Д.О. Жовновський

МЕТОД ШТРАФНИХ ФУНКЦІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗМІЩЕННЯ ДИСКРЕТНИХ ДЖЕРЕЛ ФІЗИЧНОГО ПОЛЯ

(Науковий керівник – кандидат фізико-математичних наук, доцент Яремчук С.І.)

Розглядається задача оптимізації розміщення джерел фізичних полів. Обгрунтовується можливість використання методу штрафних функцій для розв'язання цієї задачі. Наводиться приклад побудови області припустимих розв'язків задачі для випадку, коли джерела мають форму n-вимірних прямокутників.

В останній час у зв'язку з потребами практики високими темпами розвивається теорія оптимального управління. Серед задач, що розв'язуються на основі цієї теорії, важливе місце посідає задача оптимального розміщення джерел фізичних полів із заданими геометричними та фізичними характеристиками, яка виникає у процесі розробки складних систем, характеристики яких залежать від поведінки поля. Так, наприклад, однією з проблем, що виникають при розробці мікроелектронної апаратури, є проблема забезпечення теплового режиму. Це, зокрема, задача створення максимальної рівномірности температури елементів конструкції, задача мінімізації температури окремого елемента. Такі ж задачі виникають і в інших галузях науки і техніки.

Фізичні поля в розглядуваних задачах можуть бути силовими, дифузійними, електромагнітними та іншими. В залежності від природи джерел є скалярні або векторні фізичні поля. Вони можуть бути як стаціонарними, так і нестаціонарними. Але завжди виникає необхідність розв'язання однієї і тієї ж задачі – потрібно в заданій області розмістити джерела поля з заданими геометричними та фізичними характеристиками таким чином, щоб отримати екстремум відповідної функції мети і задовольнити наперед заданим обмеженням, накладеним на параметри проектованої системи.

Постановці вказаної задачі і дослідженню одного з методів її розв'язання присвячена дана робота.

Розглядувана тут задача є задачею оптимізації, в якій керованими змінними виступають параметри розміщення джерел. Функція мети може являти собою:

1) значення поля у фіксованій точці області;

2) найбільше значення поля в області;

3) найбільше із значень поля у полюсах джерел, що розміщуються.

Основними характеристиками джерела у таких задачах є інтенсивність, геометрична форма і розміщення джерела у просторі. Для визначення положення джерела в просторі введемо поняття його полюса [1].

Зв'яжемо з джерелом рухому систему координат, а з областю, в якій він розміщений, – нерухому систему координат. Виберемо положення рухомої системи так, щоб при початковому положенні джерела рухома система координат співпадала з нерухомою. Початок рухомої системи координат назвемо полюсом джерела. Тоді розміщення i-го джерела визначиться вектором $Z^i = (x^i, \theta^i)$, де вектор x^i визначає координати полюса, а θ^i – поворот джерела при заданому положенні полюса (поворот рухомої системи координат). В R^3, наприклад, $Z^i = (\xi^i, \eta^i, \zeta^i, \alpha^i, \beta^i, \gamma^i)$, де α^i, β^i, γ^i – кути орієнтації джерела (кути Ейлера).

Очевидно, розміщення m джерел визначиться вектором $Z = (Z^1, Z^2, \ldots, Z^m)$.

Побудуємо математичну модель задачі.

Нехай в n-вимірному евклідовому просторі є обмежена замкнута область Ω, що містить джерела фізичного поля $D_1, D_2, \ldots, D_m$.

Фізичне поле, створюване джерелами і навколишньою середою, описується крайовою задачею вигляду

$$Lu = f, \tag{1}$$

$$B_j u = \varphi_j, j = 1, 2, \ldots, k, \tag{2}$$

де L – заданий оператор; u – функція, що характеризує просторово-часовий розподіл поля; B_j – задані оператори, що характеризують початкові, граничні умови і умови стикання на границях розділу середи; φ_j – задані функції; f – функція, що характеризує просторово-часовий розподіл джерел в області Ω і має вигляд

$$f(x,t,Z)=\begin{cases}A^i\left(x,t,Z^i\right), & \text{якщо } x\in D_i\\ 0, & \text{якщо } x\notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} D_i\end{cases}, \tag{3}$$

де t – час; Z – параметр розміщення джерел; $x\in R^n$.

На розміщення джерел накладаються геометричні обмеження, які являють собою [1]:

а) умови, що характеризують взаємне розміщення джерел поля;

б) умови належності джерел області Ω;

в) умови неперетинання джерел поля з областями заборони $K_s\subset\Omega$ ($s = 1, 2, \ldots, r$), які мають контури k_s.

Якщо між джерелами D_i і D_j задана мінімально можлива відстань l_{ij}, між джерелом D_i і кордоном Γ області Ω – l_i, між джерелом D_i і кордоном k_s області заборони K_s – l_{is}, то умови а), б) і в) представляються відповідно у вигляді наступних співвідношень:

$$\rho_{ij}\left(D_i,D_j\right)-l_{ij}\geq 0\ \left(i\neq j;\ i,j=1,2,\ldots,m\right),$$
$$\rho_i\left(R^n\setminus\Omega,D_i\right)-l_i\geq 0\ \left(i=1,2,\ldots,m\right),$$
$$\rho_{is}\left(D_i,K_s\right)-l_{is}\geq 0\ \left(i=1,2,\ldots,m;\ s=1,2,\ldots,r\right).$$

Таким чином, обмеження на розміщення джерел в області Ω представляються у загальному випадку системою відповідних нерівностей:

$$\begin{cases}\varphi_{ij}\left(Z^i,Z^j,l_{ij}\right)\leq 0 & \left(i\neq j;\ i,j=1,2,\ldots,m\right),\\ \psi_i\left(Z^i,l_i\right)\leq 0 & \left(i=1,2,\ldots,m\right),\\ \eta_{is}\left(Z^i,l_{is}\right)\leq 0 & \left(i=1,2,\ldots,m;\ s=1,2,\ldots,r\right).\end{cases} \tag{4}$$

Система обмежень (4) визначає G – область зміни параметра Z.

Слід знайти таке розміщення Z джерел D_1, D_2, ..., D_m в області Ω, при якому задана функція мети досягала б свого екстремального значення.

Функція мети залежить від вектора Z і може мати найрізноманітніше аналітичне подання:

$$\chi(Z)=\chi\left(Z^1,Z^2,\ldots,Z^m\right). \tag{5}$$

Таким чином, поставлена задача зводиться до відшукання екстремуму $\chi(Z)$ на множині G.

Розглянемо особливості поставленої задачі:

1) задача має велику вимірність, оскільки вимірність простору параметрів розміщення дорівнює $(2n-1)m$, де n – вимірність простору, що містить область Ω, а m – кількість джерел, що змінюється на практиці в середньому від 5 до 100;
2) кількість нерівностей, що визначають множину G, квадратично залежить від кількості джерел, що розміщуються;
3) функція мети $\chi(Z)$ у загальному випадку є багатоекстремальною;
4) область зміни параметра Z у загальному випадку є багатозв'язною, а також незв'язною;
5) значення $\chi(Z)$ можна отримати лише розв'язавши крайову задачу (1), (2), що досить трудомістко і вимагає великих обчислювальних витрат.

Тобто ми маємо задачу умовної оптимізації на множині припустимих розв'язків, яка в загальному випадку має досить складну структуру. Тому представляється доцільним застосувати до розв'язання цієї задачі метод штрафних функцій.

Метод штрафних функцій оснований на перетворенні вихідної задачі з обмеженнями в послідовність задач безумовної оптимізації на всьому просторі R^n, в якій враховані обмеження, що накладаються на множину припустимих розв'язків [2]. Ці обмеження враховуються шляхом зміни вихідної функції мети.

За допомогою функцій, що задають обмеження, будується так званий штраф, що додається до цільової функції вихідної задачі таким чином, що порушення будь-якого з обмежень стає невигідним з точки зору отриманої задачі безумовної оптимізації.

Нехай нам необхідно розв'язати задачу умовної оптимізації функції мети $\chi(x)$ на множині припустимих розв'язків X:

$$\begin{aligned} &\chi(x) \to min, \\ &x \in X = \left\{x \in R^n : \varphi_i(x) \le 0, h_j(x) = 0, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, l\right\} \end{aligned} \tag{6}$$

Ввівши штрафну функцію $g(x, C)$, отримаємо

$$\Phi(x,C) = \chi(x) + g(x,C) \to min, \tag{7}$$

де C – деякий параметр.

Штрафна функція повинна визначати позитивний штраф у неприпустимих точках і не штрафувати припустимі точки.

За поведінкою штрафні функції поділяються на два види:

а) внутрішня штрафна функція або бар'єрна – швидко зростає при наближенні до кордону множини X зсередини, немовби перешкоджаючи виходу з допустимої області, ставлячи бар'єр;

б) зовнішня штрафна функція – швидко зростає при виході за кордон області допустимих значень.

Недолік внутрішніх штрафних функцій – за початкове наближення x^0 необхідно вибирати припустиму точку, тобто точку, яка належить множині припустимих розв'язків X, що саме по собі в загальному випадку є досить трудомісткою задачею.

Метод зовнішніх штрафних функцій вільний від цього недоліку. Як x^0 можна брати будь-яку точку. Але в даному методі необхідно враховувати, що x^k (k-те наближення розв'язку) може не належати множині припустимих розв'язків X.

Застосуємо метод штрафних функцій до задачі оптимального розміщення джерел фізичних полів.

Нам необхідно розв'язати задачу умовної оптимізації функції мети $\chi(Z)$ на множині G зміни параметра Z, яка в загальному випадку визначається системою обмежень (4). Таким чином, маємо наступну задачу:

$$\begin{aligned} &\chi(Z) \to min, \\ &\begin{cases} \varphi_{ij}\left(Z^i, Z^j, l_{ij}\right) \le 0 & (i \ne j;\ i, j = 1, 2, \dots, m), \\ \psi_i\left(Z^i, l_i\right) \le 0 & (i = 1, 2, \dots, m), \\ \eta_{is}\left(Z^i, l_{is}\right) \le 0 & (i = 1, 2, \dots, m;\ s = 1, 2, \dots, r). \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

Оскільки вибрати як початкове наближення Z^{*0} припустиму точку в загальному випадку є досить складною задачею, то для розв'язання задачі оптимізації скористуємось методом зовнішніх штрафних функцій.

Виходячи з того, що у нас є обмеження тільки типу "≤ 0", як функцію штрафу будемо використовувати функцію вигляду

$$g(Z,C) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1, j \ne i}^{m} exp\left(C\varphi_{ij}\left(Z, l_{ij}\right)\right) + \sum_{i=1}^{m} exp\left(C\psi_i\left(Z, l_i\right)\right) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{r} exp\left(C\eta_{is}\left(Z, l_{is}\right)\right). \tag{9}$$

Таким чином, нам необхідно буде вирішити послідовність задач безумовної оптимізації

$$\Phi(Z,C_k) = \chi(Z) + g(Z,C_k) \to min$$

на всьому просторі зміни параметра Z із зростаючими значеннями C_k.

В результаті ми отримаємо послідовність наближень Z^{*1}, Z^{*2}, ..., Z^{*k},... оптимального розв'язку вихідної задачі. Зупинившись по досягненню якогось вибраного критерію зупинки, як оптимальний розв'язок Z^* оберемо останнє наближення Z^{*k}.

Задачу мінімізації функції $\Phi(Z, C_k)$ можна розв'язувати будь-яким зручним для кожної конкретної задачі методом безумовної оптимізації. Найбільш прийнятними за швидкістю збіжності є градієнтні методи. Для випадків крайових задач еліптичного та параболічного типів диференційованість розв'язку за параметрами розміщення джерел доведена [3].

Оскільки в результаті розв'язку поставленої задачі ми можемо отримати лише локальний мінімум функції мети, то бажано провести процедуру умовної оптимізації для декількох різноманітних початкових значень параметра Z, а після цього з усіх отриманих розв'язків $Z^{*(1)}, Z^{*(2)}, \ldots, Z^{*(r)}$ вибрати те, при якому вихідна функція мети досягає найменшого значення.

Розглянемо двовимірний випадок [4].

Нехай Ω – прямокутна область у просторі R^2, у якій необхідно розмістити m прямокутних взаємоорієнтованих джерел фізичного поля таким чином, щоб значення поля у деякій фіксованій точці області Ω в певний момент часу t було найменшим. Джерела повинні належати області Ω і не перетинатися між собою. Нехай:

a – довжина області Ω,

b – ширина області Ω,

d_i – довжина i-го джерела,

h_i – ширина i-го джерела ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Розмістимо систему координат xOy таким чином, щоб її центр співпав з одним із кутів прямокутника, який визначає область Ω, вісь Ox співпала зі стороною довжини a цього прямокутника, а вісь Oy – зі стороною довжини b (рис. 1).

Координати полюса i-го джерела – (ξ_i, η_i). Полюсом джерела будемо вважати його геометричний центр (точку перетину діагоналей прямокутника).

Розміщення i-го джерела буде визначатися координатами його полюса: $Z^i = (\xi_i, \eta_i)$. Тоді Z набуває вигляду

$$Z = (Z^1, Z^2, \ldots, Z^m) = (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots, \xi_m, \eta_m).$$

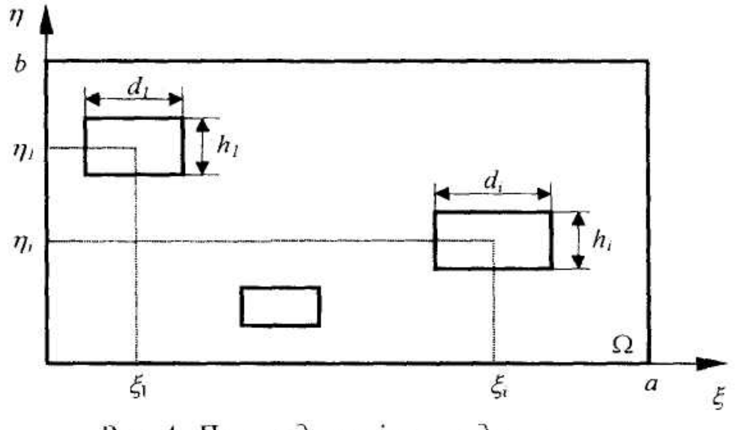

Рис. 1. Приклад розміщення джерел

Система обмежень (8), що описує множину припустимих значень Z, у нашому випадку має вигляд

$$\begin{cases} \varphi_{ij}(\xi_i, \eta_i, \xi_j, \eta_j) \le 0 & (i \ne j;\ i, j = 1, 2, \ldots, m), \\ \psi_i(\xi_i, \eta_i) \le 0 & (i = 1, 2, \ldots, m), \end{cases} \tag{10}$$

де $\varphi_{ij}(\xi_i, \eta_i, \xi_j, \eta_j) \le 0$ – умова неперетинання i-го і j-го джерел;

$\psi_i(\xi_i, \eta_i) \le 0$ – умова належності i-го джерела області Ω.

Введемо деякі позначення:

$$d_{ij} = \frac{d_i + d_j}{2},\ h_{ij} = \frac{h_i + h_j}{2}\ (i \ne j;\ i, j = 1, 2, \ldots, m).$$

Таким чином, d_{ij} визначає мінімально можливу відстань між центрами i-го і j-го джерел по горизонталі, а h_{ij} – по вертикалі з урахуванням вимоги неперетинання джерел.

Тоді умова неперетинання i-го і j-го джерел набуде вигляду

$$\left(\left|\xi_i - \xi_j\right| \ge d_{ij}\right) \vee \left(\left|\eta_i - \eta_j\right| \ge h_{ij}\right),\ i \ne j;\ i, j = 1, 2, \ldots, m. \tag{11}$$

Нам необхідно перетворити цю умову в умову вигляду $\varphi_{ij}(\xi_i, \eta_i, \xi_j, \eta_j) \le 0$. Для цього використаємо апарат R-функцій, для яких визначені операції алгебри логіки.

Якщо ми маємо два логічні предикати $\omega_1(x)$ і $\omega_2(x)$, то їх диз'юнкція, згідно з [5], може бути записана у вигляді

$$\omega(x) = \omega_1(x) \vee \omega_2(x) = \omega_1(x) + \omega_2(x) + \sqrt{(\omega_1(x))^2 + (\omega_2(x))^2}, \tag{12}$$

тобто умова $\omega(x) \ge 0$ буде виконуватися, якщо виконається хоча б одна з умов

$$\omega_1(x) \ge 0 \text{ чи } \omega_2(x) \ge 0.$$

Перетворимо умову (11) наступним чином:

$$\left(\left(\xi_i - \xi_j\right)^2 \ge d_{ij}^2\right) \vee \left(\left(\eta_i - \eta_j\right)^2 \ge h_{ij}^2\right) \Leftrightarrow \left(\left(\xi_i - \xi_j\right)^2 - d_{ij}^2 \ge 0\right) \vee \left(\left(\eta_i - \eta_j\right)^2 - h_{ij}^2 \ge 0\right). \tag{13}$$

Позначимо

$$\omega_1\left(\xi_i, \xi_j\right) = \left(\xi_i - \xi_j\right)^2 - d_{ij}^2, \omega_2\left(\eta_i, \eta_j\right) = \left(\eta_i - \eta_j\right)^2 - h_{ij}^2.$$

Тоді диз'юнкція ω_1 і ω_2 запишеться

$$\omega\left(\xi_i, \xi_j, \eta_i, \eta_j\right) = \omega_1\left(\xi_i, \xi_j\right) \vee \omega_2\left(\eta_i, \eta_j\right) = \left(\xi_i - \xi_j\right)^2 - d_{ij}^2 + \left(\eta_i - \eta_j\right)^2 - h_{ij}^2 +$$
$$+ \sqrt{\left(\left(\xi_i - \xi_j\right)^2 - d_{ij}^2\right)^2 + \left(\left(\eta_i - \eta_j\right)^2 - h_{ij}^2\right)^2}.$$

Отже, умова

$$\omega\left(\xi_i, \xi_j, \eta_i, \eta_j\right) \ge 0 \tag{14}$$

буде еквівалентна умові (13), а значить і умові (11).

Звідси

$$\varphi_{ij}\left(\xi_i, \xi_j, \eta_i, \eta_j\right) = -\omega\left(\xi_i, \xi_j, \eta_i, \eta_j\right).$$

Умова належності i-го джерела області Ω запишеться у вигляді наступної системи обмежень:

$$\begin{cases} \xi_i \ge d_i/2, \\ \xi_i \le a - d_i/2, \\ \eta_i \ge h_i/2, \\ \eta_i \le b - h_i/2. \end{cases} \tag{15}$$

Об'єднуючи обмеження (14) і (15), отримаємо систему обмежень на параметрі розміщення джерел Z:

$$\begin{cases} -\left(\left(\xi_i - \xi_j\right)^2 - d_{ij}^2 + \left(\eta_i - \eta_j\right)^2 - h_{ij}^2 + \sqrt{\left(\left(\xi_i - \xi_j\right)^2 - d_{ij}^2\right)^2 + \left(\left(\eta_i - \eta_j\right)^2 - h_{ij}^2\right)^2}\right) \le 0, \\ d_i/2 - \xi_i \le 0, \\ d_i/2 + \xi_i - a \le 0, \\ h_i/2 - \eta_i \le 0, \\ h_i/2 + \eta_i - b \le 0, \end{cases}$$

де $i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, m;\ i \ne j$.

Таким чином, ми отримали систему обмежень, зручну для застосування методу штрафних функцій.

В результаті функція мети допоміжної задачі оптимізації матиме вигляд:

$$\Phi(Z,C) = \chi(Z) + \\ + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1, j\neq i}^{m} exp\left(-C\left((\xi_i-\xi_j)^2 - d_{ij}^2 + (\eta_i-\eta_j)^2 - h_{ij}^2 + \sqrt{\left((\xi_i-\xi_j)^2 - d_{ij}^2\right)^2 + \left((\eta_i-\eta_j)^2 - h_{ij}^2\right)^2}\right)\right) + \\ + \sum_{i=1}^{m} exp\left(C\left({d_i}/{2} - \xi_i\right)\right) + \sum_{i=1}^{m} exp\left(C\left({d_i}/{2} + \xi_i - a\right)\right) + \sum_{i=1}^{m} exp\left(C\left({h_i}/{2} - \eta_i\right)\right) + \sum_{i=1}^{m} exp\left(C\left({h_i}/{2} + \eta_i - b\right)\right).$$

Оптимізація розміщення джерел методом штрафних функцій буде проводитися за таким алгоритмом [6]:

I. Вибрати $\varepsilon > 0$ як критерій зупинки.

Вибрати початкову точку Z^0 (початковий параметр розміщення джерел).

Вибрати штрафний параметр $C_1 > 0$ і число $\beta > 1$.

Покласти $k = 1$ і перейти до II етапу.

II. При початковій точці Z^{k-1} розв'язати наступну задачу

$$\Phi(Z, C_k) \to min.$$

Покласти Z^k рівним оптимальному розв'язку цієї задачі і перейти до III етапу.

III.Якщо виконується обрана умова зупинки

a) $|Z^k - Z^{k-1}| < \varepsilon$,

b) $|\chi(Z^k) - \chi(Z^{k-1})| < \varepsilon$,

c) $g(Z^k, C_k) < \varepsilon$,

або вибрана їх комбінація, то зупинитися і покласти $Z^* = Z^k$,

інакше покласти $C_{k+1} = \beta C_k$, $k = k + 1$

і перейти до II етапу.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Стоян Ю.Г., Путятін В.П.* Розміщення джерел фізичних полів. – К.: Наук. думка, 1981. – 184 с.
2. *Базара М., Шетті К.* Нелінійне програмування. Теорія і алгоритми. – М.: Мир, 1982. – 583 с.
3. *Стоян Ю.Г., Яремчук С.И., Крыжановский В.Б.* Дифференцируемость поля дискретных источников по параметрам их размещения / Доповіді національної Академії наук України, 1995. – № 10. – С. 38–40.
4. *Чувашева С.І.* Чисельні методи рішення одного класу задач оптимізації розміщення джерел фізичних полів. Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. – Харків, 1984. – 14 с.
5. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982.
6. *Бейко І.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н.* Методи і алгоритми розв'язання задач оптимізації. – К.: Вища школа, 1983. – 512 с.

ЖОВНОВСЬКИЙ Дмитро Олександрович – студент групи АК-4 факультету інформаційно-комп'ютерних технологій Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання технічних систем;

– комп'ютерні інформаційні технології;

– методи оптимізації.