

Р.А. Андросюк, С.І. Скуратовський, С.П. Трофімчук

РОЗРАХУНОК ВИСОКОЧАСТОТНИХ ОДНОШАРОВИХ КОТУШОК ІНДУКТИВНОСТІ

Розв'язано інтегральне рівняння для розподілу струму одношарової котушки індуктивності у першому наближенні, розрахована індуктивність, власна ємність та доведена наявність на високих частотах двох типів резонансів у котушки.

При дослідженні та розрахунку амплітудно-фазочастотних характеристик електричних ланцюгів дуже важливу роль відіграє точність розрахункових параметрів складових їх компонентів. Однак, розрахунок навіть такого елемента, як одношарова котушка індуктивності, на високій частоті є достатньо складною задачею. Незважаючи на важливе прикладне значення цього питання, існуючі методи розрахунку одношарових котушок дають неспівпадаючі між собою та експериментом значення їх параметрів. При розрахунку індуктивності одношарових спіральних котушок зазвичай зневажають спіральністю витків [1] та розглядають котушку як сукупність окремих замкнених плоских витків тієї чи іншої форми, що лежать в одній чи в декількох паралельних площинах. Подібне спрощення задачі суттєво полегшує розрахунок параметрів котушки, але й призводить до суттєвих похибок.

Визначення індуктивності проводів та контурів при високій частоті вдається зробити лише у дуже невеликій кількості найпростіших випадків. Звичайно доводиться відокремлюватися розгляданням достатньо високих частот, коли розподіл струмів по перерізам настільки нерівномірний, що струми можна вважати зосередженими у вельми тонких шарах поблизу поверхні провідників. Якщо знехтувати впливом, який здійснюють на розподіл струму у проводі кінцевість його довжини, наявність сусідніх проводів, а для криволінійних проводів ще й їх кривизна, то можна вважати, що струм у прямолінійному чи у криволінійному проводі кінцевої довжини розподілений так само, як і в самотньому нескінченному прямолінійному проводі того ж поперечного перерізу.

Для розрахунку характеристик височастотних одношарових котушок індуктивності використовуємо метод аналізу, заснований на розв'язку інтегрального рівняння для тонкого провідника та телеграфних рівняннях, розроблених професором Юровим Ю.Я. [1], який широко використовується при розрахунку антен [7], хвилеводів та резонаторів [5, 6].

На високих частотах котушку вже не можна розглядати як елемент із зосередженими постійними, оскільки ємнісна провідність між витками котушки робиться у НВЧ-діапазоні настільки великою, що котушка являє собою послідовність з'єднаних LC-контурів, а не «чисту» індуктивність.

Кожний з цих контурів має свою резонансну частоту, причому будуть спостерігатися не лише паралельні, але й послідовні резонанси (при яких власна ємність котушки з'єднується вже послідовно з індуктивністю). Тому розрахункові значення за формулами довідкової літератури дають лише низькочастотне значення індуктивності, причому чим вище частота, тим більша різниця спостерігається у істинному та розрахунковому значенні індуктивності.

Недоліком класичного методу також є те, що для котушок з великим кроком та малим радіусом провідника розрахунок призводить до великих похибок, пов'язаних у першу чергу з особливостями розподілу та випромінюванням електромагнітного поля уздовж провідника («витискання» поля, так званий «скін-ефект»).

Розглянемо провідник, звернутий у круглу спіраль, яка має малі розміри порівняно з довжиною хвилі, причому довжина провідника може бути порівняна з довжиною хвилі (рис. 1).

Задачу будемо розглядати в циліндричній системі координат (ρ, α, z) з кутом намотки спіралі θ . Тоді відстань уздовж провідника спіралі визначається виразом

$$x = \frac{r_0 \alpha}{\cos \theta}, \quad (1)$$

де r_0 – радіус спіралі; α – кут, виражений у радіанах.

Кут нахилу спіралі визначається кроком намотки δ та середнім радіусом спіралі:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\delta}{2\pi r_0} \quad (2)$$

Виразимо одиничний вектор \vec{i} , дотичний до провідника спіралі, через одиничні вектори декартової системи, вісь z якої збігається з віссю спіралі та віссю циліндричної системи координат:

$$\vec{i} = -\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \theta + \vec{k} \sin \theta \quad (3)$$

Точка спостереження буде мати координати (ρ, α', z') . Для того, щоб виразити координати поверхні провідника, будемо поводитися таким чином: розріжемо котушку площиною $\alpha = \text{const}$ (паралельній осі z). Тоді переріз провідника буде мати форму еліпса з півосями a та $\frac{a}{\cos \theta}$ (де a – радіус провідника), але оскільки кут θ малий, то еліптичність можна знехтувати, і тоді отримуємо

$$\begin{cases} \rho = r_0 + a \sin \beta, \\ z = \alpha r_0 \operatorname{tg} \theta + a \cos \beta, \end{cases} \quad (4)$$

де β – кут локальної полярної системи координат у перерізі провідника площиною $\alpha = \text{const}$ з початком у центрі провідника (рис. 2).

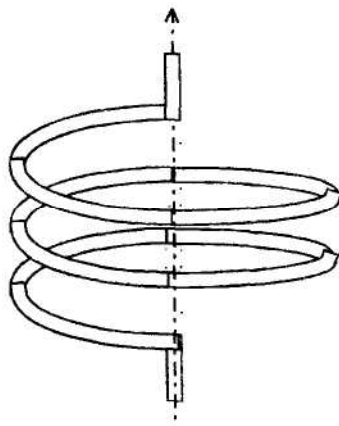


Рис. 1. Спіральна котушка

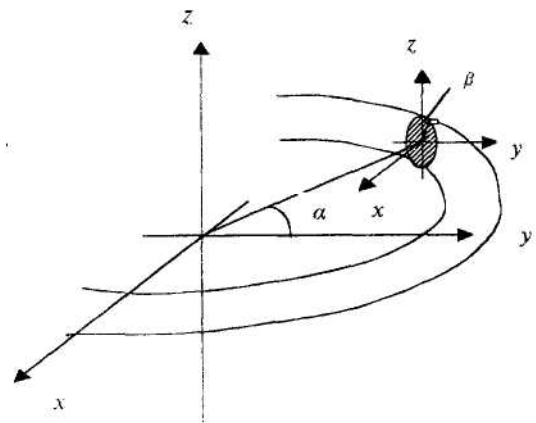


Рис. 2. Розташування локальної полярної системи координат

Відомо, що векторний потенціал на поверхні провідника визначається наступним виразом:

$$\vec{A}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{j}(z) \frac{e^{-ikr}}{r} dz, \quad (5)$$

де r – відстань між точками інтегрування (α', β') та спостереження $(\alpha, 0)$. Припустимо для спрощення сильний поверхневий ефект та рівномірний розподіл струму уздовж провідника. Тоді вираз для векторного потенціалу з урахуванням (1) набуває наступного вигляду:

$$\vec{A}(r) = \frac{r_0}{8\pi \cos \theta} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi w} \frac{e^{-ikr}}{r} \vec{i}(\alpha') I(\alpha') d\alpha' d\beta', \quad (6)$$

де w – кількість витків котушки. Опускаючи проміжні перетворення, отримуємо вираз для r :

$$r = r_0 \sqrt{\left[\frac{a}{r_0} \sin \beta' \right]^2 + 4 \left[1 + \frac{a}{r_0} \sin \beta' \right] \sin^2 \frac{\alpha - \alpha'}{2} + \left[(\alpha - \alpha') \operatorname{tg} \theta + \frac{2a}{r_0} \sin^2 \frac{\beta'}{2} \right]^2}, \quad (7)$$

де r_0 – середній радіус котушки; a – радіус провідника; $I(\alpha')$ – струм в перерізі провідника α' .

Якщо у виразі (6) підставити $\alpha = \alpha'$ та $\beta = 0$, то підінтегральна функція в (6) перетворюється у нескінченність.

Рахуємо, що котушка віддалена від збуджуючого генератора. Тоді диференціальне рівняння для векторного потенціалу буде мати наступний вигляд:

$$\frac{1}{i\omega\epsilon_0} \left[(\vec{r}, \text{grad div } \vec{A}) + k^2 (\vec{r}, \vec{A}) + E_r^{cm} \right] = Z \cdot I \quad (8)$$

де E_r^{cm} – дотична складова електричного поля; Z – погонний опір провідника за рахунок скін-ефекту.

Рахуємо, що всюди, окрім місця включення генератора $E_r^{cm} = 0$, а також зневажаючи активний опір провідника, отримуємо наступне рівняння для векторного потенціалу котушки:

$$(\vec{r}, \text{grad div } \vec{A}) + k^2 (\vec{r}, \vec{A}) = 0 \quad (9)$$

Можна з великим ступенем точності вважати, що на поверхні провідника векторний потенціал збігається за напрямом з \vec{r} . Це припущення доводиться у [1] та в даній статті не наводиться.

Внески в інтеграл (5) від елементів струму, розташованих симетрично відносно точки $(\alpha, 0)$, мають протилежно спрямовані складові, перпендикулярні вектору \vec{r} , які взаємно компенсуються з точністю до різниці фаз струмів; на відстані у декілька витків ця різниця буде невеликою. Крім того, поблизу точки $(\alpha, 0)$ підінтегральна функція в (5) обертається в нескінченність та векторний потенціал визначається в значному ступені струмом, що тече в безпосередній близькості від точки $(\alpha, 0)$, який має напрям \vec{r} . При цій умові

$$(\vec{r}, \vec{A}) = (\vec{A}, \text{div } \vec{A}) = (\vec{r}, \text{grad } A) = \frac{\partial A}{\partial x} \quad (10)$$

Вклад векторного потенціалу кінців котушки визначається виразом (5). Довжина підвідних проводів значно більше геометричних розмірів котушки, отож r набагато більше загальної довжини котушки, та підінтегральна функція, отже, буде малою.

Векторний потенціал кінців котушки збігається за напрямом з віссю z , тобто він буде перпендикулярним векторному потенціалу котушки.

Внаслідок цього вклад векторного потенціалу кінців котушки незначний і його можна не враховувати.

З урахуванням (9) рівняння (8) перетворюється на однорідне диференціальне рівняння на поверхні провідника:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + k^2 A = 0 \quad (11)$$

Його розв'язок має вигляд

$$\vec{A}(\alpha) = \left\{ C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx} \right\} \vec{r}(\alpha), \quad (12)$$

де C_1 та C_2 – довільні постійні інтегрування; x – відстань уздовж провідника.

Для отримання інтегрального рівняння для струму в провіднику необхідно прирівняти значення векторного потенціалу (11) та (5). Якщо домножити обидві частини цього рівняння скалярно на $\vec{r}(\alpha)$, отримуємо інтегральне рівняння типу Фредгольма 1-го роду для струму в провіднику котушки:

$$C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx} = \frac{\cos \theta}{8\pi} \int_0^{\alpha_1} \int_{\alpha_1}^{2\pi\alpha_2} e^{-ikr} \left[\frac{r}{r_0} \left(\text{tg}^2 \theta + \cos(\alpha' - \alpha) \right) \right] I(\alpha') d\alpha' d\beta', \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{e^{-ikr} [\operatorname{tg}^2 \theta + \cos(\alpha' - \alpha)]}{r} I(\alpha') d\alpha' d\beta' = \\
 & = \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{e^{-ikr} [\operatorname{tg}^2 \theta + \cos(\alpha' - \alpha)]}{r} \left[I(\alpha') e^{-ikr} - I(\alpha) \cos kr \right] d\alpha' d\beta'' + \\
 & + I(\alpha) \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{e^{-ikr} [\operatorname{tg}^2 \theta + \cos(\alpha' - \alpha)]}{r} \cos kr d\alpha' d\beta''. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Виділимо головну частину інтеграла таким чином, щоб при $\alpha' = \alpha, \beta' = 0$ підінтегральна функція оберталася в нескінченність, в той час як у залишеній частині вона б мала кінцеве значення. При цьому рівняння (12) обернеться в рівняння типу Фредгольма 2-го роду.

Визначимо деяке число N як середнє значення головної частини інтеграла:

$$N = \frac{\cos \theta}{8\pi^2} \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^{r_0} \frac{[\operatorname{tg}^2 \theta + \cos(\alpha' - \alpha)] \cos kr}{r} d\alpha' d\alpha d\beta' \tag{14a}$$

та перепишемо рівняння (12) у наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
 I_l e^{-ikx} - I_r e^{ikx} &= I(x) + \frac{\cos \theta}{8\pi^2 N} \times \\
 \times \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{[\operatorname{tg}^2 \theta + \cos(\alpha' - \alpha)] \cos kr}{r} & \left[I(\alpha') e^{-ikr} - I(\alpha) \cos kr \right] d\alpha' d\beta', \tag{15}
 \end{aligned}$$

де I_l та I_r – нові довільні постійні.

Обчислення числа N показує, що воно набагато більше одиниці, і на підставі цього можна розв'язувати рівняння (19) Фредгольма 2-го роду методом послідовних наближень [1]. Вводячи скалярний динамічний потенціал (калібровка Лоренца)

$$\varphi = -\frac{1}{i\omega\varepsilon} \operatorname{div} \vec{A} \tag{16}$$

можна записати електричне поле у вигляді

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - i\omega\mu_0 \vec{A}, \tag{17}$$

а оскільки розв'язок нульового наближення дає нам

$$\vec{A} = \vec{T} NI(x), \tag{18}$$

то, домножуючи (17) на $\vec{T}(\alpha)$, отримуємо рівняння на поверхні провідника (дотична складова електричного поля дорівнює нулю):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -i\omega\mu_0 NI. \tag{19}$$

Рівняння (19) з урахуванням значення дивергенції \vec{A} набуває вигляду

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{-i\omega\varepsilon \varphi}{N}. \tag{20}$$

Для індуктивності маємо

$$L = \frac{U}{i\omega I} \quad (21)$$

Напруга обчислюється як криволінійний інтеграл електричного поля (17) з шляхом інтегрування зовні котушки перпендикулярно \vec{A} , тоді

$$u = \varphi(0) - \varphi(l), \quad (22)$$

де $\varphi(0)$ – потенціал на початку; $\varphi(l)$ – в кінці провідника. Можна довести, що струм на початку і в кінці провідника однаковий:

$$I(0) = I(l). \quad (23)$$

Тоді вираз для індуктивності запишемо у вигляді

$$L = \frac{\varphi(0) - \varphi(l)}{i\omega I(0)}. \quad (24)$$

Вводячи коефіцієнт відбиття R та хвильовий опір провідника,

$$Z_0 = N \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}. \quad (25)$$

Згідно з рівняннями (19) та (20), струм та потенціал можна виразити у вигляді падаючих та відбитих хвиль:

$$\begin{cases} I = \frac{\varphi_i}{Z_0} (e^{-ikx} - Re^{ikx}), \\ \varphi = \varphi_i (e^{-ikx} + Re^{ikx}), \end{cases} \quad (26)$$

де φ_i – потенціал, незалежний від x . Підставляючи R в (26), отримуємо значення індуктивності:

$$L = \mu_0 N l \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{kl}{2}\right)}{\frac{kl}{2}}. \quad (27)$$

При низьких частотах аргумент тангенса малий і тангенс майже дорівнює аргументу, індуктивність слабо залежить від частоти. При $kl = \pi$ настає паралельний резонанс та еквівалентна шунтуюча ємність може бути визначена за формулою

$$C_0 = \frac{\varepsilon \mu_0}{\pi^2} \frac{l}{L_0}, \quad (28)$$

де L_0 – значення низькочастотної індуктивності, яке можна визначити, виходячи з формули (27) та виразу (1):

$$L_0 = \mu_0 r_0 N \frac{2\pi w}{\cos \theta}, \quad (29)$$

де w – кількість витків котушки.

З формули видно, що це значення не залежить від частоти. Для високочастотної індуктивності при значеннях частоти $kl = \pi n$, $n = 1, 2 \dots$ настають резонанси, причому значення тангенса по чергово буде дорівнювати нескінченності та нулю, а еквівалентна схема котушки представляється відповідно паралельним та послідовним коливальними контурами, параметри яких легко підрахувати.

Індуктивність, Гн*10⁻⁷

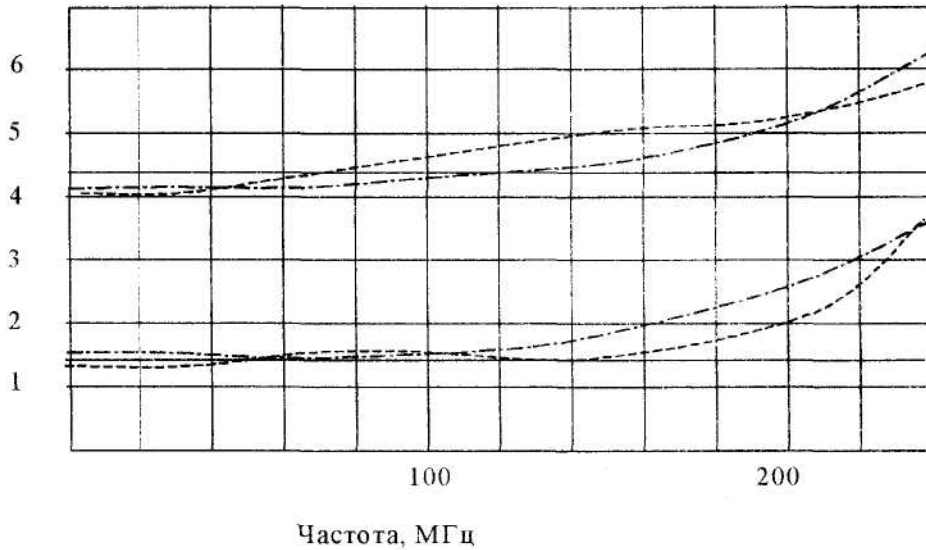


Рис. 3. Залежність індуктивності від частоти:
 — розрахунок за формулою низькочастотної індуктивності;
 - - - розрахунок за формулою високочастотної індуктивності;
 експеримент

Отримані результати розрахунків порівнювались з даними довідкової літератури [2], тобто зі значеннями низькочастотної індуктивності, та з експериментальними даними, при цьому експериментально знаходились частота паралельного резонансу, індуктивність та власна ємність котушки.

Таблиця 1

Власна ємність котушок

№ котушки	Кількість витків	Радіус провода, мм	Радіус витків, мм	Власна ємність, пФ		Частота резонансу, МГц	
				розрахунок	експеримент	розрахунок	експеримент
1	4	1.35	12	2.47	2.77	30	29.98
2	1.5	1.4	8	2.2	2.3	100	100.1
3	-	2.2	-	0.34	0.34	200	199.9

Вимірювання робились методом куметра, що відноситься до резонансних методів [4] і є достатньо точним в діапазоні 3–300 МГц. Цей метод дозволяє вимірювати параметри котушки з похибкою не більше 10 % в даному діапазоні частот.

При порівнянні результатів експерименту з розрахунковими даними для низькочастотної індуктивності можна бачити, що розбіжність між ними спостерігається вже на частотах, що перевищують 30 МГц, причому на частоті порядку 200 МГц ця розбіжність перевищує 50 %.

Розбіжність з урахуванням похибки вимірювань, а також похибки чисельного методу обчислювання інтеграла (14) 0,5–1 % не перевищує 20 %, що можна вважати задовільним для широкого спектра частот.

Експериментальні дані підтверджують вірність припущення про наявність двох типів резонансів, причому обчислена власна ємність та виміряна дають збіг з точністю до 5 %.

Таким чином, можна сказати, що всі припущення, зроблені у даній статті, виявилися вірними, що підтверджується експериментально достатньо точно.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Юров Ю.Я., Сергеев А.М. Электродинамика высокочастотных катушек индуктивности // Известия ВУЗов. – Радиоэлектроника, 1981. – Т. XXIV. – № 5. – С. 85–92.
2. Немцов М.В. Справочник по расчету параметров катушек индуктивности. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 192 с.
3. Дулин В.М., Жук М.С. Справочник по элементам радиоэлектронных устройств. – М.: Энергия, 1977. – 576 с.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1980. – 976 с.
5. Измеритель добротности / Паспорт и техническое описание.
6. Юров Ю.Я. К теории тонких проводов, находящихся в волноводе // Известия ВУЗов. – Радиоэлектроника, 1969. – Т. XXII. – № 6. – С. 604–609.
7. Клеев А.И., Маненков А.Б. Коаксиальный резонатор с тонким внутренним проводником // Радиотехника и электроника, 1984. – № 12. – С. 2293–2301.
8. Фрадин А.Э. Антенно-фидерные устройства. – М.: Связь, 1977. – 440 с.

АНДРОСЮК Руслан Анатолійович – аспірант кафедри "Медичні прилади та системи" Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
– радіофізика.

СКУРАТОВСЬКИЙ Сергій Іванович – аспірант кафедри вищої математики Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
– синергетика;
– радіофізика.

ТРОФІМЧУК Сергій Павлович – аспірант кафедри "Медичні прилади та системи" Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
– радіофізика.