Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1980. – № 8. – С. 70-74.
6. *Стоян Ю.Г., Гіль М.І.* Засоби і алгоритми розміщення плоских геометричних об'єктів. – Київ: Наук. думка, 1976. – 247 с.
7. *Стоян Ю.Г., Яковлев С.В.* Математичні моделі і оптимізаційні засоби геометричного проектування. – Київ: Наук. думка, 1986. – 267 с.

НОВОЖИЛОВА Марина Володимирівна – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Інституту проблем машинобудування Національної академії наук України, м. Харків.

Наукові інтереси:
- теорія дослідження операцій;
- комп'ютерна графіка;
- теорія геометричного проектування.

ПАНДОРІН Олександр Костянтинович – кандидат технічних наук, науковий співробітник Інституту проблем машинобудування Національної академії наук України, м. Харків.

Наукові інтереси:
- теорія дослідження операцій;
- комп'ютерна графіка;
- теорія геометричного проектування.