

В.Т. Ковальчук, П.М. Повідайко

РОЗРАХУНОК ПОХИБКИ ОБЧИСЛЕННЯ ТА НЕОБХІДНОЇ РОЗРЯДНОСТІ ПРОЦЕСОРА ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Запропоновані методика розрахунку похибки обчислення процесором дискретного перетворення Фур'є частотних параметрів сигналів при цифровому спектральному аналізі та визначення необхідної внутрішньої розрядності процесора з фіксованою комою при використанні рівномірного квантування.

Вступ

Розрахунок похибки обчислення процесора дискретного (в тому числі і швидкого) перетворення Фур'є (ДПФ), який використовується при цифровій обробці сигналів (ЦОС), і визначення її зв'язку з розрядністю процесора дозволяє покращити метрологічні характеристики і оптимізувати апаратурні затрати систем ЦОС.

Як відомо, згідно з алгоритмом ДПФ проводиться обчислення значення функції згідно з рівнянням

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot v(n) \cdot w(n, k), \quad (1)$$

де $y(k)$ – k -й частотний відлік сигналу, що аналізується;

$x(n)$ – n -й часовий відлік сигналу, що аналізується;

$v(n)$ – n -й відлік часового вікна;

$w(n, k)$ – n -й повертаючий множник для k -го частотного відліку сигналу, що аналізується;

n – поточний номер часових відліків;

k – поточний номер частотних відліків;

N – кількість відліків (точок) ДПФ.

Відомі методики визначення похибок і розрядності процесора ДПФ не враховують спадковані похибки вхідного сигналу, часового вікна і повертаючих множників, а також визначають інструментальну похибку без врахування “зваження” сигналу часовим вікном. Це не дає змоги отримання практичного інженерного виразу для розрахунку необхідної розрядності процесора ДПФ.

Мета статті – визначення виразу для розрядності процесора ДПФ з урахуванням співвідношення спадкової та інструментальної похибок.

Аналіз будемо вести для процесора ДПФ з фіксованою комою і скінченою внутрішньою розрядністю при умові рівномірного квантування вхідного сигналу, часового вікна і повертаючих множників.

1. Спадкова похибка процесора ДПФ

Абсолютне значення спадкової похибки $\Delta_c(k)$ та її дисперсії $\sigma_c^2(k)$ процесора ДПФ при обчисленні згідно з рівнянням (1) визначаються виразами:

$$\Delta_c(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta X(n) \cdot v(n) \cdot w(n, k) + \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \Delta V(n) \cdot w(n, k) + \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot v(n) \cdot \Delta W(n, k), \quad (2)$$

$$\sigma_c^2(k) = \sigma_x^2(k) + \sigma_v^2(k) + \sigma_w^2(k), \quad (3)$$

де $\Delta X(n)$, $\Delta V(n)$, $\Delta W(n, k)$ – абсолютні значення похибок представлення відліків вхідного сигналу, часового вікна і повертаючих множників відповідно;

$\sigma_x^2(k)$, $\sigma_v^2(k)$, $\sigma_w^2(k)$ – дисперсії складових спадкової похибки $\sigma_c^2(k)$ процесора ДПФ, викликані похибками представлення відліків вхідного сигналу, часового вікна і повертаючих множників відповідно.

Для вказаних складових дисперсії можна визначити такі аналітичні вирази:

$$\sigma_x^2(k) = \sigma^2 \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \Delta X(n) \cdot v(n) \cdot w(n, k) \right\} = \sum_{n=0}^{N-1} \sigma^2 \{ \Delta X(n) \} \cdot v^2(n) \cdot w^2(n, k) = N \cdot \sigma^2(\Delta X) \cdot p_v \cdot p_w, \quad (4)$$

$$\sigma_v^2(k) = \sigma^2 \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \Delta V(n) \cdot w(n, k) \right\} = \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \sigma^2 \{ \Delta V(n) \} \cdot w^2(n, k) = N \cdot p_x \cdot \sigma^2(\Delta V) \cdot p_w, \quad (5)$$

$$\sigma_w^2(k) = \sigma^2 \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot v(n) \cdot \Delta W(n, k) \right\} = \sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) \cdot v^2 \cdot \sigma^2 \{ \Delta W(n) \} = N \cdot p_x \cdot p_v \cdot \sigma^2(\Delta W), \quad (6)$$

де $\{ \}$ – знак функціональної залежності;

$$\sigma^2 \{ \Delta X \} = \frac{A_x^2 \cdot 2^{-2r_x}}{3} \text{ при } \Delta X = \pm A_x \cdot 2^{-r_x};$$

$$\sigma^2 \{ \Delta V \} = \frac{A_v^2 \cdot 2^{-2r_v}}{3} \text{ при } \Delta V = \pm A_v \cdot 2^{-r_v};$$

$$\sigma^2 \{ \Delta W \} = \frac{A_w^2 \cdot 2^{-2r_w}}{3} \text{ при } \Delta W = \pm A_w \cdot 2^{-r_w};$$

r_x, r_v, r_w – розрядності відліків вхідного сигналу, часового вікна і повертаючих множників відповідно;

A_x, A_v, A_w – коефіцієнти похибок представлення часових відліків вхідного сигналу, часового вікна і повертаючих множників відповідно (як правило, $A_x = A_v = A_w = 1/2$);

p_x, p_v, p_w – потужності вхідного сигналу, часового вікна і повертаючих множників відповідно.

Сумарна величина дисперсії $\sigma_c^2(k)$ з урахуванням виразів (4)–(6) може бути представлена виразом

$$\sigma_c^2(k) = \frac{1}{3} A_x^2 \cdot 2^{-2r_x} \cdot N \cdot p_v \cdot p_w + \frac{1}{3} A_v^2 \cdot 2^{-2r_v} \cdot N \cdot p_x \cdot p_w + \frac{1}{3} A_w^2 \cdot 2^{-2r_w} \cdot N \cdot p_x \cdot p_v, \quad (7)$$

причому для вхідного сигналу одиничної величини ($p_x = 1$) при використанні мінімального 4-членного вікна Блекмана-Херіса ($p_v = 0,388167$) і гармонічної функції повертаючих множників ($p_w = 1/2$) при умові $r_x = r_v = r_w = l$, $A_v = A_w = 1/2$ отримуємо

$$\sigma_c^2(k) = 2^{-2l} \cdot N \cdot B, \quad (8)$$

де $B = 0,064694 \cdot A_x^2 + 0,074014$ ($B = 0,0902$ при $A_x = 1/2$).

2. Інструментальна похибка процесора ДПФ

Дисперсія $\sigma_i^2(k)$ інструментальної похибки процесора ДПФ при обчисленні згідно з рівнянням (1) визначається виразом:

$$\sigma_i^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sigma_{xv}^2 \cdot W^2(n, k) + \sigma_{xvw}^2 \right), \quad (9)$$

де σ_{xv}^2 – дисперсія добутку $x(n) \cdot v(n)$;

$W^2(n, k)$ – потужність функції повертаючих множників p_w ;

σ_{xvw}^2 – дисперсія добутку $x(n) \cdot v(n) \cdot w(n, k)$.

Складова σ_{xv}^2 дисперсії інструментальної похибки визначається таким чином:

$$\sigma_{xv}^2 = \frac{\Delta_{xv}^2}{12} = \frac{2^{-2r_{xv}}}{12} \left(1 - 2^{-(r_x + r_v + r_{xv})} \right)^2,$$

де Δ_{xv} – абсолютна похибка добутку $x(n) \cdot v(n)$;

r_{xv} – розрядність добутку $x(n) \cdot v(n)$.

Складова σ_{xvw}^2 дисперсії $\sigma_i^2(k)$ визначається таким чином:

$$\sigma_{xvw}^2 = \frac{\Delta_{xvw}^2}{12} = \frac{2^{-2r_{xvw}}}{12} \left(1 - 2^{-(r_{xv} + r_w - r_{xvw})}\right)^2,$$

де Δ_{xvw} – абсолютна похибка добутку $x(n) \cdot v(n) \cdot w(n, k)$.

Сумарну дисперсію інструментальної похибки тоді можна записати так:

$$\sigma_i^2 = \frac{2^{-2r_{xv}}}{12} \left(1 - 2^{2(r_x + r_v - r_{xv})}\right)^2 \cdot p_w + \frac{2^{-2r_{xvw}}}{12} \left(1 - 2^{-(r_{xv} + r_w - r_{xvw})}\right)^2, \quad (11)$$

причому для гармонічної функції повертаючих множників ($p_w = 1/2$) при виконанні умови $r_x = r_v = r_w = l$ і $r_{xv} = r_{xvw} = r$ можна отримати [1]

$$\sigma_n^2 = \frac{2^{-2r}}{12} \cdot N \cdot \left[\frac{1}{2} \left(1 - 2^{(r-2l)}\right)^2 + \left(1 - 2^{-l}\right)^2 \right]. \quad (12)$$

3. Визначення розрядності процесора ДПФ для заданого співвідношення дисперсій інструментальної та спадкової похибок

Для заданого співвідношення K дисперсій інструментальної $\sigma_i^2(k)$ і спадкової $\sigma_c^2(k)$ похибок з урахуванням (8) і (12) можна отримати

$$K = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_c^2} = \frac{2^{-2r}}{12} \cdot N \cdot \left[\frac{1}{2} \left(1 - 2^{(r-2l)}\right)^2 + \left(1 - 2^{-l}\right)^2 \right] / \left(2^{-2l} \cdot N \cdot B\right). \quad (13)$$

З рівняння (13) після нескладних перетворень можна отримати вираз для розрядності r процесора:

$$r = (l - 1) + \log_2 \frac{1}{\sqrt{2BK}}. \quad (14)$$

Додаючи до (14) величину $\log_2(N - 1)$, яка задає необхідне збільшення розрядності при виконанні $(N - 1)$ операцій додавання N складових у виразі (1), можна визначити необхідну внутрішню розрядність L процесора ДПФ [2]:

$$L = r + \log_2(N - 1) = l - 1 + \log_2 \frac{N - 1}{\sqrt{2 \cdot B \cdot K}}. \quad (15)$$

Вираз (15) є функцією малого числа завжди відомих при виконанні ЦОС параметрів і дозволяє просто і однозначно визначити необхідну внутрішню розрядність процесора ДПФ.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Вдовин С.Є., Ковальчук В.Т., Повідайко П.М. Анализ погрешностей процессора ДПФ аналого-цифровой информационно-измерительной системы. Тез. докл. научно-техн. конф. "Радиоизмерения-91". – Севастополь, 1991. – С. 104.
2. Вдовин С.Є., Ковальчук В.Т., Повідайко П.М. Методика расчета разрядности процессора ДПФ по заданному соотношению инструментальной и наследственной погрешностей. Тез. докл. научно-техн. конф. "Применение выч. техники и математических методов в научных исследованиях". – Севастополь, 1990. – С. 188–189.

КОВАЛЬЧУК Валерій Тадеушович – співробітник Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

– дослідження в галузі цифрової обробки сигналів.

ПОВІДАЙКО Петро Михайлович – кандидат технічних наук, доцент, декан факультету інформаційно-комп'ютерних технологій Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:

– дослідження в галузі цифрової обробки сигналів.