ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ

В.А. Салогуб

ПРО УЛЬТРАРЕЛЯТИВІСТСЬКУ ГРАНИЦЮ ХВИЛЬОВИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ЧАСТИНОК ЗІ СПІНАМИ $s = 3/2$ І $s = 2$

Для релятивістських рівнянь в гамільтоновій формі, які описують рух частинок зі спінами $s = 3/2$ і $s = 2$, знайдено ізометричне перетворення до представлення, зручного для переходу до ультрарелятивістської границі. В новому представленні записані генератори групи $P(1, 3)$.

Досить тривалий час інтенсивно досліджуються релятивістські хвильові рівняння для частинок з довільним спіном. Особливо актуальні дослідження рівнянь для частинок з високими спінами. Це викликано необхідністю опису багатьох, відкритих останнім часом, резонансів нестабільних високоенергетичних частинок з високими спінами.

У цій роботі релятивістські хвильові рівняння в гамільтоновій формі

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = H\Psi(\vec{x},t), \tag{1}$$

де $\Psi(\vec{x},t)$ – хвильова функція, яка має $2(2S+1)$ компонент, а гамільтоніан H має такий вигляд:

$$H = \rho_3\left(m + \frac{p^2}{2m} - \frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{2ms^2}\right) + \rho_1\frac{(\vec{S}\vec{p})}{s} - i\rho_2\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{2ms^2}\right), \tag{2}$$

де m – маса частинки; $\vec{p}$ – оператор імпульсу; s – спін частинки; S_a $(a = 1, 2, 3)$ – спінові матриці частинки розмірності $2(2S+1)\times 2(2S+1)$; ρ_1, ρ_2, ρ_3 – матриці Паулі такої ж розмірності для випадку $s = 3/2$ і $s = 2$, перетворені до представлення, зручного для переходу до ультрарелятивістської границі.

Рівняння (1) було одержано автором [1] шляхом виділення гамільтоніана з відомих релятивістських рівнянь Герлі [2].

Провівши для спинів $s = 3/2$ і $s = 2$ ізометричні перетворення

$$\begin{aligned}\Psi' &= V\Psi,\\ H' &= VHV^{-1},\end{aligned} \tag{3}$$

одержуємо з (1) таке рівняння:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi' = H'\Psi'. \tag{4}$$

При цьому оператори H перетворюються до виду

$$s = \frac{3}{2} \qquad H' = \frac{1}{3}\rho_3 E\left(7 - 4S_p^2\right)S_p, \tag{5}$$

$$s = 2 \qquad H' = \rho_3 E\left(1 - \frac{8}{3}S_p^2 + \frac{2}{3}S_p^4\right), \tag{6}$$

де $E = \left(p^2 + m^2\right)^{\frac{1}{2}}$, а $S_p = \frac{\vec{S}\vec{p}}{p}$ – спіральні частинки; $P = \left(p_X^2 + p_y^2 + p_z^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Оператори V і V^{-1} знайдені нами у вигляді

$$\begin{aligned}V &= A + i\rho_1 B + i\rho_2 C,\\ V^{-1} &= A - i\rho_1 B - i\rho_2 C,\end{aligned} \tag{7}$$

де для випадку $s = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} A &= \left(0{,}5+0{,}25Q\cdot[H,\rho_3]_+\right)^{\frac{1}{2}},\\ B &= 0{,}25i\cdot[H,\rho_1]_+ + Q\cdot A^{-1},\\ C &= \frac{1}{3}p\cdot S_p\cdot Q\cdot A^{-1},\quad Q=\frac{3}{E(7-4S_p^2)S_p}, \end{aligned} \tag{8}$$

а для випадку $s = 2$

$$\begin{aligned} A &= \left(0{,}5+0{,}25Q_1\cdot[H,\rho_3]_+\right)^{\frac{1}{2}},\\ B &= 0{,}25i\cdot[H,\rho_1]_+ + Q_1\cdot A^{-1},\\ C &= 0{,}25p\cdot S_p\cdot Q_1\cdot A^{-1},\\ Q_1 &= E^{-1}\left(1-\frac{8}{3}S_p^2+\frac{2}{3}S_p^4\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Слід відмітити, що нове представлення для гамільтоніанів H' (5) і (6) має такі позитивні властивості:

– оператори (5) і (6) ермітові відносно загальноприйнятого у квантовій механіці скалярного добутку

$$\left(\Psi_1',\Psi_2'\right)=\int d^3x\left(\Psi_1'\right)^+\Psi_2'; \tag{10}$$

– матрична вимірність операторів H' – $2(2S+1)$ x $2(2S+1)$. Це гарантує відсутність "зайвих" (нефізичних) компонент в теорії частинка–античастинка;

– оператори (5) і (6) допускають коректний перехід до ультрарелятивістської границі. Так при $m\to 0$

$$s=\frac{3}{2}\qquad H'=\frac{1}{3}\rho_3p\left(7-4S_p^2\right)S_p, \tag{11}$$

$$s=2\qquad H'=\rho_3p\left(1-\frac{8}{3}S_p^2+\frac{2}{3}S_p^4\right); \tag{12}$$

– оператори H' мають явно виражену залежність від оператора спіральності S_p, який, у свою чергу, є оператором Казіміра для представлення $D(0,s)$ групи $P(1,3)$. Генератори групи $P(1,3)$ у новому представленні задаються формулами:

$$\begin{aligned} p_0 &= H',\\ a_a &= -i\frac{\partial}{\partial x_a},\\ J_{ab} &= x_ap_b-x_bp_a+S_{ab},\\ J_{oa} &= tp_a-\frac{1}{2}[x_a,H']_+-\frac{m}{2Ep}\left(S_a-\frac{p_aS_p}{p}\right)H', \end{aligned} \tag{13}$$

де a, b, c – цикл 1, 2, 3.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Салогуб В.А.* О преобразовании релятивистских уравнений Герли к гамильтоновой форме, не содержащей лишних компонент // Праці Житомирського філіалу КПІ, 1993. – Вип. 1. – С. 13–16.
2. *Hurley W.J.* Relativistic Wave Equations for Particles with Arbitrary Spin // Phys. Rev. – D, 1971, 4. – № 12. – P. 3605–2612.

САЛОГУБ Віктор Анатолійович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики і хімії Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

– дослідження групових властивостей хвильових рівнянь квантової механіки.