А.Й. Щехорський

ПРО ТВЕРДЖЕННЯ ЛЕОНАРДА ЕЙЛЕРА

Знайдено спосіб побудови розбиттів виду $7x^2 + y^2$ степеня двійки. Розглядається коло задач, пов'язаних з даним розбиттям.

Нагадаємо історію питання. В [1] наведена запозичена із записних книжок Леонарда Ейлера задача, запропонована на 48-ій олімпіаді школярів дев'ятих класів м. Москви. Пропонувалось довести твердження Л.Ейлера: довільний степінь двійки з натуральним показником, не меншим за три, може бути представлений у вигляді $7x^2 + y^2$, де x і y – непарні натуральні числа. Доведення здійснювалось за допомогою індукції, в якому індуктивний перехід вимагав деякої здогадки. Наведемо схему розв'язку цієї задачі, розміщеної в [1]. Для $n = 3$ твердження справедливе: $2^3 = 7x^2 + y^2$, $x = y = 1$. Нехай воно справедливе для $n = k$, $2^k = 7x^2 + y^2$, x і y – непарні числа. Розглянемо дві пари чисел: $\{(x-y)/2, (7x+y)/2\}$ і $\{(x+y)/2; (7x-y)/2\}$. Для кожної пари квадрат першого числа, помноженого на сім, плюс квадрат другого числа дає 2^{k+1}. Дійсно,

$$\frac{7}{4}(x-y)^2 + \frac{1}{4}(7x+y)^2 = \left(7x^2 - 14xy + 7y^2 + 49x^2 + 14xy + y^2\right)/4 =$$
$$= \left(56x^2 + 8y^2\right)/4 = 2\left(7x^2 + y^2\right) = 2^{k+1}.$$

Деяким обгрунтуванням цієї здогадки була стаття в [3]. В ній було наведено твердження Л.Ейлера, доведення якого спирається на властивість норми на кільці чисел виду $a + b\sqrt{-7}$, де a і b – цілі числа. Взагалі, доведення спиралось на метод математичної індукції. В замітці [4] її автор Тахонг Куанг наводить ще одне доведення твердження Л.Ейлера і знову з використанням індукції.

В даній роботі методи досліджень елементарні.

Твердження Ейлера перефразуємо в іншій постановці: розв'язати рівняння

$$7x^2 + y^2 = 2^n, \tag{1}$$

де n – натуральне число; $n \geq 3$; x і y – непарні цілі числа.

В даній роботі задача (1) розв'язана і наведені різні напрямки її узагальнення.

Фіксуємо довільне натуральне $n \geq 3$. Будемо вважати, що для цього n існують два непарних числа x і y, які задовольняють рівняння (1).

Запишемо (1) у вигляді

$$8x^2 + (y-x)(y+x) = 2^n. \tag{2}$$

У рівнянні (2) можна вважати, що $x \neq y$. Якби $x = y$, то з рівняння (1) слідувало б $x = y = 1$ і $n = 3$.

Оскільки x і y непарні числа і $x \neq y$, то існують такі ціле непарне $q \neq 0$ і натуральне $e \geq 1$, що $y - x = 2^e q$. Таким чином, рівняння (2) перетворюється у рівняння

$$8x^2 + 2^{e+1}qx + 2^{2e}q^2 = 2^n. \tag{3}$$

Якщо $e > 2$, то з рівняння (3) випливає, що

$$x^2 + 2^{e-2}qx + 2^{2e-3}q^2 = 2^{n-3}. \tag{4}$$

Оскільки x непарне, то з (4) одержуємо $n = 3$, що тягне за собою $x = y = 1$. Таким чином, для показника e потрібно розглядати два випадки.

I. Нехай $e = 1$, тоді рівняння (3) набуде вигляду:

$$2x^2 + qx + q^2 = 2^{n-3} . \tag{5}$$

II. При $e = 2$ рівняння (3) набуде того ж самого вигляду:

$$x^2 + qx + 2q^2 = 2^{n-3} . \tag{6}$$

Рівняння (5) розглядалось в [4], в якому q не обов'язково непарне. Методом математичної індукції доведено, що для кожного $n \geq 3$ розв'язок рівняння (5) існує. Розв'язок рівняння (5) в [4] не наведено. Спробуємо знайти всі розв'язки рівнянь (5) і (6). Розглянемо спочатку рівняння (5). Для зручностей в подальшому введемо позначення $C_0 = q,\ C_1 = x,\ m = n-2$. Таким чином, потрібно розв'язати рівняння

$$C_0^2 + C_0C_1 + 2C_1^2 = 2^m \tag{7}$$

в цілих непарних числах C_0, C_1.

Доведемо лему.

Лема 1. Множина цілочислових розв'язків рівняння

$$a^2 + ab + 2b^2 = 1 , \tag{8}$$

де a – непарне число, складається з двох пар чисел $a = 1, b = 0$ і $a = -1, b = 0$.

Доведення. Числа a і b не можуть бути одночасно рівні нулю. Випадок $a = 0, b \neq 0$ також не підходить. Тому, коли $b = 0, a \neq 0$, то $a \neq \pm 1$.

Нехай тепер $a \neq 0$ і $b \neq 0$. Коли $ab > 0$, то $a^2 + ab + 2b^2 > 1$. Коли ж $ab < 0$, то $a^2 + ab + 2b^2 = (a+b)^2 - ab + b^2 > 1$.

Рівняння (7) запишемо у вигляді

$$2\left(2^{m-1} - C_1^2\right) = C_0\left(C_0 + C_1\right). \tag{9}$$

Оскільки числа C_0 і C_1 непарні, то існує ціле C_2 таке, що $C_1 + C_2 = 2C_2$. Підставляючи в (9), одержимо

$$2^{m-1} = C_1^2 - C_1C_2 + 2C_2^2 . \tag{10}$$

Коли в (10) $m = 1$, то згідно з лемою 1, $C_2 = 0, C_1 = \pm 1$. Нехай $m > 1$, тоді $C_2 \neq 0$, бо в противному разі, оскільки C_1 непарне, $m = 1$. Оскільки $m > 1$, то з (10) випливає, що C_2 – непарне число. Якби C_2 було парним числом, то рівність (10) була б неможливою, бо C_1 – непарне число.

Число m більше одиниці, значить рівняння (10) можна записати у вигляді

$$2\left(2^{m-2} - C_2^2\right) = C_1\left(C_1 - C_2\right). \tag{11}$$

Числа C_1 і C_2 непарні, тому з (11) слідує, що існує ціле число C_3 таке, що $C_1 - C_2 = 2C_3$. Підставимо в (11), одержимо:

$$2^{m-2} = C_2^2 + C_2C_3 + 2C_3^2 . \tag{12}$$

Коли $m = 2$, то за лемою 1 $C_3 = 0$, $C_2 \neq \pm 1$. Нехай $m > 2$, тоді $C_3 \neq 0$ (бо C_2 непарне). Оскільки $m > 2$, то із (12) слідує, що C_3 – непарне число.

Рівняння (12) запишемо у вигляді $(m > 2)$

$$2\left(2^{m-3} - C_3^2\right) = C_2\left(C_2 + C_3\right).$$

Оскільки число $C_2 + C_3$ парне, тобто існує C_4, що $C_2 + C_3 = 2C_4$, то одержимо рівняння

$$2^{m-3} = C_3^2 - C_3C_4 + 2C_4^2 .$$

Воно такого ж вигляду, що і рівняння (10).

В підсумку, коли C_0 і C_1 – розв'язки рівняння (7), то після k кроків описаного вище процесу $(0 < k \le m)$ C_k і C_{k+1} будуть розв'язками рівняння

$$2^{m-k} = C_k^2 + (-1)^k C_k C_{kH} + 2C_{kH}^2. \tag{13}$$

При $m = k$ з рівняння (13) одержимо рівняння

$$1 = C_m^2 + (-1)^m C_m C_{m+1} + 2C_{m+1}^2. \tag{14}$$

Рівняння (14), згідно з лемою 1, має розв'язки $C_{m+1} = 0$, $C_m = \pm 1$.

Описана процедура розв'язку рівняння (7) нагадує відомий метод нескінченного спуску для знаходження розв'язків рівнянь в цілих числах, що широко використовується в теорії чисел.

Таким чином, щоб одержати розв'язок рівняння (7), потрібно мати початкові дані $C_{m+1} = 0$, $C_m = \pm 1$, тоді кожний член C_{k-1} побудованої послідовності $C_0, C_1, \ldots, C_m, C_{m+1}$ буде виражатися через попередні з допомогою рекурентних формул:

$$C_{k-1} = \begin{cases} 2C_{k+1} - C_k, & \text{коли } k - \text{непарне,} \\ 2C_{k+1} + C_k, & \text{коли } k - \text{парне.} \end{cases} \tag{15}$$

За початковими даними $C_{m+1} = 0$, $C_m = \pm 1$ за допомогою формул (15) знайдемо C_0 і C_1, а значить і розв'язки x, y рівняння (1).

Тим же самим методом розв'язується рівняння (6), з якого одержимо $x = C_0$, $y = 4C_1 + C_0$.

Для зручності, послідовність $C_0, \ldots, C_m$ перенумеруємо, тоді формули (15) можна записати так:

$$C_{k+1} = \begin{cases} 2C_{k-1} - C_k, & \text{коли } k - \text{непарне,} \\ 2C_{k-1} + C_k, & \text{коли } k - \text{парне,} \end{cases} \tag{16}$$

де $C_0 = 0$, $C_1 = \pm 1$.

У випадку, коли рівняння (1) зводиться до рівняння (5), його розв'язки матимуть вигляд

$$x = C_{n-2},\ -y = 2C_{n-1} + / C_{n-2} (n \ge 2). \tag{17}$$

А у випадку, коли рівняння (1) зводиться до рівняння (6), матимемо розв'язки

$$x = C_{n-2},\ y = C_{n-2} + 4C_{n-3}. \tag{18}$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння $7x^2 + y^2 = 2^9$ в цілих числах x і y.

В нашому випадку $n = 9$. Покладаючи $C_0 = 0$, $C_1 = 1$, одержимо послідовність:

$$\begin{aligned} C_2 &= 2C_0 - C_1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1, \\ C_3 &= 2C_1 + C_2 = 2 \cdot 1 + (-1) = 1, \\ C_4 &= 2C_2 - C_3 = 2 \cdot (-1) - 1 = -3, \\ C_5 &= 2C_3 + C_4 = 2 \cdot 1 - 3 = 1, \\ C_6 &= 2C_4 - C_5 = 2 \cdot (-3) + 1 = -5, \\ C_7 &= 2C_5 + C_6 = 2 \cdot (-1) - 5 = -7, \\ C_8 &= 2C_6 - C_7 = 2 \cdot (-5) + 7 = -3. \end{aligned}$$

Звідки $x = C_7 = -7$, $y = 2C_8 + C_7 = 2(-3) + (-7) = -13$. Зробимо перевірку: $7x^2 + y^2 = 7(-7)^2 + 13^2 = 343 + 169 = 512 = 2^9$.

Нехай тепер $C_0 = 0, C_1 = -1$, тоді за формулами (7) матимемо $C_2 = 1$, $C_3 = -1$, $C_3 = -1$, $C_4 = 3$, $C_5 = 1$, $C_6 = 5$, $C_7 = 7$, $C_8 = 3$, $x = C_7 = 7$, $y = 2C_8 + C_7 = 13$.

Звернемося до формул (18), покладемо $C_0 = 0,\ C_1 = 1$. Тоді $x = C_7 = -7$, $y = C_7 + 4C_6 = -7 + 4 \cdot 5 = 13$. Коли покласти $C_0 = 0,\ C_1 = -1$, отримаємо наступні розв'язки: $x = 7, y = -13$.

Було б цікаво за формулами (16) знайти рекурентні формули для розв'язків рівнянь (17) і (18), які б залежали лише від C_0, C_1 і номера *n*. Такі формули автору невідомі.

Задачу Ейлера спробуємо узагальнити в наступному напрямку. Розв'язати рівняння $7x^2 + y^2 = N$, де N – парне натуральне число, в цілих числах. Коли N не є степенем двійки, тобто $N = 2^n z$, де z – непарне число, $z \ge 3$. Таким чином, потрібно розв'язати рівняння

$$7x^2 + y^2 = 2^n z,\ n \in N, \qquad (19)$$

де $z \ge 3$ – непарне натуральне число.

Застосовувати метод математичної індукції для встановлення існування розв'язків цього рівняння навряд чи є можливим.

Розв'язувати рівняння (19) будемо так, як і рівняння (1). Рівняння (7) при цьому заміняється рівнянням

$$2^m z = C_0^2 + C_0 C_1 + 2C_1^2, \quad m \ge 1. \qquad (20)$$

Рівняння (20) запишемо у вигляді

$$2\left(2^{m-1} z - C_1^2\right) = C_0\left(C_0 + C_1\right), \qquad (21)$$

де числа C_0 і C_1 – непарні $\left(C_0 + C_1 \ne 0\right)$.

Якщо $C_1 + C_0 = 0$, то з (21) слідує, що $C_1^2 = z2^{m-1}$. Але оскільки C_1 – непарне число, то лишається $m = 1$. Це означає закінчення процесу побудови розв'язків рівняння (18).

Очевидно, існує ціле число C_2 таке, що $C_0 + C_1 = 2C_2$. Підставимо в рівняння (21), одержимо

$$2^{m-1} z = C_1^2 - C_1 C_2 + 2C_2. \qquad (22)$$

Нехай $C_0 + C_1 \ne 0$, тоді $m > 1$. З (22) слідує, що $C_2 \ne 0$. У противному випадку з рівняння (22) одержали б рівність $C_1^2 = z2^{m-1}$, яка неможлива в силу того, що число C_1 непарне. Умова $m > 1$ дозволяє стверджувати, що C_2 – непарне число (дане твердження слідує з рівності (22)).

Слідуючи методиці розв'язку рівняння (7), після *m* кроків алгоритму прийдемо до рівняння

$$z = C_m^2 + (-1)^m C_m C_{m+1} + 2C_{m+1}, \qquad (23)$$

де C_m – непарне число.

З рівняння (23) слідує, що C_{m+1} – парне число. Покладемо $C_{m+1} = 2z_{m+1}$, одержимо рівняння $z = C_m^2 + (-1)^m 2z_{m+1} C_m + 8z_{m+1}^2$, яке можна записати у вигляді $z = \left[C_m + (-1)^m z_{m+1}\right]^2 + 7z_{m+1}^2$. В цьому рівнянні покладемо $b = C_m + (-1)^m z_{m+1},\ a = z_{m+1}$, тоді

$$z = 7a^2 + b^2. \qquad (24)$$

Таким чином, розв'язок рівняння (19) звівся до розв'язку рівняння (24) в цілих числах *a* і *b*.

З наведених міркувань можна сформулювати наступне твердження.

Твердження 1. Для того, щоб рівняння (19) мало розв'язок, необхідно і досить, щоб z можна було представити у вигляді (24).

Значить, коли число z можна представити у вигляді (24), то покладаючи $C_0 = 2a,\ C_1 = b + (-1)^m a$, за формулами (16) знайдемо розв'язки рівняння (19).

Приклад 2. Розв'язати рівняння $7x^2 + y^2 = 9 \cdot 2^8$.

В нашому випадку $z = 9$. Число 9 можна представити у вигляді $7x^2 + b^2$ єдиним способом – $a = 0,\ b = \pm 3$.

Очевидно $m = 8 - 2 = 6$. Покладемо $C_0 = 0,\ C_1 = \pm 3$.

Нехай $C_1 = 3$. За рекурентними формулами (16) одержимо

$$\begin{aligned}
C_2 &= 2C_0 + C_1 = 2 \cdot 0 + 3 = 3,\\
C_3 &= 2C_1 - C_2 = 2 \cdot 3 - 3 = 3,\\
C_4 &= 2C_2 + C_3 = 2 \cdot 3 + 3 = 3,\\
C_5 &= 2C_3 - C_4 = 2 \cdot 3 - 9 = -3,\\
C_6 &= 2C_4 + C_5 = 2 \cdot 9 - 3 = 15,\\
C_7 &= 2C_5 - C_6 = 2 \cdot (-3) - 15 = 21.
\end{aligned}$$

Таким чином, $x = C_6 = 15,\ y = 2C_7 + C_6 = 2(-21) + 15 = -27.$

Зробимо перевірку: $7 \cdot 15^2 + (-27)^2 = 9(7 \cdot 25 + 81) = 9 \cdot 256 = 9 \cdot 2^8.$

Чи можливо довільне непарне натуральне число z представити у вигляді (24)? Звичайно, ні. Розглянемо ряд прикладів.

Приклад 3. Рівняння $7^n = 7a^2 + b^2$ для довільного $n \in N$ не має розв'язків в цілих числах a і b. Якби такі розв'язки існували, то $b = 7b_1$. З урахуванням цього одержимо рівняння $7^{n-1} = a^2 + 7b_1^2$, звідки $a_2 = 7a_1$, внаслідок чого отримаємо рівняння $7^{n-1} = a_1^2 + 7b_1^2$ того ж вигляду, що і початкове рівняння. На k-тому кроці одержимо $7^{n-2k} = 7a_k^2 + b_k^2$, де $a_k = 1$, або $b_k = 1$. При цих значеннях остання рівність неможлива. Дійсно, коли $b_k = 1$, то $7^{n-2k} = 7a_k^2 + 1$. Тут ліва частина ділиться на 7, а права – ні. Коли ж $a_k = 1$, то $7^{n-2k} = 7 + b_k^2$, звідки $b_k = 7b_{k+1}$, тобто $7^{n-2k-1} = 1 + 7b_{k-1}^2$, де знову ліва частина ділиться на 7, а права – ні.

Приклад 4. Рівняння

$$2^n + 1 = 7x^2 + y,\ \ n \in N \tag{25}$$

не має розв'язку в цілих числах.

Очевидно,

$$2^{n+1} \equiv \begin{cases} 0(m3), & \text{коли } n - \text{непарне},\\ 2(m3), & \text{коли } n - \text{парне}. \end{cases}$$

З іншого боку,

$$7x^2 + y^2 \equiv \begin{cases} 2(m3), & \text{коли } x \text{ і } y \text{ не діляться на 3},\\ 1(m3), & \text{коли тільки одне } x \text{ або } y \text{ ділиться на 3},\\ 0(m3), & \text{коли } x \text{ і } y \text{ діляться на 3}. \end{cases}$$

Із цих двох конгруенцій слідує, що можливі два випадки: 1) n – непарне, тоді x і y діляться на 3; 2) n – парне, тоді x і y не діляться одночасно на 3. Розглянемо перший випадок, коли n – непарне, x і y діляться на 3. Коли x і y діляться на 3, то $7x^2 + y^2$ ділиться на 9 лише в тому випадку, коли n – непарне і ділиться на 3, тобто число n має вигляд $n = 6k + 3$. Дійсно, $2^n + 1 = 2^{6k+3} + 1 = 8^{2k+1} + 1 \equiv (-1)^{2k+1} + 1 \equiv 0(m9)$.

Із всього викладеного випливає, що при $n = 6k + 3,\ n = 6k + 5$ рівняння (25) розв'язків не має.

Нехай $n = 6m + 2$, або $n = 6m + 4$. Лишки при діленні $7x^2 + y^2$ на 7 будуть такими, як і для y^2. Квадратичними лишками для 7 будуть 0, 1, 2, 4. Коли $n = 6m + 2$, то

$2^n + 1 = 2^{6m+2} + 1 = 64^m \cdot 4 + 1 = 5(m7)$. Коли $n = 6m + 4$, то $2^n + 1 = 2^{6m+4} + 1 = = 64^m \cdot 16 + 1 \equiv 17 \equiv 3(m7)$. В попередньому і цьому випадках жоден з лишків не співпадає з квадратичним. Тому при $n = 6m + 2$, $n = 6m + 4$ рівняння (25) розв'язків не має.

Звернемося до випадку $n = 6m + 3$. Очевидно, $2^n + 1 = 2^{6m+3} + 1 = 8 \cdot 2^6 + 1 = 8^{2m+1} + 1 = = 9(8^{2m} - 8^{2m-1} + \ldots - 1) = 7x^2 + y^2$. Оскільки x і y діляться на 3, то $x = 3u, y = 3v$, тоді $8^{2m} - 8^{2m-1} + 8^{2m-2} - 8^{2m-3} + \ldots - 1 = 7u^2 + v^2$.

З одного боку, $8^{2m} - 8^{2m-1} + 8^{2m-2} - \ldots - 1 \equiv 6(m7)$. З іншого – $7u^2 + v^2 \not\equiv 6(m7)$. Значить, при $n = 6m + 3$ рівняння (25) розв'язків не має.

Розглянемо наступну модифікацію рівняння Ейлера.

Твердження 2. Рівняння

$$7x^2 - y^2 = 2^n \tag{26}$$

для довільного натурального $n \geq 3$ не має розв'язків в цілих числах.

Наведемо доведення твердження 2. Очевидно, коли x і y – розв'язки рівняння (26), то x і y – непарні. Коли $n \geq 2$, то 2^n ділиться на 4, а $7x^2 - y^2$ не ділиться на 4 тому, що $7x^2 - y^2 = 7 - 1 = 6(m4)$. Таким чином, лишається $n = 1$, тобто маємо рівняння $7x^2 - y^2 = 2$. Цілком зрозуміло, що x і y не діляться одночасно на 7. Число y^2 при діленні на 7 може давати лишки 0, 1, 2, 4. Тоді $y^2 + 2$ при діленні на 7 може давати лишки 2, 3, 4, 6, тобто $y^2 + 2$ не ділиться на 7.

Розглянемо тепер узагальнення рівняння Ейлера в наступному плані. Будемо розглядати рівняння

$$5x^2 + 3y^2 = 2^n (n \geq 3, n \in N), \tag{27}$$

де x і y – непарні цілі числа.

Рівняння (27) запишемо у вигляді

$$8x^2 + 3(y - x)(y + x) = 2^n. \tag{28}$$

Можна вважати, що $y \neq x$, то існують ціле непарне $q \neq 0$ і натуральне $e \geq 1$ такі, що $y - x = q2^e$. В результаті заміни $y = x + q2^e$ рівняння (28) перетвориться у рівняння

$$8x^2 + 3 \cdot 2^{e+1} qx + 3 \cdot 2^{2e} \cdot q^2 = 2^n. \tag{29}$$

Коли $e \geq 2$, то з рівняння (29) слідує

$$x^2 + 2^{e+1} 3qx + 2^{2e-3} 3 \cdot q^2 = 2^{n-3}. \tag{30}$$

Зліва у рівнянні (30), оскільки x – непарне число, тому $n = 3$. Як було зауважено вище, при $n = 3$ одержуємо $x = \pm 1, y = \pm 1$. Розв'язки $x = 1, y = 1, x = -1, y = -1$ не підходять тому, що $x \neq y$. Коли $x = -1, y = -1$, або $x = 1, y = -1$, то при $e > 1$ рівняння (29) розв'язків не має, оскільки з рівності $y - x = 2^e q$ одержуємо $e = 1$. З цієї причини лишається розглянути випадки $e = 1$ і $e = 2$.

Коли $e = 1$, то рівняння (29) матиме вигляд

$$2x^2 + 3qx + 3q^2 = 2^{n-2}. \tag{31}$$

Коли $e = 2$, то отримаємо рівняння

$$x^2 + 3qx + 3 \cdot 2q^2 = 2^{n-3}. \tag{32}$$

Розглянемо спочатку рівняння (31). Нехай x і q – його розв'язки. Попередньо доведемо дві леми.

Лема 2. Рівняння

$$2a^2 + 3ab + 3b^2 = 1 \tag{33}$$

не має розв'язку в цілих числах.

Доведення. Очевидно, $a \neq 0$ і $b \neq 0$, тому $a - b \neq 0,\ b^2 \geq 1$.

Рівняння (33) запишемо у вигляді $2(a+b)^2 + b^2 = 1 + ab$. Звідси слідує, в силу того, що $b^2 \geq 1$, нерівність $ab > 0$. Оскільки $2(a+b)^2 > ab$ (нерівність рівносильна $a^2 + b^2 + (a+b)^2 + ab > 0$), то $2(a+b)^2 + b^2 > 1 + ab$.

Лема 3. Розв'язками рівняння

$$b^2 - 3ab + 3 \cdot 2a^2 = 1 \tag{34}$$

в цілих числах є пара чисел $a = 0,\ b = 1;\ a = 0,\ b = -1$.

Доведення. Очевидно, коли $a = 0$, то $b = \pm 1$.

Нехай $a \neq 0$. Рівняння (34) запишемо у вигляді

$$2(a-b)^2 + 2a^2 = 1 - ab. \tag{35}$$

З рівняння (34) слідує, що $b \neq 0$ (при $b = 0$ розв'язків у рівняння (34) немає). Для того, щоб рівняння (35) мало розв'язки, необхідно $ab < 0$. Оскільки $2a^2 > 1,\ ab < 0$, а нерівність $2(a-b)^2 \geq -ab$ рівносильна очевидній нерівності $(a-b)^2 + 3a^2 - ab \geq 0$, то $(2a-b)^2 + 2a^2 > 1 - ab$. Протиріччя.

Перейдемо до розгляду рівняння (31). Покладаючи $C_1 = x,\ C_0 = q,\ n - 2 = m$, його запишемо у вигляді

$$2C_1^2 + 3C_0C_1 + 3C_0^2 = 2^m. \tag{36}$$

Коли $m = 0$, то згідно з лемою 2, рівняння (36) не має розв'язків. Тому будемо вважати, що $m \geq 1$. У зв'язку з чим, рівняння (36) представимо у вигляді

$$3C_0(C_1 + C_0) = 2\left(2^{m-1} - C_1^2\right). \tag{37}$$

Оскільки C_1 і C_0 – непарні, то існує число C_2 таке, що $C_0 + C_1 = 2C_2$. Підставимо цей вираз у рівняння (37), одержимо рівняння

$$C_1^2 - 3C_1C_2 + 3 \cdot 2C_2^2 = 2^{m-1}. \tag{38}$$

Якщо у рівнянні (38) $C_2 = 0$, то оскільки C_1 – непарне, $m = 1$, тоді $C_1 = \pm 1, C_0 = \mp 1$. Нехай $C_2 \neq 0$, тоді $m > 1$. Дійсно, якби $m = 1$, то згідно з лемою 2 рівняння (36) розв'язку не мало б.

З рівняння (38) слідує, що C_2 – непарне число. Рівняння (38) запишемо у вигляді

$$C_1(C_1 - 3C_2) = 2\left(2^{m-2} - 3C_2^2\right). \tag{39}$$

По-перше, число $C_1 - 3C_2$ – парне; по-друге, воно відмінне від нуля (останнє слідує з рівняння (39)), тому існує число C_3 таке, що $C_1 - 3C_2 = 2C_3$. Підставляючи в (39), одержимо рівняння

$$2C_3^2 + 3C_2C_3 + 3C_2^2 = 2^{m-2}, \tag{40}$$

де $C_3 \neq 0$.

Рівняння (40) того виду, що і рівняння (36).

Продовжуючи цей процес, побудуємо послідовність $C_0, C_1, \ldots, C_m$, яка володіє тією властивістю, що для довільного $0 \le k \le m$

$$2^{m-k} = 3 \cdot 2C_{k+1}^2 - 3C_{k+1}C_k + C_k^2, \qquad \text{коли } k - \text{непарне},$$
$$2^{m-k} = 2C_{k+1}^2 + 3C_kC_{k+1} + 3C_k^2, \qquad \text{коли } k - \text{парне}.$$

При цьому, кожний член цієї послідовності $C_k(k \ge 1)$ виражається через C_{k-1} і C_{k+1} за формулами

$$C_{k-1} = \begin{cases} 2C_{k+1} - C_k, & \text{коли } k - \text{непарне}, \\ 2C_{k+1} + 3C_k, & \text{коли } k - \text{парне}. \end{cases} \tag{41}$$

На m-ому кроці, тобто при $m = k$, одержимо рівняння:

$$1 = 3 \cdot 2C_{m+1}^2 - 3C_{m+1}C_m + C_m^2, \qquad \text{коли } m - \text{непарне},$$
$$1 = 3 \cdot 2C_{m+1}^2 + 3C_mC_{m+1} + 3C_m^2, \qquad \text{коли } m - \text{парне},$$

в яких, згідно з лемою 3, перше рівняння має розв'язки $C_{m+1} = 0, C_m = \pm 1$, згідно з лемою 2, друге рівняння не має розв'язків. Зауважимо, що коли при значеннях $C_m = 1, C_{m+1} = 0$ одержуємо розв'язок $(x; y)$ рівняння (27), то при значеннях $C_m = -1, C_{m+1} = 0$ одержуємо розв'язок $(-x; -y)$.

Розглянемо рівняння (32). Покладемо $C_0 = x$, $C_1 = q$, одержимо $C_0^2 + 3C_0C_1 + 3 \cdot 2C_1^2 = 2^m$. Так само, як і при розв'язку рівняння (31), одержимо послідовність $C_0, C_1, \ldots, C_m$, яка володіє наступними властивостями: для довільного $0 \le k \le m$

$$2^{m-k} = 3 \cdot 2C_{k+1}^2 + 3C_{k+1}C_k + C_k^2, \qquad \text{коли } m - \text{парне},$$
$$2^{m-k} = 2C_{k+1}^2 - 3C_kC_{k+1} + 3C_k^2, \qquad \text{коли } m - \text{непарне}.$$

При $m = k$ одержимо

$$1 = 2C_{m+1}^2 - 3C_mC_{m+1} + 3C_m^2, \qquad \text{коли } m - \text{парне},$$
$$1 = 3 \cdot 2C_{m+1}^2 + 3C_mC_{m-1} + C_m^2, \qquad \text{коли } m - \text{непарне},$$

де

$$C_{k-1} = \begin{cases} 2C_{k+1} + 3C_k, & \text{коли } k - \text{парне}, \\ 2C_{k+1} - C_k, & \text{коли } k - \text{непарне}. \end{cases} \tag{42}$$

Перше рівняння, згідно з лемою 2, розв'язків не має, а друге, враховуючи лему 3, має розв'язки $C_{m+1} = 0, C_m = \pm 1$. Решта – $C_k(k > m)$. Зокрема, C_0 і C_1 знаходяться за рекурентними формулами (42).

Зауважимо, що коли при значеннях $C_{m+1} = 0, C_m = 1$ одержуємо розв'язок $(-x; y)$, то при $C_{m+1} = 0, C_m = -1$ одержимо розв'язок $(x; -y)$.

Для зручності послідовність $C_0, C_1, \ldots, C_m$ перенумеруємо у зворотному порядку. Тоді для розв'язку рівняння (31) одержимо рекурентні формули:

$$C_{k-1} = \begin{cases} 2C_{k-1} - C_k, & \text{коли } k - \text{непарне}, \\ 2C_{k-1} + 3C_k, & \text{коли } k - \text{парне}, \end{cases} \tag{43}$$

де $C_0 = 0$, $C_1 = \pm 1$, а самі розв'язки рівняння (27) можна подати за формулами

$$\begin{cases} x = C_{n-2}, \\ y = C_{n-2} + 2C_{n-1}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = C_{n-2}, \\ y = C_{n-2} + 4C_{n-3}. \end{cases} \tag{44}$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння $5x^2 + 3y^2 = 2^9$ в цілих числах.

В нашому випадку $n = 9$. Нехай $C_0 = 0, C_1 = 1$. За формулами (43) матимемо:

$$
\begin{aligned}
&C_2 = 2C_0 - C_1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1,\\
&C_3 = 2C_1 + 3C_2 = 2 \cdot 1 + (-1) = -1,\\
&C_4 = 2C_2 - C_3 = 2 \cdot (-1) - (-1) = -1,\\
&C_5 = 2C_3 + 3C_4 = 2 \cdot (-1) + 3(-1) = -5,\\
&C_6 = 2C_4 - C_5 = 2 \cdot (-1) - (-5) = 3,\\
&C_7 = 2C_5 + 3C_6 = 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 3 = -1,\\
&C_8 = 2C_6 - C_7 = 2 \cdot 3 - (-1) = 7.
\end{aligned}
$$

Таким чином, за формулами (44) одержимо $x = C_7 = -1,\ y = -1 + 2 \cdot 7 = 13$. Зробимо перевірку: $5(-1)^2 + 3 \cdot 13^2 = 5 + 3 \cdot 169 = 5 + 507 = 512 = 2^9$. Якщо $C_0 = 0,\ C_1 = -1$, то $x = -1,\ y = 13$.

Напрошується наступне зауваження. Як було доведено, у випадку, коли n – парне, рівняння (27) розв'язків не має. Коли n – парне, то права частина рівняння (27) є точним квадратом. У зв'язку з цим, як відомо, справедливий більш загальний результат, який можна знайти, наприклад, в [2].

Твердження 3. Коли x і y – цілі числа, то вираз $5x^2 + 3y^2$ не може бути точним квадратом.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Гальперин Г.А., Толпыго А.К.* Московские математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1986. – 303 с.
2. *Дэвенпорт Г.* Высшая арифметика. – М.: Наука, 1965. – 176 с.
3. *Коганов Л.М.* Об одном утверждении Леонарда Эйлера // Математика в школе, 1988. – № 1. – С. 74–75.
4. *Тахонг Куанг.* Простое доказательство одного утверждения Эйлера // Математика в школе, 1990. – № 6. – С. 60.

ЩЕХОРСЬКИЙ Анатолій Йосипович – доцент кафедри виробничого менеджменту Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

– теорія чисел.