

**ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗОНАЛЬНОЇ ТЕХНОЛОГІЧНОЇ ТРІЩИНУВАТОСТІ
НА КАР'ЄРАХ ДЕКОРАТИВНОГО КАМЕНЮ**

(Представлено д.т.н., проф. Зайченком С.В.)

Розглянуто спосіб вирішення плоскої задачі механіки деформування твердого тіла з використанням пакету *Mathcad* для оцінки зональної технологічної тріщинуватості на гранітних кар'єрах в процесі їх відділення від масиву. В пакеті *Mathcad* вже існують розроблені програмні блоки для вирішення плоскої задачі механіки деформування твердого тіла, які дозволяють уникнути необхідності вирішення задачі шляхом транспонування матриць та знаходження коренів системи алгебраїчних рівнянь. Аналіз представлених результатів виявляє біля кута уступу область концентрації високих напружень, що становить небезпечну зону. У міру поглиблення в масив ця концентрація швидко знижується. Особливо слід звернути увагу на появу зон напружень розтягнення, що найбільш небезпечні для гранітоїдів. Для моделювання цього процесу пропонується об'єднати класичний математичний апарат механіки руйнування суцільного середовища з критерієм руйнування Нейбера для кутових зон на уступі кар'єру, що дозволить з високою точністю отише формування напружених кутових зон.

Ключові слова: мікротріщини; руйнування; напружений стан; уступ; блок.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок з важливими практичними завданнями. Об'єднуючим для всіх гірських порід є той факт, що гірські породи не можна ідеалізувати, як це робиться в механіці або фізиці твердого тіла, оскільки з самого початку в них присутній набір дефектів, що визначають їх конкретні властивості і подальшу поведінку. Фізична неоднорідність і анізотропія властивостей гірських порід значно ускладнює або робить неможливим отримання рішень в аналітичному вигляді. Тому особливої актуальності набуває математичне моделювання процесу розподілу напружено-деформованого стану в гранітних блоках в процесі їх видобування з застосуванням прикладних комп'ютерних програм.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Використання методів кінцевих елементів для вирішення завдань гірничої геомеханіки дозволило створити зручну в практичному відношенні методику для вирішення складних диференціальних рівнянь механіки деформування твердого тіла [1–4]. Для інженерних розрахунків досить просто реалізувати розроблений алгоритм метода кінцевих елементів для розрахунку напружено-деформованого стану гранітного уступу в процесі видобування блоків, який містить процедуру розв'язання крайової задачі теорії пружності в постановці плоскої деформації з використанням пакету *Mathcad*.

Сутність методу кінцевих елементів полягає в тому, що суцільне тіло з об'ємом V і площею зовнішньої поверхні S розбивають на трикутні елементи (рис. 1). На тіло діють поверхневі сили P і об'ємні сили Q . В результаті відбувається заміна суцільного реального тіла на кінцеві елементи.

Для правильного відображення поля переміщень та поля напружень приймаються, що для кожного з вузлів елемента виконано рівняння рівноваги і в вузлових точках забезпечена нерозривність деформацій. Рівновага буде повною тільки при умові рівняння віртуальних робіт. Причому сума добуток переміщень на відповідні компоненти напружень визначають зовнішню роботу, тоді як сума добуток деформацій на відповідні компоненти напружень – внутрішню роботу. Тоді величина потенційної енергії, накопиченої тілом при деформації [5]:

$$P = U + W, \quad (1)$$

де перший член цього рівняння відповідає варіації енергії деформацій U тіла, а другий – варіації потенційної енергії W зовнішнього навантаження, тоді P – повна потенційна енергія.

Для забезпечення рівняння рівноваги повна потенційна енергія повинна приймати стаціонарне значення. У методі кінцевих елементів середовище поділяється на серію елементів, що взаємодіють в кінцевій кількості вузлових точок. Цей процес має назву дискретизація задачі. В задачі аналізу об'єкта кінцеві рівняння МКЕ можуть бути отримані мінімізацією загальної потенційної енергії системи.

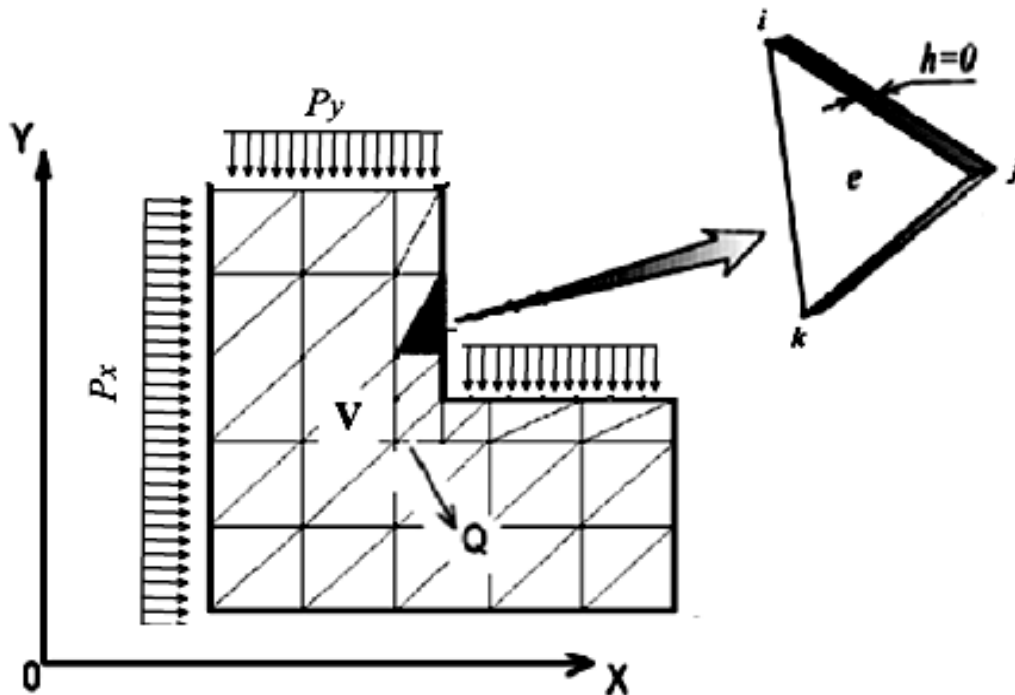


Рис. 1. Розрахункова схема в кінцево-елементному представленні

Використовуючи матричні позначення, енергію деформації можна виразити рівнянням:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV, \quad (2)$$

де $\{\sigma\}$ – вектор, що містить компоненти напружень або зусиль; $\{\varepsilon\}$ – вектор, що містить компоненти деформацій.

Потенціал навантажень, який прикладений в об'ємі об'єкта й на його поверхню дорівнює:

$$W = - \int_V \{\delta\}^T \{Q\} dV - \int_S \{\delta\}^T \{P\} dS, \quad (3)$$

де $\{\delta\}$ – вектор переміщень внутрішніх вузлів елементу; $\{Q\}$ – вектор сил, розподілених по об'єму матеріалу; $\{P\}$ – вектор сил, розподілених по поверхні об'єкта.

Мета дослідження – розробка математичної моделі процесу формування зональної технологічної мікротріщинуватості на кар'єрах декоративного каменю.

Викладення основного матеріалу. Для отримання умови рівноваги механічної системи необхідно вирішити задачу в варіаційній постановці за допомогою методу Рітца із застосуванням мінімізації потенційної енергії системи. Це можна представити у вигляді:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV - \int_V \{\delta\}^T \{Q\} dV - \int_S \{\delta\}^T \{P\} dS, \quad (4)$$

де $\{\delta\} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{bmatrix}$ – вектор вузлових переміщень, а вектор деформацій ε визначається з рівняння

Коши; рівняння закону Гука для напружень σ може бути представлено у матричній формі:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [B]\{\delta\}, \quad \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (5)$$

де $[D]$ – матриця зв'язку напружень і деформацій, що відображає характеристики матеріалу; для випадку плоско-деформованого стану вона має вигляд:

$$[D] = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

де E – модуль Юнга матеріалу; ν – коефіцієнт Пуассона; $[B]$ – матриця похідних функції форми.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

де $N_i = \frac{1}{2\Delta}(a_i + b_i x + c_i y)$; $a_i = x_j y_k - x_k y_j$; $b_i = y_j - y_k$; $c_i = x_k - x_j$ вирази для функцій форми N_i , N_k можна отримати шляхом підстановки по колу індексів номерів вузлів елемента i, j, k , а $x_{i,j,k}$, $y_{i,j,k}$ – координат цих вузлів.

$$\begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j \\ b_i = y_j - y_k \\ c_i = x_k - x_j \end{cases} \quad \begin{cases} a_j = x_k y_i - x_i y_k \\ b_j = y_k - y_i \\ c_j = x_i - x_k \end{cases} \quad \begin{cases} a_k = x_i y_j - x_j y_i \\ b_k = y_i - y_j \\ c_k = x_j - x_i \end{cases} \quad (8)$$

У результаті перетворень матрицю $[B]$ можна записати у вигляді:

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Співвідношення між вузловими силами і вузловими переміщеннями записується у вигляді рівняння жорсткості:

$$\{F\} = [K]\{\delta\}, \quad (10)$$

де $[K]$ – квадратна матриця жорсткості елемента, а $\{F\}$ і $\{\delta\}$ відповідно вектори сил і переміщень для елемента. Доречі, $\{F\}$ – вектор еквівалентних вузлових сил, до якого приводяться всі поверхневі $\{P\}$ і розподілені по об'єму сили $\{Q\}$, що діють на цей кінцевий елемент; $\{P\} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix}$ – вектор поверхневих

сил; $\{Q\} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}$ – вектор об'ємних сил напруги. Тоді матрицю жорсткості кінцевого елемента можна представити у вигляді:

$$[K] = \int_V [B]^T [D][B] dV = \Delta [B]^T [D][B], \quad (11)$$

де Δ – площа елемента.

Коли об'єкт моделюється набором кінцевих елементів, потенційна енергія всього об'єкта буде складатися з потенційних енергій окремих кінцевих елементів. Через це глобальна система рівнянь МКЕ може бути отримана шляхом складання по всіх кінцевих елементів.

Точність результатів буде визначатися частотою розбиття розрахункової області трикутною сіткою кінцевих елементів.

Для аналізу напружено-деформованого стану на уступах блочного каменю в процесі його видобування використовувався пакет Mathcad. Як зазначається у [6], вже існують розроблені програмні блоки для вирішення плоскої задачі механіки деформуемого твердого тіла, які дозволяють уникнути необхідності розв'язання задачі шляхом транспонування матриць та знаходження коренів системи алгебраїчних рівнянь. У пакеті Mathcad для цього передбачено спеціальні функції та інструменти. Використовуючи стандартні прийоми завантаження даних в пакеті Mathcad, формуюмо таблиці вихідних

даних з інформацією о вузлах елементів і заданих вузлових силах та переміщеннях. Для певного виду гранітоїду формуються матриці $[B]$ і $[D]$, а також матриця жорсткості. За вже відомими вузловими переміщеннями розраховуються деформації та напруження для кожного елементу.

Вихідні дані для числового моделювання наведено у таблиці 1.

Таблиця 1

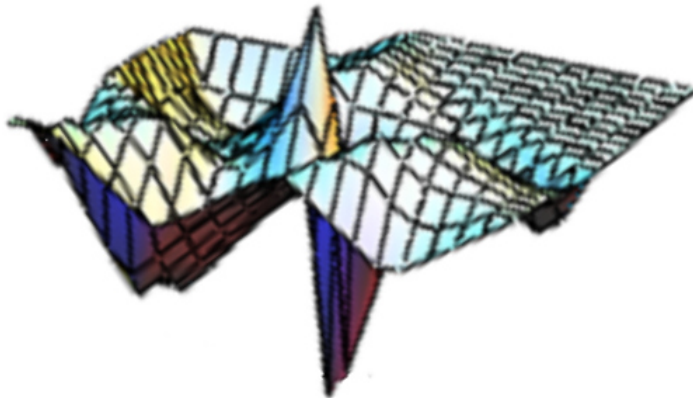
Вихідні дані для числового моделювання

Об'ємна маса (питома вага) граніту, кг/м^3	Модуль пружності E , МПа	Коефіцієнт Пуассона, ν	Кут внутрішнього тертя φ , град.
2700	$0,8 \cdot 10^5$	0,25	37

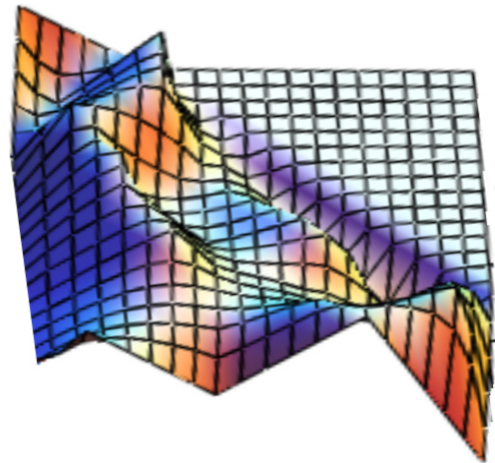
Аналіз представлених результатів виявляє біля кута уступу область концентрації високих напружень, що становить небезпечну зону. У міру поглиблення в масив ця концентрація швидко знижується. Особливо слід підкреслити небезпеку появи напружень розтягнення, що найбільш небезпечні для гранітоїдів. Для моделювання цього процесу ми вирішили об'єднати класичний математичний апарат механіки руйнування суцільного середовища з критерієм руйнування Нейбера для кутових зон на уступі кар'єру, який дозволить з високою точністю описати формування напружених кутових зон (рис. 2).

Міцність непорушеної породи описуються з використанням кіл Мора. Особливістю теорії міцності Мора є те, що вона описує руйнування в результаті як зсуву, так і відриву, причому можна оцінювати можливість руйнування в будь-якій точці породного масиву. На відміну від теорії міцності Мора, застосування критерію Нейбера дозволить ще врахувати структуру матеріалу в вершині кутового вирізу і більш точно описати механізм руйнування тріщинуватих тел. При цьому використовуються поняття класичної механіки руйнування (механіка деформованого твердого тіла) і фізики твердого тіла, що пов'язані зі структурою матеріалу. Критерій Ірвіна–Гріффітса успішно працює при розрахунку тріщин, але призводить до заниженим результатам [7–10] у випадку кутових вирізів. Реальна тріщина вже не є розрізом, а являє собою кутовий виріз, тому виникає задача визначення напружено-деформованого стану навколо прямокутного вирізу.

Кут уступу 90 град.



Кут уступу 100 град.



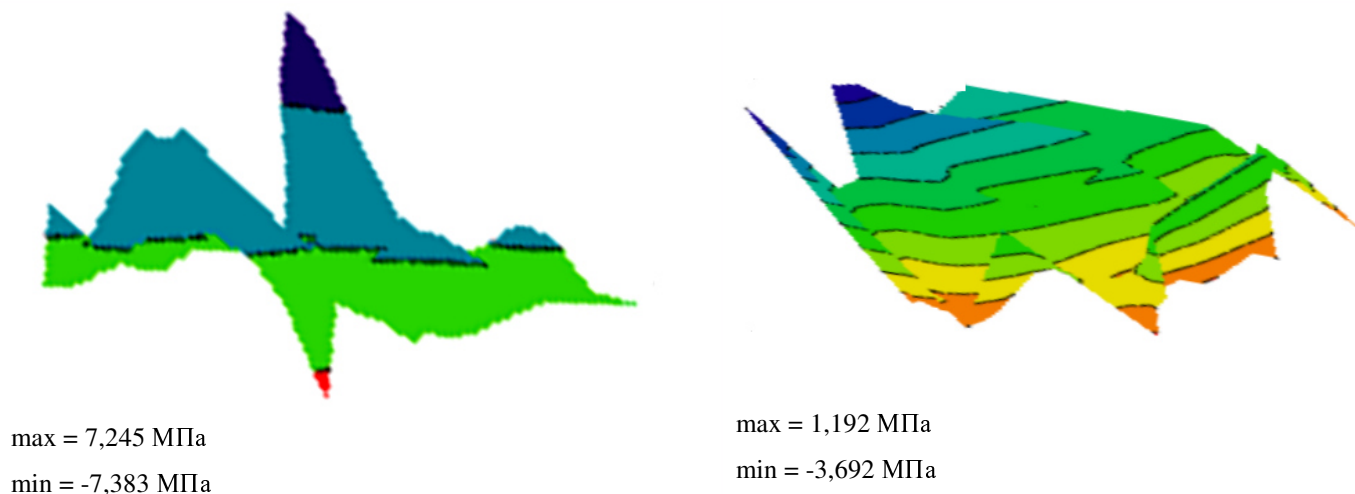


Рис. 2. Залежності дотичних напружень τ і деформацій γ_{xy} за різних значень куткових зон

Висновки та і перспективи подальших досліджень. В результаті проведених досліджень запропоновано математичну модель процесу формування зональної технологічної зональної мікротріщинуватості в процесі виймання блоків. Ця зональна мікротріщинуватості є природним процесом, викликаним розвантаженням і перерозподілом природного напруженого стану масиву внаслідок часткової виїмки блоків. Виключити його повністю неможливо, проте можна регулювати, наприклад, кутом вирізу блока на уступі, знижуючи рівень напружень та деформацій у відповідних куткових зонах. Моделювання та оптимізація цього процесу дозволить підвищити вихід і якість облицовальної продукції, що виготовляється з таких блоків.

Список використаної літератури:

1. Кальчук С.В. Особливості формування поля напружень при видобуванні блочного облицовального каменю / С.В. Кальчук // Вісник НТУУ «КПІ» / Серія «Гірництво». – Вип. 26. – 2014. – С. 80–84.
2. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики / С.Ф. Клованич. – Запорожье : Изд-во журнала «Світ геотехніки», 2009. – 400 с.
3. The study of corrosion resistance of Pokostivskiy granodiorites after processing by various chemical and mechanical methods Construction and Building Materials / I.Korobiichuk, V.Korobiichuk, M.Nowicki et all. – 2016. – № 114. – С. 241–247.
4. Коробійчук В.В. Дослідження впливу висоти та ширини моноліту, який перекидається, на його руйнування / В.В. Коробійчук // Вісник ЖДТУ / Технічні науки. – 2013. – № 1 (64). – С. 134–138.
5. Сахаров А.С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров. – К. : Вища школа, 1982. – 480 с.
6. Бачурин Л.Л. Решение плоской задачи механики деформируемого твердого тела методом конечных элементов в пакете Mathcad / Л.Л. Бачурин // Exponenta Pro. Математика в приложениях. – 2003. – № 3. – С. 28–36.
7. Зуєвська Н.В. Вплив технології видобування природного каменю на його міцнісні характеристики / Н.В. Зуєвська // Проблеми гірського тиску : зб. наук. праць. – ДВНЗ «ДонНТУ», 2012. – № 1 (20). – С. 3–9.
8. Мясникова О.В. Влияние микротрещиноватости породного массива на физико-механические характеристики каменных изделий / О.В. Мясникова, В.А. Шеков // Горный журнал. – 2011. – № 5. – С. 20–22.
9. Соболевський Р.В. Оптимізаційне моделювання технології видобування декоративного каменю / Р.В. Соболевський // Вісник НТУУ «КПІ» / Серія «Гірництво». – Вип. 26. – 2014. – С. 106–111.
10. Корнев В.М. Модификация критерия разрушения Нейбера–Новожилова для угловых вырезов / В.М. Корнев // ПМТФ. – 2002. – Т. 43, № 1. – С. 153–159.

ГОРОБЧИШИН Олег Вікторович – здобувач Національного технічного університету України "КПІ", головний фахівець Державного гемологічного центру України (ДГЦУ).

Наукові інтереси:

- гемологія;
- технологія видобування облицовального каменю.
E-mail: gorol@gems.org.ua.
Тел.: (093)981-11-38.

Стаття надійшла до редакції 17.11.2015