В.Ю. Вінник

ПОБУДОВА ТАБЛИЦЬ МНОЖЕННЯ ПОДВІЙНИХ ГРУП. АЛГЕБРАЇЧНИЙ МЕТОД

Показано, що побудова таблиць множення подвійної групи зводиться до приписування двійкових поміток клітинам таблиці множення вихідної точкової групи. Виведено систему рівнянь, якій мають задовольняти помітки.

В цій роботі досліджено проблему побудови таблиць множення подвійної групи за умови, що відома таблиця множення відповідної точкової групи. Практична цінність проведеного дослідження грунтується на тому, що єдина на цей час монографія [3], в якій зібрано таблиці множення та незвідні зображення подвійних груп, як виявилося, містить помилки.

Ще одна причина інтересу до даної теми полягає в тому, що методи побудови таблиць множення подвійних груп і взагалі підходи до розгляду подвійних груп, що їх викладено в літературі, починаючи від класичних праць [2, 5] і широко відомих підручників [4] до публікацій останніх років [1], інтуїтивні за своєю природою, майже не піддаються алгоритмізації та можуть бути застосовані лише для часткових випадків. На відміну від згаданих методів, розроблений автором метод за своєю природою чисто алгебраїчний, зовсім не грунтується на стереометричних міркуваннях та орієнтований на комп'ютерну реалізацію.

Нагадаємо деякі означення та символи, що використовуватимуться надалі. Точковою групою називається група поворотів та дзеркальних відображень тривимірного простору, що залишають нерухомою деяку точку. Це означає, що всі осі поворотів та площини дзеркальних відображень мають проходити через дану точку. Детальніший виклад точкових та подвійних груп міститься в [4]. Щоб спростити розгляд, надалі йтиметься лише про групи поворотів. Тотожне перетворення, що виконує у групі роль одиничного елемента, позначається символом E. Поворот на кут $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ відносно деякої осі позначається C_n. Ступінь елемента запроваджується в звичайний спосіб: символу C_n^k, $k \in Z$, відповідає поворот на кут $\varphi = \frac{2\pi k}{n}$. Орієнтація осі повороту в більшості випадків зрозуміла з контексту, інакше в символі явно вказується вектор напрямку осі повороту, наприклад, $C_n^k(a)$. Очевидно, $C_n^n = E$.

Подвійна група будується, виходячи з точкової групи. Кожному елементові g точкової групи відповідають два елементи подвійної групи, які позначаються g' та g''. Елемент E' відіграє в подвійній групі роль одиничного елемента та має окремий символ E, елемент E'' позначається символом $\overline{Q}$. Властивості останнього визначаються співвідношеннями:

$$\overline{Q}^2 = E, \tag{1}$$

$$g' = \overline{Q} \cdot g'' = g'' \cdot \overline{Q}, \tag{2}$$

$$g'' = \overline{Q} \cdot g' = g' \cdot \overline{Q}. \tag{3}$$

Геометричний зміст елементів подвійної групи такий. Формальним чином поворот на кут 2π вважається нетотожним перетворенням $\overline{Q}$. Натомість, тотожним перетворенням E в подвійній групі вважається поворот на кут 4π. Отже,

$$(C_n')^n = \overline{Q}, \tag{4}$$

$$(C_n')^{2n} = E. \tag{5}$$

Побудова таблиць множення подвійної групи, яка відповідає циклічній точковій групі, очевидно, здійснюється тривіальним чином, для цього достатньо безпосередньо використовувати співвідношення (1)–(5). Проблема виникає тоді, коли у групі є декілька осей симетрії різної орієнтації. Наприклад, точкова група O містить елементи $C_4(1,0,0)$ и $C_4(0,1,0)$. Неважко переконатися, що їхнім добутком буде $C_3(1,1,1)$. Але зовсім не очевидно, яким буде у відповідній подвійній групі добуток $C_4(1,0,0)' \cdot C_4(0,1,0)'$: $C_3(1,1,1)'$ чи $C_3(1,1,1)''$. Отже, для побудови таблиці множення довільної подвійної групи потрібен спеціальний алгоритм.

Всюди надалі символом G буде позначено точкову групу, символом $\overline{G}$ — відповідну подвійну групу, а символом H — довільну скінченну групу. Запис $N \, mod \, 2$, де N — ціле невід'ємне число, означає залишок від ділення N на 2. Клітиною таблиці множення довільної групи H назвемо пару її елементів (a, b), $a, b \in H$. Іноді клітину таблиці множення позначатимемо однією буквою: $K = (a, b)$. Нарешті введемо спеціальні символи для елементів подвійної групи: $\langle g | i \rangle$ де $g \in G$, $i \in \{0, 1\}$ (називатимемо i *знаком* елемента подвійної групи). В нових позначеннях, зокрема, матимемо $\overline{E} = \langle E | 0 \rangle$, $\overline{Q} = \langle E | 1 \rangle$.

В подальшому буде використано той факт, що відображення подвійної групи у відповідну точкову є гомоморфізм. Саме, якщо в точковій групі здійснюється рівність $a \cdot b = c$, то для будь-яких $i, j \in \{0, 1\}$ існує таке $k \in \{0, 1\}$, що

$$\langle a | i \rangle \cdot \langle b | j \rangle = \langle c | k \rangle. \tag{6}$$

Очевидно, ядром гомоморфізму є підгрупа $\{\overline{E}, \overline{Q}\} = \{\langle E | 0 \rangle, \langle E | 1 \rangle\}$.

Тепер виведемо одну важливу рівність. Нехай відомо таке k, що

$$\langle a | 0 \rangle \cdot \langle b | 0 \rangle = \langle a \cdot b | k \rangle. \tag{7}$$

З (2), (3), а також з асоціативності групового множення випливає

$$\langle a | 0 \rangle \cdot \langle b | 1 \rangle = \langle a | 0 \rangle \cdot (\langle b | 0 \rangle \cdot \langle E | 1 \rangle) = (\langle a | 0 \rangle \cdot \langle b | 0 \rangle) \cdot \langle E | 1 \rangle. \tag{8}$$

Застосувавши (6), а також властивості додавання за модулем 2, отримаємо:

$$\langle a | 0 \rangle \cdot \langle b | 1 \rangle = \langle a \cdot b | k \rangle \cdot \langle E | 1 \rangle = \langle a \cdot b | (k+1) \, mod \, 2 \rangle = \langle a \cdot b | 1 - k \rangle. \tag{9}$$

Аналогічно:

$$\langle a | 1 \rangle \cdot \langle b | 0 \rangle = \langle a \cdot b | (k+1) \, mod \, 2 \rangle = \langle a \cdot b | 1 - k \rangle, \tag{10}$$

$$\langle a | 1 \rangle \cdot \langle b | 1 \rangle = \langle a \cdot b | (k+2) \, mod \, 2 \rangle = \langle a \cdot b | k \rangle. \tag{11}$$

Отже, за умови (6) для будь-яких $i, j \in \{0, 1\}$ виконується рівність

$$\langle a | i \rangle \cdot \langle b | j \rangle = \langle a \cdot b | (k + i + j) \, mod \, 2 \rangle. \tag{12}$$

Звідси випливає найважливіший для подальшого розгляду висновок. Для того, щоб однозначно задати таблицю множення подвійної групи, *достатньо* кожній клітині (a, b), $a, b \in G$, таблиці множення точкової групи поставити у відповідність число $w(a, b) \in \{0, 1\}$ (назвемо його *позначкою* даної клітини) та вважати

$$\langle a | 0 \rangle \cdot \langle b | 0 \rangle = \langle a \cdot b | w(a, b) \rangle. \tag{13}$$

Тоді, врахувавши (12), маємо рівність

$$\boxed{\langle a | i \rangle \cdot \langle b | j \rangle = \langle a \cdot b | (i + j + w(a, b)) \, mod \, 2 \rangle.} \tag{14}$$

Отже, задача побудови таблиці множення подвійної групи зводиться до задачі пошуку позначок $w(g, h)$ для всіх клітин таблиці множення точкової групи, $g, h \in G$.

Тепер потрібно сформулювати вимоги до сукупності позначок $w(g, h)$. Виходитимемо з очевидного твердження, що таблиця множення, яку отримано за формулою (14), повинна бути таблицею множення *групи*, тобто вона має задовольняти груповим аксіомам:

1. існування одиничного елемента;
2. існування елемента, оберненого до даного;
3. асоціативність групового множення.

Існування одиничного елемента легко забезпечити, якщо покласти (для всіх елементів точкової групи, $g \in G$):

$$w(E, g) = w(g, E) = 0. \tag{15}$$

Існування елемента, оберненого до даного, випливає з таких міркувань. Якщо (для певного $g \in G$) значення позначки $w(g, g^{-1}) = 0$, то

$$\langle g | k \rangle \cdot \langle g^{-1} | k \rangle = \langle g \cdot g^{-1} | (k + k + 0) \, mod \, 2 \rangle = \langle E | 0 \rangle = \overline{E}. \tag{16}$$

Якщо ж $w(g, g^{-1}) = 1$, то

$$\langle g \mid k\rangle \cdot \langle g^{-1} \mid 1-k\rangle = \langle g \cdot g^{-1} \mid (k+1-k+1)\, mod\, 2\rangle = \langle E \mid 0\rangle = \overline{E}\,. \qquad (17)$$

Отже, елемент, обернений до даного, існує за будь-яких значень поміток.

В загальному вигляді аксіома асоціативності має вигляд $(f \cdot g)\cdot h = f \cdot (g \cdot h)$. Перепишемо цю рівність, позначивши добуток кожних двох елементів окремою буквою:

$$\begin{cases} f \cdot g = s, \\ s \cdot h = t, \\ g \cdot h = u, \\ f \cdot u = t. \end{cases} \qquad (18)$$

Для подвійної групи ця система набуває вигляду

$$\begin{cases} \langle a|i\rangle \cdot \langle b|j\rangle = \langle p|l\rangle \\ \langle p|l\rangle \cdot \langle c|k\rangle = \langle q|m\rangle \\ \langle b|j\rangle \cdot \langle c|k\rangle = \langle r|n\rangle \\ \langle a|i\rangle \cdot \langle r|n\rangle = \langle q|m\rangle \end{cases} \qquad (19)$$

де $a,b,c,p,q,r \in G$ — елементи точкової групи, $p = a \cdot b$, $q = p \cdot c$, $r = b \cdot c$.

У відповідності до (14) знаходимо l з першого рівняння системи:

$$\langle p|l\rangle = \langle a|i\rangle \cdot \langle b|j\rangle = \langle a \cdot b \,|\, (i + j + w(a,b))\, mod\, 2\rangle, \qquad (20)$$

або

$$l = (i + j + w(a,b))\, mod\, 2\,. \qquad (21)$$

З другого рівняння таким же чином знаходимо m:

$$m = (l + k + w(p,c))\, mod\, 2\,. \qquad (22)$$

Підставивши отриманий раніше вираз для l, отримаємо

$$m = ((i + j + w(a,b))\, mod\, 2 + w(p,c))\, mod\, 2\,, \qquad (23)$$

або, якщо використати властивості додовання за модулем 2:

$$m = (i + j + k + w(a,\, b) + w(p,\, c))\, mod\, 2\,. \qquad (24)$$

З третього рівняння системи можна виразити n:

$$n = (j + k + w(b,\, c))\, mod\, 2\,. \qquad (25)$$

З четвертого рівняння знов виражаємо m:

$$m = (i + n + w(a,r))\, mod\, 2 = (i + j + k + w(b,c) + w(a,r))\, mod\, 2\,. \qquad (26)$$

Нарешті, прирівнюємо праві частини (24) и (26):

$$(i + j + k + w(b,c) + w(a,r))\, mod\, 2 = (i + j + k + w(a,b) + w(p,c))\, mod\, 2\,. \qquad (27)$$

Після нескладних перетворень рівняння набуває остаточного вигляду:

$$\boxed{(w(a,b) + w(a \cdot b, c) + w(b,c) + w(a, b \cdot c))\, mod\, 2 = 0\,.} \qquad (28)$$

Процедурна інтерпретація рівняння (28) така: якщо відомі будь-які три з чотирьох значень $w(a,b)$, $w(p,c)$, $w(b,c)$, $w(a,r)$, то четверте може бути безпосередньо знайдене з рівняння.

Остання умова, яка накладається на значення поміток, є наслідком означення подвійної групи, а саме з (4) і (5):

$$w(C_n, C_n^i) = 0\,,\ i = 1,2,\ldots,n-2\,, \qquad (29)$$

$$w(C_n, C_n^{n-1}) = 1\,. \qquad (30)$$

Розв'язавши (за умов (15), (29), (30)) систему лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду (28) (де змінні a,b,c проходять кожна всю точкову групу G), відповідно до (14) отримаємо закон множення відшукуваної подвійної групи. При цьому для вибору методу розв'язку СЛАР потрібно враховувати надзвичайну розрідженість матриці коефіцієнтів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Губанов В.А., Овандер Л.Н.* Развитие метода Бете для построения двузначных представлений пространственных и двузначных проективных представлений точечных групп // Праці Житомирського філіалу КПІ, вип. 1. Серія Б. Фундаментальні науки, історія, філософія, культура, 1993. — С. 3–12.
2. *Зейтц Ф.* О приведении пространственных групп // В кн.: *Нокс Р., Голд А.* Симметрия в твердом теле. — М.: Наука, 1970. — С. 172–186.
3. *Ковалев О.В.* Неприводимые и индуцированные представления и копредставления федоровских групп. — М.: Наука, 1986. — 368 с.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: В 10 т. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.: Наука, 1989. — 768 с.
5. *Опеховский В.* О кристаллографических двойных группах // В кн.: *Нокс Р., Голд А.* Симметрия в твердом теле. — М.: Наука, 1970. — С. 271–281.

ВІННИК Вадим Юрійович – студент V курсу факультету інформаційно-комп'ютерних технологій Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
- теоретичні основи програмування;
- програмне моделювання математичних абстракцій;
- об'єктно-орієнтоване програмування.