РАДІОТЕХНІКА І ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ

І.П. Атаманюк

КАНОНІЧНИЙ РОЗКЛАД ВЕКТОРНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ З ПОВНИМ ВРАХУВАННЯМ ВЗАЄМОКОРЕЛЯЦІЙНИХ ЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ КОЖНОЇ СКЛАДОВОЇ

Отримано канонічний розклад векторного випадкового процесу, при визначенні елементів якого повністю враховуються кореляційні зв'язки для кожної складової.

Припустимо, що випадковий процес $X(t)$ в дискретному ряді точок t_i, $i=\overline{1,I}$ повністю заданий кореляційною функцією $R_X(i,j)$, $i,j=\overline{1,I}$ і математичним очікуванням $m_X(i)$, $i=\overline{1,I}$. Канонічний розклад для процесу $X(t)$ в досліджуваних точках t_i, $i=\overline{1,I}$ запишеться [1, 2]:

$$X(i)=m_x(i)+\sum_{\nu=1}^{i}V_\nu\varphi_\nu(i), i=\overline{1,I}, \tag{1}$$

де V_ν – випадковий коефіцієнт: $M(V_\nu)=0, M(V_\nu V_\mu)=0, \nu\neq\mu, M(V_\nu^2)=D_\nu$;

$\varphi_\nu(i)$ – невипадкова координатна функція: $\varphi_\nu(\nu)=1$, $\varphi_\nu(i)=0$, $\nu>i$.

Оптимальні властивості канонічного розкладу забезпечуються, якщо елементи визначаються наступними рекурентними співвідношеннями:

$$V_i=\overset{\circ}{X}(i)-\sum_{\nu=1}^{i-1}V_\nu\varphi_\nu(i), i=\overline{1,I}, \tag{2}$$

$$D_i=D_x(i)-\sum_{\nu=1}^{i-1}D_\nu\varphi_\nu^2(i), i=\overline{1,I}, \tag{3}$$

$$\varphi_\nu(i)=\frac{1}{D_\nu}\left[R_x(\nu,i)-\sum_{j=1}^{\nu-1}D_j\varphi_j(\nu)\varphi_j(i)\right], \nu=\overline{1,I}, i=\overline{1,I}. \tag{4}$$

Вираз для дисперсії та кореляційної функції з урахуванням (1) запишеться у вигляді:

$$D_x(i)=\sum_{\nu=1}^{i}D_\nu\varphi_\nu^2(i), i=\overline{1,I}, \tag{5}$$

$$R_x(i,j)=\sum_{\nu=1}^{inf(i,j)}D_\nu\varphi_\nu(i)\varphi_\nu(j), i,j=\overline{1,I}. \tag{6}$$

Представлення (1) випадкового процесу $X(t)$ за допомогою некорельованих коефіцієнтів V_ν, $\nu=\overline{1,I}$ точно визначає $X(t)$ в дискретних точках і забезпечує мінімум середнього квадрату похибки наближення в проміжках між ними.

Канонічний розклад, аналогічний (1), можна отримати і для векторного випадкового процесу $\overline{X}(t)=\{x_1(t),\ldots,x_h(t),\ldots x_H(t)\}$ із залежними складовими. Нехай цей процес є заданим у вигляді векторної випадкової послідовності $\overline{X}(i)$, $i=\overline{1,I}$: $M[x_h(i)]$, $h=\overline{1,I}$, $i=\overline{1,I}$, $R_{ht}(i,j)=M[x_h(i)x_t(j)]$, $h,t=\overline{1,H}$, $i,j=\overline{1,I}$, тоді його канонічне представлення в дискретному ряді точок t_i набуде вигляду [2, 3]:

$$X_h(i)=m_h(i)+\sum_{\lambda=1}^{h}\sum_{\nu=1}^{i}V_\nu^{(\lambda)(i)}\varphi_{h\nu}^{(\lambda)(i)}(i), \quad h=\overline{1,H}, i=\overline{1,I}. \tag{7}$$

Елементи канонічного розкладу (7) визначаються співвідношеннями:

$$V_\nu^{(\lambda)(i)}=\overset{\circ}{X}_\lambda(\nu)+\sum_{j=1}^{\lambda-1}\sum_{\mu=1}^{i}V_\mu^{(j)(i)}\varphi_{\lambda\mu}^{(j)(i)}(\nu)-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}V_\mu^{(\lambda)(i)}\varphi_{\lambda\mu}^{(\lambda)(i)}(\nu), \quad \nu=\overline{1,i}; \tag{8}$$

$$D_{V_\nu^{(\lambda)(i)}}^{\lambda}=D_{X_\lambda}(\nu)-\sum_{j=1}^{\lambda-1}\sum_{\mu=1}^{i}D_{V_\mu^{(j)(i)}}\{\varphi_{\lambda\mu}^{(j)(i)}(\nu)\}^2-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}D_{V_\mu^{(\lambda)(i)}}\{\varphi_{\lambda\mu}^{(\lambda)(i)}(\nu)\}^2, \nu=\overline{1,i}, \tag{9}$$

$$\varphi_{h\nu}^{(\lambda)(i)}=\frac{1}{D_{V_\nu^{(\lambda)(i)}}}\left[R_{\lambda h}(\nu,i)-\sum_{j=1}^{\lambda-1}\sum_{\mu=1}^{i}D_{V_\mu^{(j)(i)}}\varphi_{\lambda\mu}^{(j)(i)}(\nu)\varphi_{h\mu}^{(j)(i)}(i)-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}D_{V_\mu^{(\lambda)(i)}}\varphi_{\lambda\mu}^{(\lambda)(i)}(\nu)\varphi_{h\mu}^{(\lambda)(i)}(i)\right], \tag{10}$$

$\lambda=\overline{1,h}$

Таким чином, кожна складова $X_h(t)$ в точці t_i розкладається за допомогою $\left\{V^{(\lambda)(i)}\right\}$, $\lambda = \overline{1,h}$ масивів некорельованих випадкових коефіцієнтів $V_\nu^{(\lambda)(i)}$, $\nu = \overline{1,i}$, $\lambda = \overline{1,h}$. Кожному масиву $\left\{V^{(\lambda)(i)}\right\}$ відповідає система координатних функцій $\varphi_{\xi\nu}^{(\lambda)(i)}(j), \xi = \overline{\lambda,}$: $\varphi_{\xi\nu}^{(\lambda)(i)}(j) = 0$ при $\lambda > \xi$ або $\lambda = \xi$; $\nu > j$; $\varphi_{\xi\nu}^{(\lambda)(i)}(j) = 1$ при $\lambda = \xi$; $\nu = j$, яка містить інформацію про кореляційні зв'язки складової $X_\lambda(\nu)$ з $X_\xi(j)$, $\xi = \overline{\lambda, H}$, $\nu, j = \overline{1,i}$.

Слід відзначити, що на відміну від (1) властивості елементів канонічного розкладу (7) залежать (за винятком h = 1) від порядкового номера точки дискретизації t_i, для якої даний розклад отримано, про що вказує другий верхній індекс елементів. Крім цього, суттєвим недоліком розкладу є те, що для h-тої, $h = \overline{1, H-1}$ складової не використовуються кореляційні зв'язки із складовими, більшими h, тобто інформація про випадковий процес $\overline{X}(t)$ в повному обсязі використана лише в канонічному розкладі складової $X_H(t)$. Вказані недоліки можуть бути усунуті за рахунок формування елементів канонічного розкладу процесу $\overline{X}(t)$ шляхом послідовного перебору всіх складових для фіксованого моменту часу t_i (в (7) перехід до формування елементів наступної h + 1 складової виконується після визначення випадкових коефіцієнтів і координатних функцій для $X_h(t)$ в усіх досліджуваних точках дискретизації t_i, $i = \overline{1,I}$). Використання вказаного підходу до формування координатних функцій і випадкових коефіцієнтів дає наступний вираз для канонічного процесу $\overline{X}(t)$ в дискретному ряді точок t_i, $i = \overline{1,I}$:

$$X_h(i) = m_h(i) + \sum_{\nu=1}^{i-1}\sum_{\lambda=1}^{H} V_\nu^{(\lambda)}\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i) + \sum_{\lambda=1}^{h} V_i^{(\lambda)}\varphi_{hi}^{(\lambda)}(i), i = \overline{1,I}\,; \tag{11}$$

де

$$V_\nu^{(\lambda)} = X_\lambda(\nu) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{H} V_\mu^{(j)}\varphi_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} V_\nu^{(j)}\varphi_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu), \nu = \overline{1,i}\,; \tag{12}$$

$$D_{V_\nu^{(\lambda)}} = D_{X_\lambda}(\nu) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{H} D_{V_\mu^{(j)}}\left\{\varphi_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\right\}^2 - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_{V_\nu^{(j)}}\left\{\varphi_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\right\}^2, \nu = \overline{1,i}\,, \tag{13}$$

$$\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i) = \frac{1}{D_{V_\nu^{(\lambda)}}}\left[M\left[X_\lambda(\nu)X_h(i)\right] - \sum_{\mu=1}^{\nu-1}\sum_{j=1}^{H} D_{V_\mu^{(j)}}\varphi_{\lambda\mu}^{(j)}(\nu)\varphi_{h\mu}^{(j)}(i) - \sum_{j=1}^{\lambda-1} D_{V_\nu^{(j)}}\varphi_{\lambda\nu}^{(j)}(\nu)\varphi_{h\nu}^{(j)}(i)\right], \tag{14}$$

$\lambda = \overline{1,h}$

В канонічному розкладі (11) для кожної складової $X_h(t)$, $h = \overline{1,H}$ максимально повно врахована інформація про випадковий процес $X(t)$. Крім цього, розклад (11) приведено до єдиної системи координатних функцій і випадкових коефіцієнтів. Це дає можливість при одержанні канонічного розкладу в наступній точці дискретизації використовувати елементи канонічного розкладу в попередній точці, що значно знижує обчислювальну складність канонічного представлення.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Пугачев В.С.* Теория случайных функций. – М.: Гос. Изд. тех.-теор. Лит., 1957. – 659 с.
2. *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1979. – 696 с.
3. *Кудрицкий В.Д.* Прогнозирующий контроль радиоэлектронных устройств. – К.: Техніка, 1982. – 168 с.

АТАМАНЮК Ігор Петрович – кандидат технічних наук, викладач Житомирського військового інституту радіоелектроніки.

Наукові інтереси:

– методи фільтрації на екстраполяції випадкових процесів.