УДК 004.921

Ю.М. Россінський, к.т.н., доц.
С.М. Кравченко, асист.
Житомирський державний технологічний університет

КОМБІНОВАНИЙ АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ КРИВИХ ДОВІЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Стаття присвячена використанню методів комп'ютерної графіки в завданнях моделювання об'єктів, дизайну, конструювання тощо. Широке використання цих методів вимагає розробки алгоритмів побудови кривих довільного вигляду. У статті аналізуються типові алгоритми рішення даної задачі і розглядаються можливості скорочення тимчасових витрат при побудові кривих довільного вигляду. Використовуються дві групи алгоритмів: перша – інтерполяції та апроксимації поліноміальними функціями, друга заснована на конструюванні вигляду кривої в інтерактивному режимі (сплайн-функції, криві Без'є). Будуються криві Без'є 2-го порядку і розглядається схема даного алгоритму. Для спрощення процесу побудови кривих довільного вигляду і скорочення витрат часу пропонується комбінований алгоритм. Порівнюються різні методи моделювання і знаходяться найкращі результати за критерієм гладкості.

Ключові слова: *комбінований алгоритм; алгоритми інтерполяції та апроксимації поліноміальними функціями; сплайн-функції; криві Без'є; апроксимуючий поліном 3-го степеня.*

Постановка проблеми. Актуальність дослідження та стан розробленості проблематики. Широке використання методів комп'ютерної графіки в завданнях моделювання об'єктів, дизайну, конструювання вимагає розробки алгоритмів побудови кривих довільного вигляду. У статті аналізуються типові алгоритми рішення даної задачі і розглядаються можливості скорочення тимчасових витрат при побудові кривих довільного вигляду. Оскільки такого роду криві не мають точного аналітичного опису, то для їх побудови заздалегідь задається деякий набір опорних точок, який визначає вид бажаної кривої.

У відомих алгоритмах побудови плоских кривих розглядаються варіанти використання аналітично заданих функції, як правило, конічних перерізів (коло, еліпс, парабола, гіпербола) [3, 4] чи функцій (сплайни, криві Без'є), параметри яких задаються в інтерактивному режимі [1, 2, 9]. Практичне застосування цих алгоритмів вимагає великих витрат часу на синтез складних кривих, особливо для кривих, що складаються з декількох ділянок (сегментів) з різними трендами змін координат.

Крім того, алгоритми на базі складених функцій [1, 2] не гарантують достатньої гладкості результуючої кривої, що може бути істотним обмеженням при використанні в завданнях дизайну і конструювання.

Застосування для синтезу складних кривих методів інтерполяції та апроксимації [7, 8, 11] істотно зменшує час синтезу, але вимагає вирішення проблеми неоднозначності для випадків, коли крива містить ряд сегментів з різними трендами змін координат.

Необхідність скорочення витрат часу на синтез складних кривих і забезпечення необхідної якості відтворення вимагає подальшого аналізу алгоритмів побудови кривих довільного виду і пошуку варіантів їх оптимізації.

Викладення основного матеріалу. При визначенні за заданими опорними точками аналітичної кривої найчастіше використовуються дві групи алгоритмів [1, 2, 9].

У першій ставиться завдання знаходження аналітичної функції, яка проходить через всі опорні точки або максимально наближена до них. Такими є алгоритми інтерполяції та апроксимації поліноміальними функціями.

При використанні алгоритмів інтерполяції і апроксимації як інтерполюючої (апроксимуючої) функції зручно використовувати різного роду поліноми: степеневий поліном (1), поліном Ньютона (2), поліном Лагранжа (3), ортогональні поліноми (4) [5, 6]:

$$P_n(t) = \sum_i C_i t^i,\ i = 0 \ldots n; \quad (1)$$

$$P_n(t) = C_0 + C_1(t - t_0) + C_2(t - t_0)(t - t_1) + \ldots; \quad (2)$$

$$P_n(t) = \sum_i Y_i \prod_j (t - t_i)/(t_j - t_i),\ i = 0 \ldots n,\ j = 0 \ldots n,\ j <> i; \quad (3)$$

$$P_n(t) = \sum_i C_i T_i,\ i = 0 \ldots n, \quad (4)$$

де T_i – ортогональні базисні функції;

$$T_0(X) = 1, T_1(X) = X, T_{k+1}(X) = 2XT_k(X) - T_{k-1}(X), \quad (5)$$

де n – ступінь полінома; C_i – коефіцієнти полінома; t_i – значення аргументу у вузлових точках; Y_i – значення функції у вузлових точках.

Для обчислення коефіцієнтів поліномів (1), (4) необхідно вирішити систему лінійних рівнянь вигляду: $C \cdot T = Y$, де C – матриця коефіцієнтів полінома; T – матриця значень аргументу у вузлових точках; Y – матриця значень функції у вузлових точках.

Перевагами алгоритмів інтерполяції та апроксимації є можливість багатократного відтворення однієї й тієї самої кривої, оскільки вид цієї кривої однозначно задається коефіцієнтами відповідних поліномів, які обчислюються за заданими опорними точками.

Недоліками застосування методів інтерполяції і апроксимації для синтезу кривих довільного вигляду є неможливість відтворення кривих, що мають інтервали неоднозначності. Крім того, при використанні інтерполяції, коли функція повинна проходити через всі опорні точки, що відповідає ступеню полінома $n = m$ (m – кількість опорних точок), на пологих ділянках кривої виникають переколивання (рис. 1).

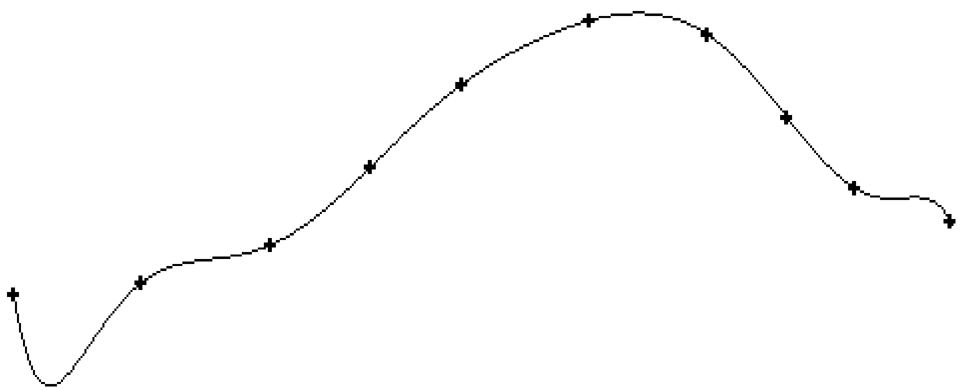

Рис. 1. Інтерполяція опорних точок

При використанні апроксимації, коли апроксимуюча функція не проходить через всі опорні точки і є оптимальним наближенням кривої, що синтезується, ступінь полінома $n < m$ (m – кількість опорних точок), переколивання можна усунути раціональним вибором ступінь полінома n ($n = 2 \ldots 5$) (рис. 2).

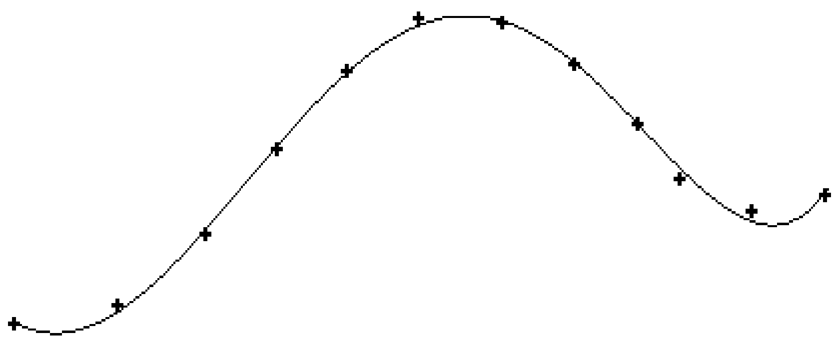

Рис. 2. Апроксимація опорних точок

Друга група алгоритмів для синтезу кривих довільного типу заснована на конструюванні вигляду кривою в інтерактивному режимі (сплайн-функції, криві Без'є). У цих алгоритмах лише деякі опорні точки є точками кривої, а інші задають вид кривої [2].

Типовим виглядом сплайн-функції є B-сплайн, в якому як апроксимуюча функція використовується степеневий поліном 3-ого ступеню вигляду (рис. 3):

$$P(t) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3 . \quad (6)$$

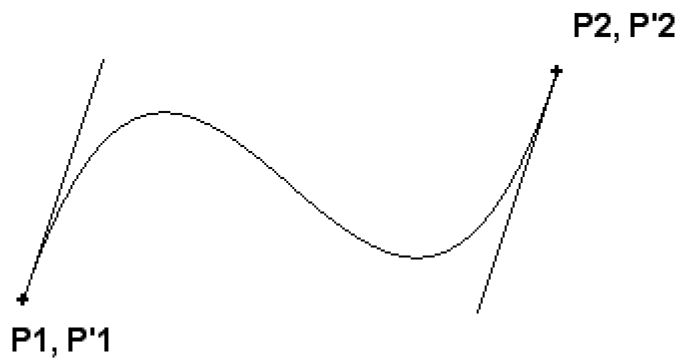

Рис. 3. B-сплайн

Коефіцієнти полінома B_0, B_1, B_2, B_3 обчислюються за формулами:

$$B_0 = P_1, B_1 = P_1', B_2 = 3 \cdot (P_2 - P_1) / t_2^{\,2} - (2 \cdot P_1' / t_2) - (P_2' / t_2) ; \quad (7)$$

$$B_3 = 2 \cdot (P_1 - P_2) / t_2^{\,3} + P_1' / t_2^{\,2} + P_2' / t_2^{\,2} , \quad (8)$$

де P_1, P_2 – координати початкової і кінцевої точок кривої; P_1', P_2' – похідні функції в початковій і кінцевій точках кривої; t_2 – кінцеве значення аргументу функції.

Як видно з рисунку 3, вид кривої задається значеннями похідних P_1' *і* P_2' у початковій та кінцевій точках кривої, що дозволяє змінювати його в процесі конструювання в широких межах. Проте цей процес може бути достатньо трудомістким і тривалим за часом.

Складніший вид кривої може бути отриманий при використанні багатосегментних сплайнів (рис. 4).

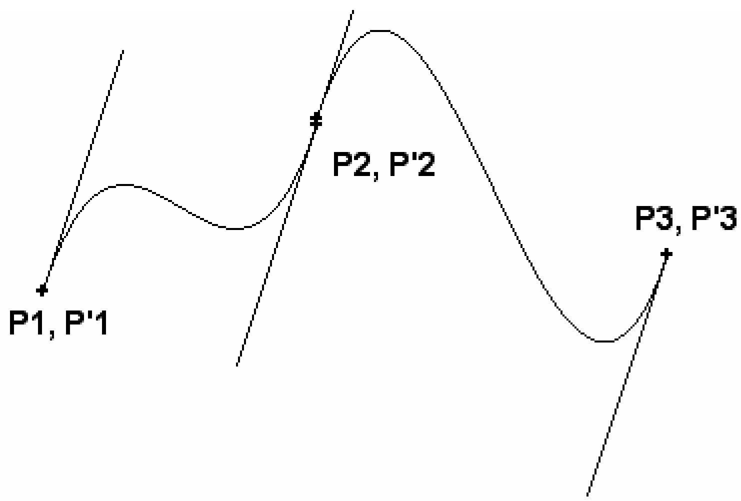

Рис. 4. Багатосегментний B-сплайн

У цьому випадку коефіцієнти апроксимуючої функції для сегментів повинні обчислюватися з урахуванням умови безперервності кривої на межах сегментів, що ще більше ускладнює процес побудови кривої.

Рішення даної задачі припускає завдання опорних точок і значення похідних в початковій та кінцевих точках кривої, обчислення похідних в проміжних точках з умовою безперервності кривої і визначення коефіцієнтів полінома для кожного сегмента [1].

Для спрощення обчислювальної процедури вважають, що параметр t у межах кожного сегмента змінюється в діапазоні $0 \ldots 1 (0 \le t \le 1)$. У цьому випадку коефіцієнти кубічного сплайну визначаються з матричного рівняння:

$$\begin{vmatrix} B_4 \\ B_3 \\ B_2 \\ B_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ P'_k \\ P'_{k+1} \end{vmatrix}, 1 \le k \le n-1 .$$

Для визначення похідних у проміжних точках необхідно вирішити матричне рівняння виду:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \\ \dots \\ P'_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cdot(P_3 - P_1) - P'_1 \\ 3\cdot(P_4 - P_2) \\ 3\cdot(P_5 - P_3) \\ \dots\dots \\ 3\cdot(P_n - P_{n-1}) - P'_n \end{vmatrix} .$$

Для створення кривий Без'є задається полігон опорних точок. Початкова і кінцева точки полігонів є точками кривої, а проміжні точки задають хід кривої (рис. 5).

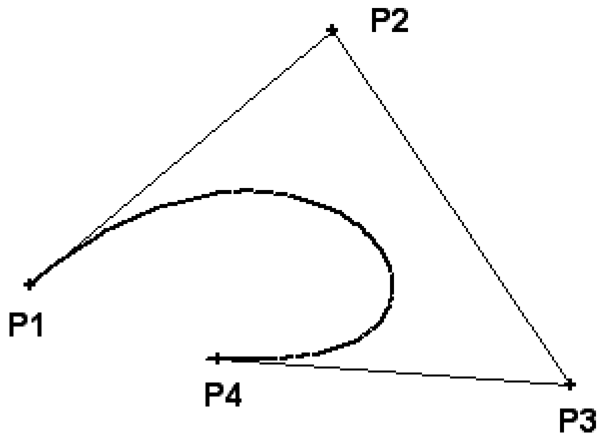

Рис. 5. Крива Без'є

Математично криві Без'є описують поліном, базисною функцією якого є поліном Бернштейна:

$$J_{n,i}(t) = C^n{}_i \cdot (t^i) \cdot (1-t)^{(n-i)}, \tag{9}$$

де

$$C^n{}_i = n!/(i!(n-1)!),\ 0 \le i \le n\ ; \tag{10}$$

n – ступінь поліном; i – порядковий номер вершини.

Будь-яка точка кривої Без'є описується виразом:

$$P(t) = P_0 \cdot J_{n,0}(t) + P_1 \cdot J_{n,1}(t) + \ldots + P_n \cdot J_{n,n},\ 0 \le t \le 1, \tag{11}$$

де $P_0, P_1, P_2, \ldots P_n$ – вершини умовного багатокутника.

Для створення складніших кривих використовуються багатосегментні криві Без'є (рис. 6).

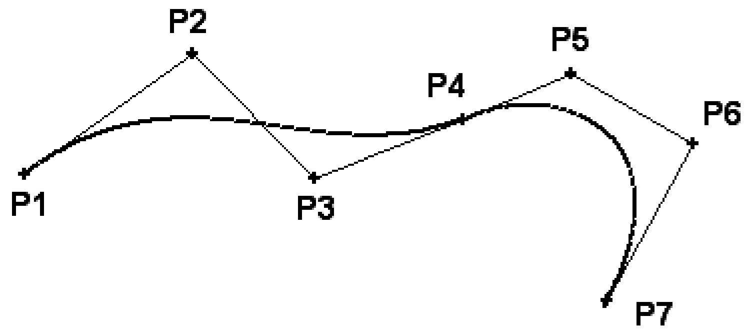

Рис. 6. Багатосегментна крива Без'є

У цьому випадку для винятку зламу кривої на межі двох сегментів необхідно, щоб дотична в кінцевої точці 1-го сегмента збігалася з дотичною в першій точці 2-го сегмента. Як видно з рисунка, для цього достатньо задати вершину P_5 на лінії $P_3 P_4$.

Розглянуті алгоритми побудови кривих 2-го виду дозволяють створювати будь-які складні криві за рахунок підбору виду кривої на кожному сегменті, що вимагає великих витрат часу.

Для спрощення процесу побудови кривих довільного вигляду і скорочення витрат часу пропонується комбінований алгоритм наступного вигляду:

1. Задати послідовність опорних точок (рис. 7).
2. Поділити опорні точки за критерієм монотонності за координатою X.

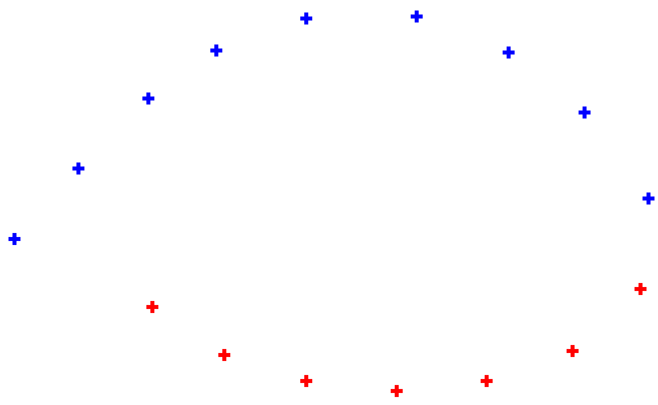

Рис. 7. Масив опорних точок

3. Для кожної групи монотонних точок знайти апроксимуючий поліном (рис. 8).

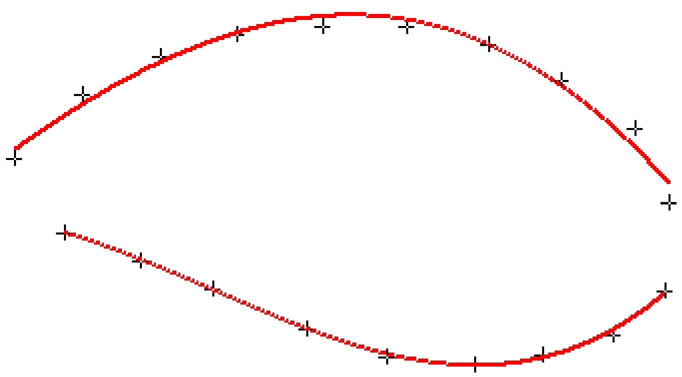

Рис. 8. Апроксимація опорних точок

4. Для з'єднання ділянок кривою використовувати криву Без’є 2-го порядку (рис. 9).

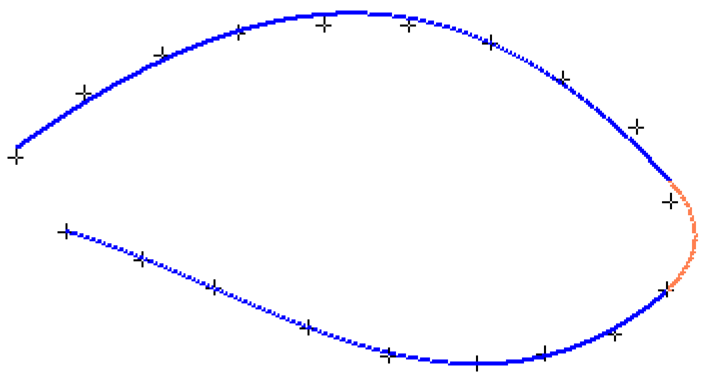

Рис. 9. Крива довільного вигляду

Початковими даними для побудови кривої Без'є, що сполучаються, є кінцеві точки монотонних ділянок і проміжна точка, яка може бути визначена як точка перетину дотичних в кінцевих точках монотонних сегментів за формулами:

$$x = (y_2 - y_1 + k_1 x_1 - k_2 x_2)/(k_1 - k_2), \quad (12)$$

$$y = y_1 + k_1 (x - x_1). \quad (13)$$

де x, y – координати проміжної точки; x_1, y_1 – координати кінцевої точки 1-го сегмента; x_2, y_2 – координати кінцевої точки 2-го сегмента; k_1, k_2 – значення похідних в кінцевих точках 1-го і 2-го сегментів.

Для випадку, коли крива повинна проходити через всі опорні точки в даному алгоритмі передбачена апроксимація кожної пари опорних точок на кожному інтервалі монотонності кривих Без'є 2-го порядку (рис. 10).

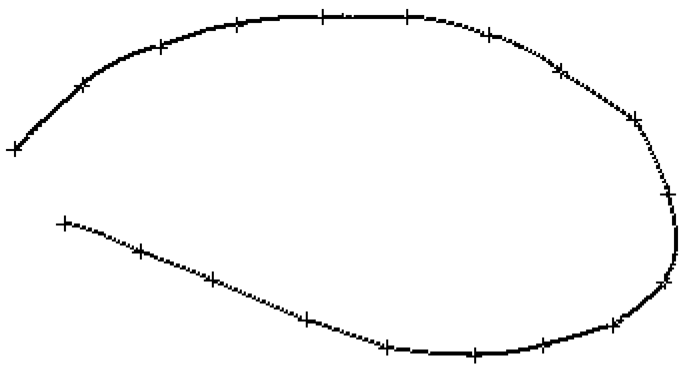

Рис. 10. Крива довільного вигляду

У цьому варіанті можлива корекція кривої для будь-якої пари опорних точок в інтерактивному режимі.

На рисунку 11 відображена схема розглянутого вище алгоритму.

Вхідними даними алгоритму є масив опорних точок та їх кількість. В процесі формування сегментів опорні точки кожного сегмента, а також кінцеві точки і значення похідних в цих точках зберігаються в окремих масивах.

У циклі для кожного сегмента обчислюються коефіцієнти апроксимуючого полінома і відображаються усі точки сегмента. На завершальному етапі обчислюються точки полігону для побудови кривої Без'є, що сполучає суміжні сегменти.

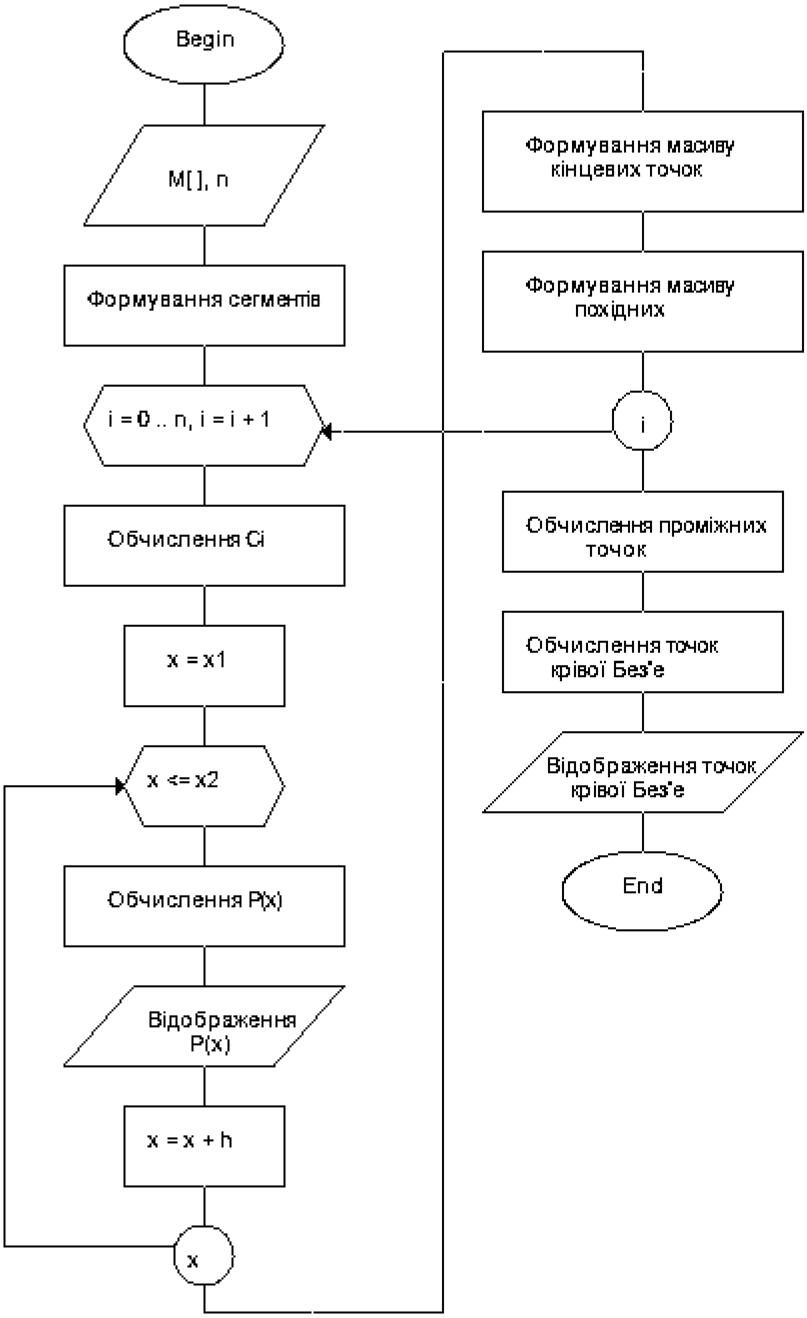

Рис. 11. Схема алгоритму

На рисунку 12 показаний результат роботи алгоритму.

Для оцінки якості відтворення кривих для різних варіантів їх синтезу проведений аналіз похідної інтерполюючої й апроксимуючої функцій для 2-сегментної кривої.

На рисунку 13, *а* показаний варіант застосування інтерполяції, а на рисунку 13, *b* – графік змін похідної для 1-го і 2-го сегментів кривої.

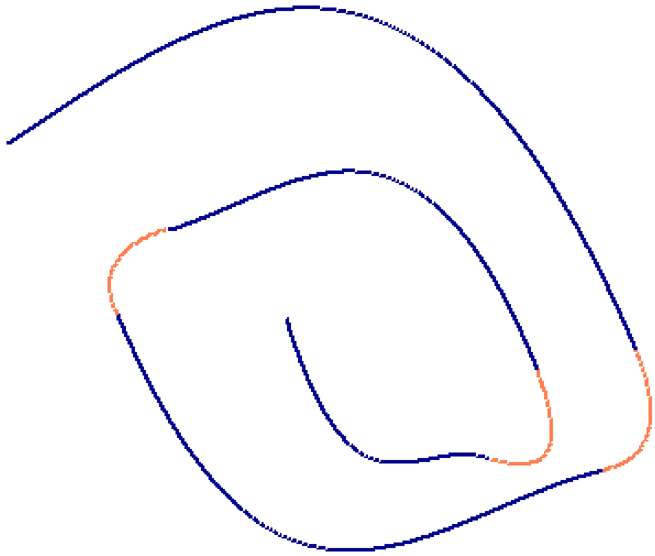

Рис. 12. Крива довільного вигляду

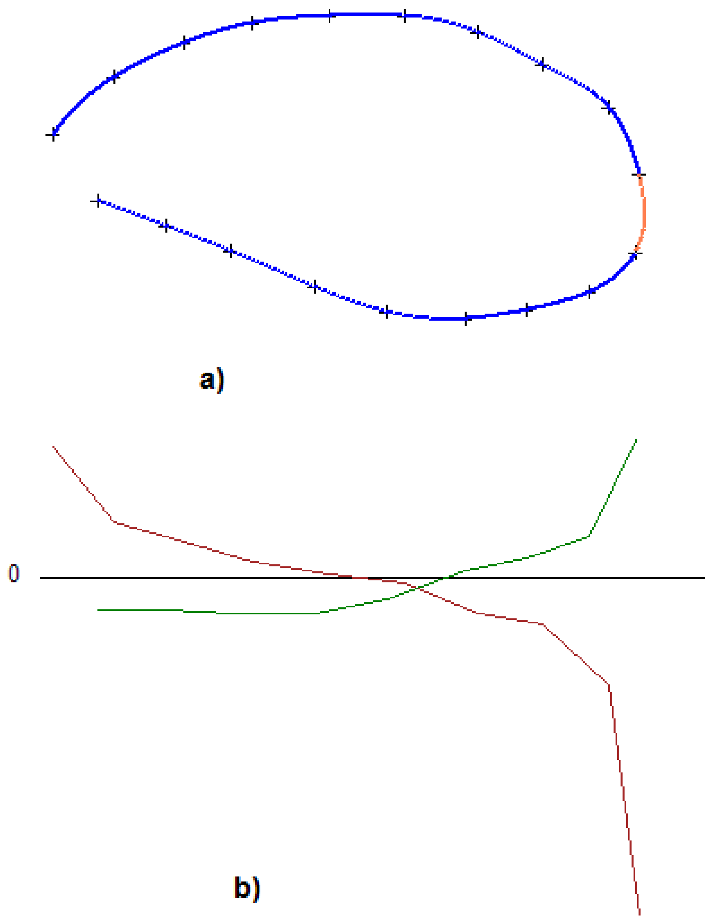

Рис. 13. Варіанти інтерполяції

На рисунку 14, *a* показаний варіант застосування апроксимації, а на рисунку 14, *b* – графік змін похідної для 1-го і 2-го сегментів кривої.

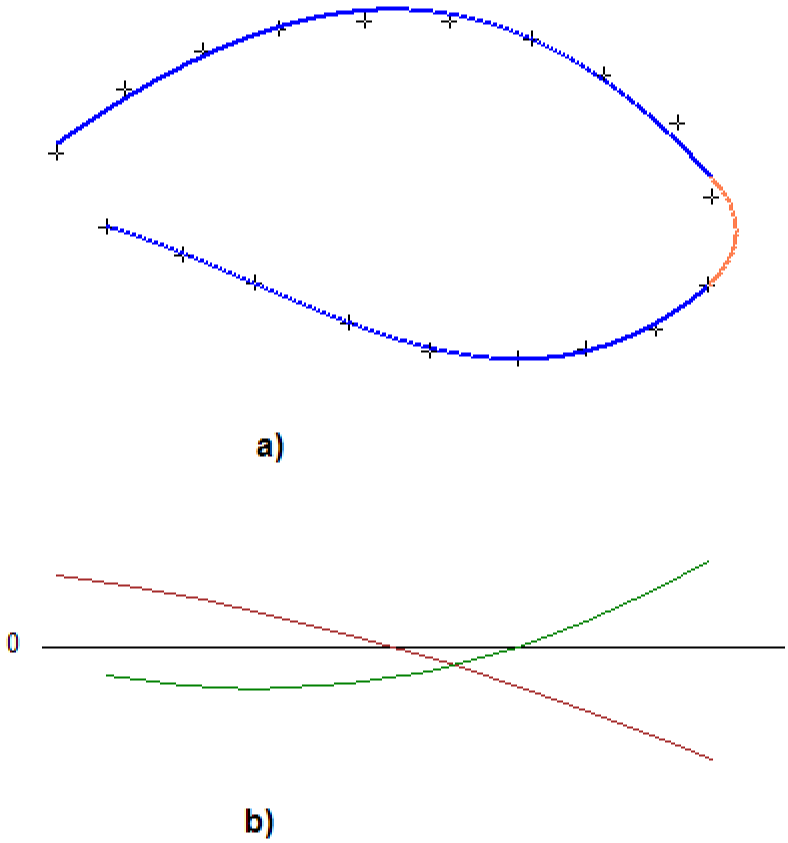

Рис. 14. Варіанти апроксимації

Як видно з рисунків 13 і 14, використання методів апроксимації в алгоритмах синтезу кривих довільного виду забезпечує більш високу якість відтворення за критерієм гладкості кривої.

Висновки. В роботі було проведено аналіз алгоритмів побудови кривих довільного виду і знаходження можливості скорочення тимчасових витрат при побудові кривих довільного вигляду. Порівнювались різні методи моделювання і знаходились найкращі результати за критерієм гладкості. Для спрощення процесу побудови кривих довільного вигляду і скорочення витрат був запропонований комбінований алгоритм, який дозволяє синтезувати криві довільного виду будь-якої складності та істотно скорочує час синтезу кривих довільного виду. За критерієм гладкості найкращі результати забезпечує використання апроксимуючого полінома 3-го степеня.

Список використаної літератури:

1. *Гилой В.* Интерактивная машинная графика: Структуры данных, алгоритмы, языки / *В.Гилой ;* пер. с англ. – М. : Мир, 1981. – 384 с.
2. *Роджерс Д.* Математические основы машинной графики / *Д.Роджерс, Дж.Адамс ;* пер. с англ. – М. : Машиностроение, 1980. – 240 с.
3. *Роджерс Д.* Алгоритмические основы машинной графики / *Д.Роджерс ;* пер. с англ. – М. : Мир, 1989 . – 512 с.
4. *Эгрон Ж.* Синтез зображений. Базовые алгоритмы / *Ж.Эгрон.* – М. : Радио и связь, 1993. – 322 с.
5. *Порев В.Н.* Компьютерная графика / *В.Н. Порев.* – СПб. : БХВ-Петербург, 2002. – 432 с.
6. *Блінова Т.О.* Комп'ютерна графіка / *Т.О. Блінова, В.Н. Порев.* – К. : Юніор, 2004. – 436 с.
7. *Рыжиков Ю.И.* Вычислительные методы / *Ю.И. Рыжиков.* – СПб. : БХВ-Петербург, 2007. – 400 с.
8. *Фельдман Л.П.* Чисельні методи в інформатиці / *Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва.* – К. : Вид. група BHV, 2006. – 480 с.
9. *Ньюмен У.* Основы интерактивной машинной графики / *У.Ньюмен, Р.Спрулл ;* пер. с англ. – М. : Мир, 1976 . – 424с.
10. *Тихомиров Ю.Н.* Программирование трехмерной графики / *Ю.Н. Тихомиров.* – СПб. : БХВ-Петербург, 1998. – 256 с.

11. *Боглаев Ю.П.* Вычислительная математика и программирование / *Ю.П. Боглаев*. – М. : Высшая школа, 1990. – 543 с.
12. *Абрамян М.Э.* Visual C# на примерах / *М.Э. Абрамян*. – СПб. : БХВ-Петербург, 2008. – 496 с.

РОССІНСЬКИЙ Юрій Михайлович – кандидат технічних наук, доцент кафедри комп’ютерної інженерії Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
- комп’ютерна графіка;
- алгоритми графіки;
- алгоритми обробки інформації;
- чисельні алгоритми;
- структури даних.

КРАВЧЕНКО Світлана Миколаївна – асистент кафедри програмного забезпечення систем Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
- економіка програмного забезпечення;
- менеджмент проектів програмного забезпечення;
- людино-машинна взаємодія;
- інформаційні системи і технології;
- Інтернет-технології.

Стаття надійшла до редакції 07.11.2014

Россінський Ю.М., Кравченко С.М. Комбінований алгоритм побудови кривих довільного вигляду.
Россинский Ю.М., Кравченко С.Н. Комбинированный алгоритм построения кривых произвольного вида.
Rossinsky Y.M., Kravchenko S.M. Combined algorithm for constructing curves of arbitrary form.

УДК 004.921

Комбинированный алгоритм построения кривых произвольного вида / Ю.М. Россинский, С.Н. Кравченко

Статья посвящена использованию методов компьютерной графики в задачах моделирования объектов, дизайна, конструирования и тому подобное. Широкое использование этих методов требует разработки алгоритмов построения кривых произвольного вида. В статье анализируются типичные алгоритмы решения данной задачи и рассматриваются возможности сокращения временных затрат при построении кривых произвольного вида. Используются две группы алгоритмов: первая – интерполяции и аппроксимации полиномиальными функциями, вторая основана на конструировании вида кривой в интерактивном режиме (сплайн-функции, кривые Безье). Строятся кривые Безье 2-го порядка и рассматривается схема данного алгоритма. Для упрощения процесса построения кривых произвольного вида и сокращения затрат времени предлагается комбинированный метод. Сравниваются различные методы моделирования и находятся лучшие результаты по критерию гладкости.

Ключевые слова: комбинированный метод; алгоритмы интерполяции и аппроксимации полиномиальными функциями; сплайн-функции; кривые Безье; аппроксимирующий полином 3-й степени.

УДК 004.921

Combined algorithm for constructing curves of arbitrary form / Y.M. Rossinsky, S.M. Kravchenko

Article is devoted to the use of computer graphics techniques for modeling objects, design, construction and the like. The widespread use of these methods requires the development of algorithms for constructing curves of arbitrary form. The paper analyzes the typical algorithms for solving this problem and discusses the possibility of reducing the time spent in the construction of curves of arbitrary form. Two sets of algorithms: the first - interpolation and approximation of polynomial functions, the second group is based on the design of the form of the curve in interactive mode (spline - function, Bezier curves). Bezier curves are constructed 2nd order and considered the scheme of the algorithm. To simplify the process of constructing curves of arbitrary form and reduce the amount of time the combined method is proposed. Comparing different modeling techniques and the best results are the criterion of smoothness.

Keywords: combined method; interpolation and approximation algorithms for polynomial functions; spline; Bezier curves; approximating polynomial of the third degree.