Л.А. Панталієнко

РОЗРАХУНОК ОБЛАСТІ ДОПУСКІВ НА ТОЧКИ ПЕРЕМКНЕННЯ СТРУКТУРНО ЗАДАНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Наведено основні результати дослідження практичної стійкості (ПС) параметричних систем звичайних диференціальних рівнянь зі змінною структурою та розривними фазовими координатами. Чисельні критерії оцінки областей ПС використовуються для розв'язання задач розрахунку допусків на параметри структурно заданих систем керування.

При проектуванні малочутливих структурно заданих систем, зокрема прискорювально-фокусуючих [1], часто виникає необхідність в оцінюванні області допусків на параметри (точки перемкнення), що забезпечували б нормальне функціонування реального об'єкта [2, 3]. Умови нормальної працездатності можуть конкретизуватися як деякі (відомі) обмеження на вектор розкиду фазових координат, збуреної траєкторії, функцій чутливості або ж функціоналу якості [3]. На відміну від відомих методів [4], у роботі пропонується такого роду задачі розглядати з позицій практичної стійкості параметричних систем із змінною структурою [2]. При цьому основна увага приділяється чисельному розв'язанню задач розрахунку допусків при наявності динамічних обмежень на вектор розкиду станів вихідної системи.

1. <u>Задачі практичної стійкості та розрахунку допусків параметричних систем із змінною структурою.</u>

Припустимо, що рух об'єкта задається параметричною моделлю вигляду [2]

$$\frac{dx}{dt} = f^{i}(x,\, t,\, a), \quad \left(f^{i}(0,\, t,\, 0) \equiv 0\right), \quad t \neq t_i, \quad i = 1,\, 2,\, \dots,\, N; \tag{1}$$

$$x(t_i + 0) = \Phi_i\left(x(t_i - 0),\, t_i,\, \alpha\right), \quad i = 1,\, 2,\, \dots,\, N-1,$$

де $x = x(t,\alpha)$ – вектор фазових координат розмірності n; α – m – вимірний вектор параметрів ($\alpha \in G_\alpha$; $0 \in G$); $f^{(i)}(x, t, \alpha)$, $i = 1, 2, \dots, N$ – вектор-функції розмірності n, неперервні за своїми аргументами та диференційовні для всіх $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$, крім, можливо, точок перемкнення t_i, $i = 1, 2, \dots, N-1$ ($t_N = T$); $\Phi_i(x(t_i\text{-}0), t_i,)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$ – деякі відомі неперервні функції; $x(t_0 + 0) = x(t_0)$.

Будемо вважати нульовий розв'язок $x(t, 0) = 0$, $t \in [t_0, T]$ незбуреним розв'язком системи (1), що характеризує розрахунковий режим функціонування. Нехай Φ_t – множина допустимих станів вектора x у момент $t \in [t_0, T]$ ($0 \in \Phi_t$, $t \in [t_0, T]$), а G_0^x, G_0^α – множини допустимих початкових станів та параметрів системи (1) відповідно.

<u>Означення 1.1.</u> Незбурений розв'язок $x(t, 0) \equiv 0$ системи (1) назвемо $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$ – стійким, якщо її траєкторії не виходять за межі області Φ_t, $t \in [t_0, T]$ для початкових умов $x(t_0, \alpha) \in G_0^x$ та довільних $\alpha \in G_0^\alpha \subset G_\alpha$.

Якщо позначити через $\bar{\alpha}$, $\bar{x} = x(t, \bar{\alpha})$ – відповідно розрахункові значення вектора параметрів та станів (1), то відносно розкидів $\Delta x = x - \bar{x}$, $\Delta\alpha = \alpha - \bar{\alpha}$ дістанемо деяку систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \bar{f}^{(t)}(\Delta x,\, t,\, \Delta\alpha), \quad t \neq t_i, \quad i = 1,\, 2,\, \dots,\, N, \tag{2}$$

$$\left(\bar{f}^{(i)}(\Delta x,\, t,\, \Delta\alpha) = f^{(i)}(x,\, t,\, \alpha) - f^{(i)}(\bar{x},\, t,\, \bar{\alpha})\right).$$

<u>Означення 1.2.</u> Будемо говорити, що система (2) має $\{\Delta G_\alpha(\Delta\alpha), \Phi_t, t_0, T\}$ – оцінку допусків на параметри $\Delta\alpha$, якщо $\Delta x(t, \Delta\alpha) \in \Phi_t$, $t \in [t_0, T]$ для довільних $\Delta\alpha \in \Delta G_\alpha(\Delta\alpha)$.

В силу наведених означень задача розрахунку допусків являє собою задачу $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$ – стійкості у просторі векторів Δx, $\Delta\alpha$, якщо $x(t_0, \alpha) = X_0\alpha(X_0)$ – відома матриця розмірності $(n \times m)$. Для випадку нелінійних відносно α початкових умов здійснюється їх лінеаризація та оцінювання області допусків з позицій практичної стійкості [2, 3].

2. Дослідження задач практичної стійкості та допусків на точки перемкнення.

Нехай динаміка об'єкта описується системою із змінною структурою, де як параметри вибрано точки перемкнення t_i, $i = 1, 2, ..., N$:

$$\frac{dx}{dt} = f^{(i)}(x,t), (f^{(i)}(0,t) \equiv 0), \ \ t \neq t_i, \ \ i = 1, 2, ..., N; \tag{3}$$

$$x(t_i + 0) = \Phi_i(x(t_i - 0), t_i), \ \ i = 1, 2, ..., N - 1. \tag{4}$$

У загальному випадку моменти t_i, що визначають зміну одного рівняння (3) іншим, знаходяться з деяких умов, вигляду

$$F_i(x(t_i - 0), t_i) = 0, \tag{5}$$

де F_i – скалярні функції, неперервно-диференційовні за своїми аргументами ($i = 1, 2, ..., N-1$).

Послідовно інтегруючи систему (3) з урахуванням умов (4), (5), можна, в принципі, побудувати розривний розв'язок [4]: $x = x(t, x_0, t_1, t_2, ..., t_N)$.

Якщо ж розв'язок у момент перемкнення $t_i (i = 1, 2, ..., N)$ залишається неперервним, умови стрибків (4) перетворюються на умови неперервності:

$$x(t_i + 0) = x(t_i - 0), \ \ i = 1, 2, ..., N - 1. \tag{6}$$

Будемо вважати нульовий розв'язок $x(t, 0) \equiv 0$ незбуреним рухом системи (3), а дослідження практичної стійкості проводити за допомогою однозначних та неперервно диференційовних функцій типу Ляпунова $V^{(i)}(x, t, t_1, t_2, ..., t_N)$ (або $V^{(i)}(x, t, \tilde{t})$, де $\tilde{t} = (t_1, t_2, ..., t_N)^*$), $t \in]t_{i-1}, t_i[$, $i = 1, 2, ..., N$.

Означення 2.1. Функцію $V^{(i)}(x, t, \tilde{t})$ назвемо знаковизначеною додатно за змінною x на $]t_{i-1}, t_i[$, якщо існує така додатно означена функція $V_1^{(i)}(x, t)$, що $V^{(i)}(x, t, \tilde{t}) > V_1^{(i)}(x, t)$ при $\|x\| \neq 0$, $\tilde{t} \in G_{\tilde{t}}$ та $V^{(i)}(0, t, 0) \equiv 0$ для довільних $t \in]t_{i-1}, t_i[$, $(i = 1, 2, ..., N)$.

Теорема. Якщо для системи (3) існують додатно означені за змінною x на $]t_{i-1}, t_i[$ функції $V^{(i)}(x, t, \tilde{t})$, $i = 1, 2, ..., N$, що задовольняють умови

$$\{x : V^{(i)}(x, t, \tilde{t}) < 1\} \subset \Phi_t, \ t \in]t_{i-1}, t_i[, i = 1,2,...,N, \ \tilde{t} \in G_0^{\tilde{t}}; \tag{7}$$

$$\frac{\partial V^{(i)}(x, t, \tilde{t})}{\partial t} + grad_x^* V^{(i)}(x, t, \tilde{t}) f^{(i)}(x, t) \leq 0$$

при $x \in \{x : V^{(i)}(x, t, \tilde{t}) \leq 1\}$, $t \in]t_{i-1}, t_i[, i = 1,2,...,N$, $\tilde{t} \in G_0^{\tilde{t}}$; (8)

$$G_0^x \subset \{x : V^{(1)}(x(t_0, \tilde{t}), t_0, \tilde{t}) < 1\}, \ \ \tilde{t} \in G_0^{\tilde{t}}; \tag{9}$$

$$\begin{gathered} V^{(i-1)}(\Phi_i(x(t_i - 0), t_i, \tilde{t}) - V^{(i)}(x(t_i - 0, \tilde{t}), t_i - 0, \tilde{t}) \leq 0, \quad \tilde{t} \in G_0^{\tilde{t}}, \\ i = 1, 2, ..., N - 1. \end{gathered} \tag{10}$$

то незбурений розв'язок $x(t,0) \equiv 0$ системи (3) $\{G_0^x, G_0^{\tilde{t}} \Phi_t, t_0, T\}$ – стійкий.

Доведення. Припустимо, що умови теореми виконуються, але незбурений розв'язок системи (3) $\{G_0^x, G_0^{\tilde{t}} \Phi_t, t_0, T\}$ не є стійким. Це означатиме, що для деякого $\overset{=}{t} \in G_0^{\tilde{t}}$ існує такий індекс $\overset{=}{i} : 1 \leq \overset{=}{i} \geq N$, що в момент часу $\hat{t} \in]t_{\overset{=}{i}-1}, t_{\overset{=}{i}}[$ траєкторія системи (3), яка відповідає вектору параметрів $\overset{=}{t} \in G_0^{\tilde{t}}$, виходить за межі $\Phi_{\hat{t}}$. Тоді, згідно з умовою (7), у точці $\hat{t}$ буде виконуватись нерівність $V^{(\overset{=}{i})}(x(\hat{t}, \overset{=}{t}), \hat{t}, \overset{=}{t}) \geq 1$.

Враховуючи (8), (10), приходимо до співвідношення $V^{(1)}(x(t_0, \bar{\bar{t}}), t_0, \bar{\bar{t}}) \ge 1, \quad \bar{\bar{t}} \in G_0^{\bar{t}}$, що суперечить умові (9). Отже, наше припущення було неправильним, а твердження теореми має місце.

У неперервному випадку (6) слід умову (10) теореми замінити на таку:

$$V^{(i+1)}(x(t_i, \bar{t}) - V^{(i)}(x(t_i - 0, \bar{t}), t_i - 0, \bar{t}) \le 0, \quad \bar{t} \in G_0^{\bar{t}}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

За аналогією з попереднім пунктом, при збуренні розрахункового значення вектора параметрів $\bar{t} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_N)* \in \bar{G}_{\bar{t}} \subset G_{\bar{t}}$, одержуємо значення $(\bar{t}_1 + \Delta t_1, \bar{t}_2 + \Delta t_2, \ldots, \bar{t}_N + \Delta t_N)*$, $\Delta t = (\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_N)* \in \Delta G_{\bar{t}}(\Delta t)$, та відповідну йому збурену траєкторію системи (3) $x = x(t, x_0, \bar{t}_1 + \Delta t_1, \bar{t}_2 + \Delta t_2, \ldots, \bar{t}_N + \Delta t_N)$. Тоді вектори розкидів $\Delta x = x - \bar{x}$, $\Delta t = t - \bar{t}$ задовольнятимуть систему рівнянь

$$\frac{d\Delta x}{dt} = f^{(i)}(x,t) - f^{(i)}(\bar{x},t), \quad t \ne t_i, \quad i = 1,2,\ldots,N, \tag{11}$$

де $\bar{x} = x(t, x_0, \bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_N)$ – розрахункове (незбурене) значення вектора станів (3).

Задачу оцінки допусків сформулюємо таким чином: визначити множину допустимих параметрів $\Delta G_t(\Delta t)$ так, щоб траєторії системи (11) належали множині допустимих станів $\Phi_t, t \in [t_0, T]$.

<u>Означення 2.2.</u> Будемо говорити, що система (11) має $\{\Delta G_t(\Delta t), \Phi_t, t_0, T\}$ – оцінку допусків на вектор параметрів Δt, якщо $\Delta x(t, \Delta t) \in \Phi_t, t \in [t_0, T]$ для довільних $\Delta t \in \Delta G_{\bar{t}}(\Delta t)$.

Крім наведеної, має сенс розглядати й таку постановку: оцінити множину допусків $\Delta G_{\bar{t}}(\Delta t)$ так, щоб збурена траєкторія системи (3) не виходила за межі допустимої області $\bar{\Phi}_t, t \in [t_0, T]$. Інші варіанти задач розрахунку допусків на точки перемкнення можна формулювати за допомогою функцій чутливості [1–3].

<u>3. Чисельні критерії розрахунку допусків на точки перемкнення.</u>

Дослідимо задачу оцінювання області допусків для лінійної системи релейного типу:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)V(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{12}$$

$$V(t) = V_i = const, \quad t \in [t_{i-1}, t_i[, \quad i = 1,2,\ldots,N.$$

З метою одержання конструктивних алгоритмів розрахунку множини допусків задамо її у структурному вигляді $\Delta G_t(\Delta t) = \{\Delta t : \Delta t * R\Delta t \le c^2\}$ (R – відома симетрична матриця), а динамічні обмеження $\Phi_t, t \in [t_0, T]$ конкретизуємо [2, 3]:

$$\Phi_t \overset{\Delta}{=} \Gamma_t = \{\Delta x(t) : \left|\sum_{i=1}^{N} l_s^{(i)*}(t)\Delta x(t)\right| \le 1, \quad s = 1,2,\ldots,N\}, \quad t \in [t_0, T]; \tag{13}$$

$$\Phi_t \overset{\Delta}{=} \Psi_t = \{\Delta x(t) : \Psi(\Delta x(t), t) \le 1\}. \tag{14}$$

Припускається, що у співвідношеннях (13), (14) $l_s^{(i)}(t), s = 1,2,\ldots,\bar{N}, \ i = 1,2,\ldots, N$ – відомі n-вимірні вектори з кусково-неперевними елементами; $\psi(x,t)$ – неперервно-диференційовна за своїми аргументами скалярна функція (можливо, й недиференційовна за змінною t в точках перемкнення); $\Psi_t, t \in [t_0, T]$ – опукла замкнена множина, що містить нульову точку.

Нехай $x(t_0) = x_0$.

Критерій 1. Для $\{\Delta G_t(\Delta t), \Gamma_t, t_0, T\}$ – оцінки допусків на вектор параметрів Δt необхідно й достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$c^2 \le \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s \in 1,2,\ldots,\bar{N}} \left[\mathrm{P}^* R^{-1} \mathrm{P}\right]^{-1}, \tag{15}$$

де $\mathrm{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_N)^*, \mathrm{P}_i = l_s^{(i)*}(t) X(t, \xi_i) B(\xi_i) \Delta V^{(i+1)}; \Delta V^{(i+1)} = V_{i+1} - V_i; \xi_i \in]t_i, t_i + \Delta t_i[$, а матриця $X(t, \xi_i)$ задовольняє матричному рівнянню

$$\frac{dX(t,\xi_i)}{dt} = A(t)X(t,\xi_i) \tag{16}$$

при умові $X(\xi_i,\xi_i) = E(i = 1, 2,..., N)$. (17)

Доведення. Для кожного з часткових півпроміжків $[t_{i-1}, t_i[$ запишемо загальний розв'язок системи

$$\frac{d\Delta x}{dt} = A(t)\Delta x + B(t)\Delta V(t), \quad t \in [t_0, T] \tag{18}$$

у формі Коші:

$$\Delta x(t) = \int_{t_i}^{t_i+\Delta t_i} X(t,\tau)B(\tau)d\tau\Delta V^{(i+1)}, \quad t \in [t_i, t_i + \Delta t_i[, \quad i = 1, 2, ..., N$$

$$(\Delta V(t) = V_{i+1} - V_i, t \in [t_{i-1}, t_i[, \quad i = 1, 2, ..., N).$$

Застосовуючи до правої частини останньої рівності теорему про середнє

$$\Delta x(t) = X(t,\xi_i)B(\xi_i)\Delta V^{(i+1)}\Delta t_i, \quad t \in [t_i, t_i + \Delta t_i[, \quad \xi_i \in]t_i, t_i + \Delta t_i[, \quad i = 1, 2, ..., N,$$

подамо умову $\Delta x(t) \in \Gamma_t$, $t \in [t_0, \text{T}]$ у вигляді:

$$\Delta t \in \{\Delta t : P^*\Delta t| \le 1, \quad s = 1, 2, ..., N\}, \quad t \in [t_0, T].$$

Розв'язавши відповідну екстремальну задачу, дістанемо оцінку (15), що справджується як для умов (6), так і для випадку лінійних стрибків:

$$x(t_i + 0) = C_i x(t_i),$$

де C_i, $i = 1, 2, ..., N-1$, – відомі сталі матриці розмірності $n \times n$.

Критерій 2. Для $\{\Delta G_i(\Delta t), \Psi_t, t_0, T\}$ – оцінки допусків системи (18) необхідно й достатньо, щоб

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\Delta x \in \Psi'_t} \frac{[g^*(\Delta x,t)\Delta x]^2}{T^*R^{-1}T}, \tag{19}$$
$$g^*(\Delta x,t)\Delta x > 0, \quad \Delta x \in \Psi'_t, \ t \in [t_{i-1}, t_i[, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Тут $g^*(\Delta x,t) = grad^*_{\Delta x}\psi(\Delta x,t)$; $T = (T_1, T_2, ..., T_N)^*$, $T_i = g^*(\Delta x, t)X(t, \xi_i)B(\xi_i)\Delta V^{(i+1)}$, $i = 1, 2, ..., N$; Ψ'_t – межа області Ψ_t, $t \in [t_0, T]$.

Щоб отримати нерівність (19), слід множину Ψ_t, $t \in [t_0, T]$ апроксимувати дотичними гіперплощинами $(\Psi_t = \{\Delta x : g^*(\Delta x,t)\Delta x \le g^*(\Delta x, t)\Delta x, \ \Delta x \in \Psi'_t\}, \ t \in [t_0, T])$, та скористатися доведенням Критерію 1.

Зокрема, якщо матриця R – діагональна з діагональними елементами $R_1, R_2, ..., R_N$, оцінки (15), (19) набувають відповідно вигляду

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{s=1,2,...,N} \left[\sum_{i=1}^{N} P_i^2 \times \frac{1}{R_i}\right]^{-1};$$

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\Delta x\in\Psi'_t} \frac{[g^*(\Delta x,t)\Delta x]^2}{\sum_{i=1}^{N} T_i^2 \times \frac{1}{R_i}};$$

$$g^*(\Delta x,t)\Delta x > 0, \quad \Delta x \in \Psi'_t, \quad t \in [t_{i-1}, t_i[, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Для динамічних обмежень

$$\Phi_t \overset{\Delta}{=} \Gamma_t^{(i)} = \{\Delta x(t) : |l_s^{(i)*}\Delta x| \le 1, \quad s = 1, 2, ..., N\}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}[, \quad i = 1, 2, ..., N-1$$

за аналогією дістанемо оцінку множини допусків на i-ту точку перемкнення $\Delta G_{t_i}(\Delta t_i) = \{\Delta t_i : \Delta t_i^2 \times R_i \le c_i^2\}, \quad i = 1, 2, ..., N$:

$$C_i^2 \le \min_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \min_{s=1,2,...,N} \left[P_i^2 \times \frac{1}{R_i} \right]^{-1}. \tag{20}$$

Якщо ж система (12) стаціонарна, то фундаментальна матриця записується аналітично й відповідні оцінки матимуть вигляд

$$c^2 \le \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s=1,2,...,N} \left[\sum_{i=1}^{N} l_s^{(i)*}(t) Q_i^{-1}(t) l_s(t) \right]^{-1},$$

$$c^2 \le \min_{t \in [t_0, T]} \min_{\Delta x \in \Psi_t'} \frac{[g^*(\Delta x, t)\Delta x]^2}{\sum_{i=1}^{N} g^*(\Delta x, t) Q_i^{-1}(t) g(\Delta x, t)},$$

$$c_i^2 \le \min_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \min_{s=1,2,...,N} \left[l_s^{(i)*}(t) Q_i^{-1}(t) l_s^{(i)}(t) \right]^{-1},$$

де $Q_i^{-1}(t) = e^{A(t-\xi_i)} B \Delta V^{(i+1)} R_i^{-1} \Delta V^{(i+1)*} B^* e^{A^*(t-\xi_i)} (i = 1, 2, ..., N)$.

У більш загальному випадку вихідної системи

$$\frac{dx}{dt} = A^{(i)}(t)x + B(t)V(t), \quad t \ne t_i, \ i = 1, 2, ..., N$$

мають місце співвідношення (15), (19), (20), причому матриця $X(t, \xi_i) = X^{(i)}(t, \xi_i)$ й задовольнятиме рівнянню (16) при $A(t) = A^{(i)}(t)$ з умовою (17) ($i = 1, 2, ..., N$).

При наявності динамічних обмежень на функції чутливості $U^{(i)}(t) = \dfrac{\partial x(t)}{\partial t_i}, \ i = 1, 2, ..., N$ допуски на розрахункові точки перемкнення вдається визначити лише у неявному вигляді [1].

Запропоновані алгоритми можна застосовувати для оцінювання областей допусків й для більш складних систем (типу (3)). Для цього необхідно провести її лінеаризацію в околі розрахункового руху та перейти до системи з постійно діючими збуреннями [1, 3].

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф.* Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. − Киев: Наукова думка, 1985. − 304 с.
2. *Гаращенко Ф.Г., Панталиенко Л.А.* Исследование задач практической устойчивости систем с переменной структурой // Автоматика, 1993. − № 2. − С. 3−8.
3. *Гаращенко Ф.Г., Панталиенко Л.А.* Анализ и оценка параметрических систем на основе методов практической устойчивости // Проблемы управления и информатики, 1996. − № 1. − С. 145−161.
4. *Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М.* Чувствительность систем управления. − М.: Наука, 1975. − 320 с.

ПАНТАЛІЄНКО Людмила Анатоліївна − доцент кафедри вищої математики факультету електрифікації та автоматизації сільського господарства (ЕАСГ) Національного аграрного університету.

Наукові інтереси:

− дослідження математичних методів практичної стійкості та чутливості параметричних систем, їх аналіз та оцінка;

− дослідження робастих (працездатних в реальних умовах експлуатації) систем.