АВІАЦІЙНА ТА РАКЕТНО-КОСМІЧНА ТЕХНІКА

А.М. Маліца, Д.В. Пекарєв, Д.В. П'ясковський

РОЗРАХУНОК ЙМОВІРНОСТІ АВАРІЙНОЇ ДОСТАВКИ ВАНТАЖУ НА ШТУЧНИЙ СУПУТНИК ЗЕМЛІ

Розглядається метод апріорної оцінки ефективності системи аварійної доставки вантажу при транспортуванні капсули ракетою, яка запускається з літака-носія на штучний супутник Землі. Як критерій ефективності системи прийнята умовна ймовірність влучання капсули в область, де знаходиться супутник, що обумовлена можливістю стиковки з ним. В основу методу покладені аналітико-алгоритмічні процедури визначення оптимального напрямку польоту літака-носія, прогнозування траєкторії руху ракети з капсулою та супутника, визначення простору маневрування вантажної капсули та обчислення інтеграла ймовірності стиковки капсули зі штучним супутником Землі у межах простору можливої стиковки.

Вступ

Однією з складових ефективності космічної системи є ефективність функціонування супутників. У загальному випадку ефективність функціонування окремого штучного супутника Землі можна представити у вигляді:

$$W_{шсз} = W_{шр} \cdot P_{шр} + W_{ас} \cdot P_{ас}, \tag{1}$$

де $W_{шсз}$ – ефективність функціонування штучного супутника Землі;

$W_{шр}, P_{шр}$ – ефективність функціонування супутника у штатному режимі та ймовірність відсутності аварійної ситуації відповідно;

$W_{ас}, P_{ас}$ – ефективність функціонування супутника в умовах виникнення аварійної ситуації та ймовірність виникнення аварійної ситуації відповідно.

У свою чергу, ефективність функціонування штучного супутника Землі в умовах виникнення аварійної ситуації можна представити у вигляді:

$$W_{ас} = W_{шр} \cdot P_{уас}, \tag{2}$$

$$W_{шсз} = W_{шр} \cdot P_{шр} + W_{шр} \cdot P_{уас} \cdot P_{ас} = W_{шр}(P_{шр} + P_{уас} \cdot P_{ас}), \tag{3}$$

де $P_{уас}$ – ймовірність усунення аварійної ситуації шляхом доставки вантажу на борт штучного супутника Землі.

Таким чином, для оцінки ефективності супутника у загальному випадку необхідно врахувати можливості усунення несправностей на його борту, тобто ймовірність можливості аварійної доставки вантажу на штучний супутник Землі з метою усунення аварійної ситуації.

Метою досліджень є розробка методу та математичної моделі апріорної оцінки ефективності системи аварійної доставки вантажу на штучний супутник Землі.

1. Постановка задачі

Система доставки вантажу містить у собі вантажну капсулу, яка споряджена системою самонаведення. Капсула доставляється у простір можливої стиковки за допомогою ракетоносія типу "Пегас", який запускається з літака-носія.

Доставка вантажу здійснюється таким чином. За час одного витка супутника наземні засоби прогнозують його орбіту, а також місце та час зустрічі з капсулою. Літак-носій з ракетою на борту вилітає з аеродрому базування у заданий район та виконує пуск ракети з капсулою по цілевказівкам, які надходять з наземних засобів. По закінченні активного відрізка польоту ракети капсула відділяється, система самонаведення захоплює супутник та зближається з ним. На відрізку самонаведення "вибираються" помилки цілевказівок та виведення, а також промах капсули, який був накопичений раніше. Умовами успішної доставки вантажу є влучання капсули в область простору, де можлива стиковка зі штучним супутником Землі.

Приймемо наступні припущення:

– стиковка здійснюється у просторі, де впливом атмосфери можливо зневажити;

– система наведення та система стеження за супутником характеризуються помилками функціонування, які мають нормальний закон розподілу;

– всі необхідні масово-енергетичні характеристики капсули зберігаються у бортовій обчислювальній машині системи наведення, відомі закони розподілу та ймовірнісні параметри указаних характеристик;

– маневр капсули на відрізку самонаведення у картинній площині (при "виборі" промаху) здійснюється з застосуванням двигунів маневру, сила тяги яких прикладена до центра мас капсули і ортогональна його подовжній осі.

Задача представляється наступним чином. Відомі чи апріорі вираховуються: оскулюючі параметри орбіти штучного супутника Землі, ймовірнісні характеристики, масово-енергетичні та інші основні параметри ракети та капсули з системою самонаведення. Необхідно знайти явний вираз ймовірності аварійної доставки вантажу на супутник, а також побудувати алгоритм його розрахунку.

2. Функціональний вираз ймовірності аварійної доставки вантажу на борт штучного супутника Землі

Ймовірність, яка розглядається, функціонально має вигляд [4]:

$$P = \iiint_{-\infty}^{+\infty} G(\Delta r(\tau^*),n) \cdot p(\Delta r(\tau^*))d\Delta r(\tau^*), \tag{4}$$

де

$$\Delta r(\tau^*) = r^{шсз}(\tau^*) - r^{вк}(\tau^*), \tag{5}$$

$\Delta r(\tau^*)$ – промах вантажної капсули у момент стиковки τ^*;

$r^{шсз}(\tau^*), r^{вк}(\tau^*)$ – вектор положення центра мас штучного супутника Землі і вантажної капсули відповідно у момент t^*,

$$\tau^* = t^* - t_0; \tag{6}$$

τ^* – відносний повний час транспортування вантажу (рис. 1);

t^*, t_0 – моменти стиковки та запуску ракети з літака-носія;

$\tau = t - t_0$ – поточний відносний час транспортування вантажу;

t – поточний час;

$p(\Delta r(\tau^*),n)$ – щільність ймовірності розподілу вектора $\Delta r(\tau^*)$;

$G(\Delta r(\tau^*),n)$ – функція, яка відображає закон можливості доставки вантажу;

n – сукупність відомих параметрів, які характеризують різні завади на шляху прямування вантажу та енергетичні можливості системи самонаведення.

Через надто невизначені відомості про функцію $G(\Delta r(\tau^*),n)$ доцільно прийняти її значення рівним одиниці.

Оскільки маневр вантажної капсули обмежений простором маневрування, вираз для розрахунку ймовірності доставки вантажу (4) запишеться у вигляді:

$$P(V_r) = \iiint_{V_r} p(\Delta r(\tau^*))d\Delta r(\tau^*). \tag{7}$$

Для розрахунку $P(V_r)$ необхідно визначити щільність ймовірності розподілу вектора промаху вантажної капсули і простору можливої стиковки V_r.

2.1. Побудова функції щільності ймовірності розподілу вектора промаху вантажної капсули

Для поточного значення τ випадковий вектор $\Delta r(\tau^*)$, згідно з (5), може бути представлений у вигляді:

$$\Delta r(\tau) = (r^{Дшсз}(\tau) + \delta r^{шсз}(\tau)) - (r^{Двк}(\tau) + \delta r^{вк}(\tau)), \tag{8}$$

де $r^{Дшсз}(\tau), r^{Двк}(\tau)$ – детерміновані складові векторів положення центрів мас штучного супутника Землі та вантажної капсули відповідно;

$\delta r^{шсз}(\tau), \delta r^{вк}(\tau)$ – випадкові складові векторів положення штучного супутника Землі та вантажної капсули, які обумовлені похибками систем супроводження та прогнозування руху супутника та відповідно систем наведення і управління (стабілізації) капсули.

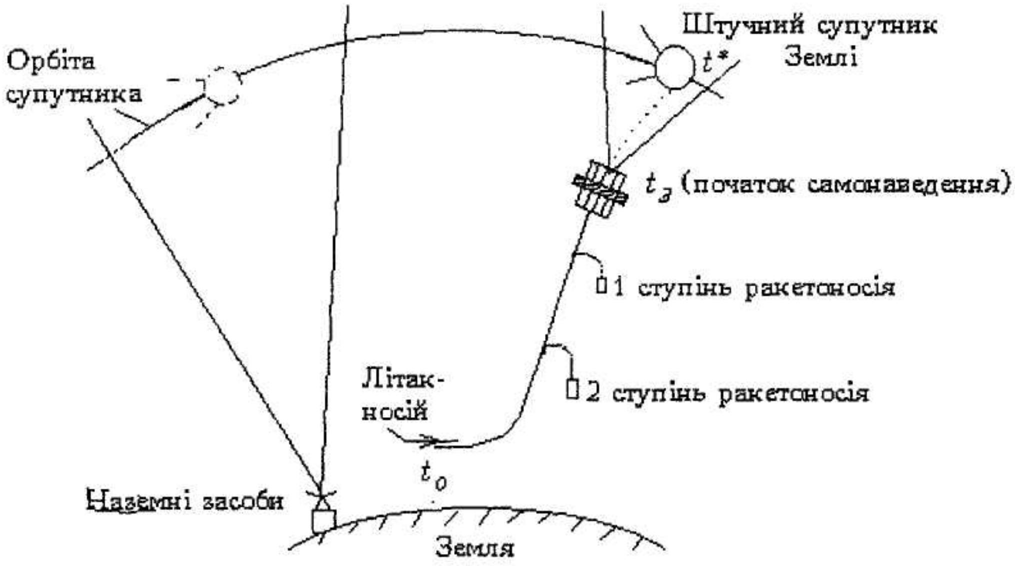

Рис. 1. Схема аварійної доставки вантажу

Закон розподілу вектора $\Delta r(\tau^*)$, як виходить з (8), визначається законами розподілу помилок супроводження, прогнозування траєкторії штучного супутника Землі та наведення вантажної капсули. Згідно з припущенням про нормальний закон розподілу показаних помилок, а також центральною граничною теоремою Ляпунова-Ліндберга [7], можна вважати розподіл вектора $\Delta r(\tau^*)$ нормальним, який визначається як [2]:

$$p(\Delta r(\tau^*)) = (2\pi)^{-3/2} \det \sum\nolimits_r^{-1/2}(\tau^*) \cdot \\ \exp\left\{-\frac{1}{2}(\Delta r(\tau^*) - M[\Delta r(\tau^*)])^T \cdot \sum\nolimits_r^{-1}(\tau^*) \cdot (\Delta r(\tau^*) - M[\Delta r(\tau^*)])\right\}, \quad (9)$$

де $M[\Delta r(\tau^*)]$ – математичне сподівання;

$\sum_r(\tau^*)$ – коваріаційна матриця вектора $\Delta r(\tau^*)$.

Розглянемо вектор $M[\Delta r(\tau^*)]$. Вектор $r^{Дшсз}(\tau^*)$ оцінюється (прогнозується) за вимірюваннями наземних засобів для наведення капсули у прогнозовану точку стиковки $r^{шсз}(\tau^*) = r^{*шсз}$. Величина вектора $r^{*шсз}$ розрахсвується з точністю, яка характеризується нерівністю $\left\| r^{Дшсз}(\tau^*) - r^{*шсз} \right\| \le \varepsilon_R$, де ε_R – задана величина.

Для існуючих систем наведення та стабілізації $\tilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon_R}{D} \approx 10^{-4}...10^{-6}$, де D – характерна середня дальність наведення. Згідно з цим, $r^{Двк}(\tau^*) \cong r^{*шсз}$ (номінальне наведення забезпечує точне попадання вантажної капсули у прогнозовану точку зустрічі зі штучним супутником Землі).

Таким чином, отримуємо вираз:

$$M[\Delta r(\tau^*)] = M\left[r^{Двк} + \delta r^{вк} - r^{*шсз} - \delta r^{шсз}\right] \cong M\left[\Delta r^{*шсз} - \delta r^{шсз} - \delta r^{вк}\right] = \Delta r^{*шсз}, \quad (10)$$

згідно з яким математичне сподівання промаху капсули (систематичний промах) обумовлено помилкою прогнозування траєкторії штучного супутника Землі.

Коваріаційна матриця $\sum_r(\tau^*)$ набуває вигляду:

$$\sum\nolimits_r(\tau^*) = \sum\nolimits_{r^{шсз}}(\tau^*) + \sum\nolimits_{r^{вк}}(\tau^*), \quad (11)$$

де $\sum_{r^{шсз}}(\tau^*)$ – коваріаційна матриця вектора помилок вимірювання траєкторії штучного супутника Землі системою супроводження (визначається як задана паспортна характеристика);

$\sum_{r^{вк}}(\tau^*)$ – коваріаційна матриця вектора $\Delta r^{вк}(\tau^*)$ промаху відносно прогнозованої точки стиковки (вектор $\Delta r^{вк}(\tau^*)$ обумовлений помилками системи початкової орієнтації капсули, її наведення та стабілізації).

Коваріаційна матриця вектора $\Delta r^{вк}(\tau^*)$ структурно визначається як [7]:

$$\Sigma_{r^{вк}} = \Sigma_{\delta\Delta r^{вк}} = \begin{vmatrix} D_{\delta x} & \Sigma_{\delta x\delta y} & \Sigma_{\delta x\delta z} \\ \Sigma_{\delta y\delta x} & D_{\delta y} & \Sigma_{\delta y\delta z} \\ \Sigma_{\delta z\delta x} & \Sigma_{\delta z\delta y} & D_{\delta z} \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Обравши відповідну систему координат, математичне сподівання підінтегральної функції буде дорівнювати нулю, а коваріаційна матриця стане діагональною. Таким чином, вираз (9) буде мати вигляд:

$$p(\Delta r(\tau^*)) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\cdot(D_x D_y D_z)^{1/2}}\cdot exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{D_x}+\frac{y^2}{D_y}+\frac{z^2}{D_z}\right)\right\}. \quad (13)$$

Таким чином, знайдено вираз для щільності ймовірності розподілу вектора промаху вантажної капсули.

2.2. Визначення межи простору можливої стиковки

У гіпотетичному випадку, коли вплив гравітаційного прискорення на рух капсули настільки малий, що ним можна знехтувати, і коригуючі імпульси двигунів маневру (для компенсування промаху) реалізуються миттєво та одноразово, простір можливої стиковки, який визначається можливостями за маневром вантажної капсули, представляється круговим моноконусом, вісь симетрії якого співпадає з вектором швидкості капсули $V^{вк}$ у момент $t_з$, тобто $V^{вк}(t_з)$, а вершина конуса визначається точкою $M_з$ (рис. 2).

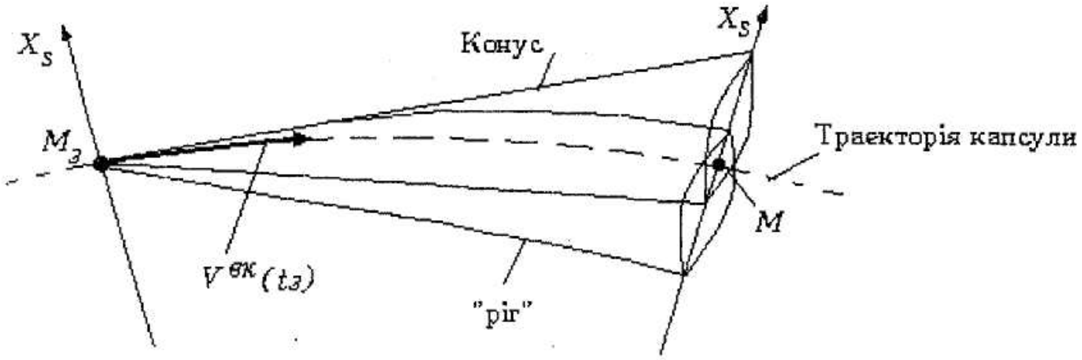

Рис. 2. Геометрична інтерпритація простору можливої стиковки вантажної капсули зі штучним супутником Землі

Кут напіврозхилу конуса (рис. 2) обчислюється за формулами для кута повороту площини орбіти штучного супутника Землі при імпульсному коригуванні [6]:

$$\alpha_{max} = |\psi_{max}| = arcsin\left(\frac{G}{\sqrt{1+G^2}}\right), \quad (14)$$

де $G = \dfrac{V^{вк}_{хар}}{\|V^{вк}(t_з)\|}$;

$V^{вк}_{хар}$ – запас характеристичної швидкості вантажної капсули;

$\|V^{вк}(t_з)\|$ – величина орбітальної швидкості капсули у точці захвату $M_з$.

Швидкість $V^{вк}_{хар}$ витрачається тільки на компенсацію промаху (вектор тяги перпендикулярний поздовжній осі капсули, яка колінеарна вектору орбітальної швидкості у точці захвату $M_з$).

Реально простір можливої стиковки являє собою "ріг" (рис. 2) з площиною симетрії, яка співпадає з вертикальною площиною, що проходить через вектори $V^{вк}(t_з)$ та $r^{вк}(t_з)$.

Уявляючи область знаходження штучного супутника Землі, з урахуванням помилок цілевказівок, у вигляді сфери, а простір можливої стиковки у вигляді конуса (рис. 3), межі інтегрування для інтеграла виразу (7) визначаються наступним чином.

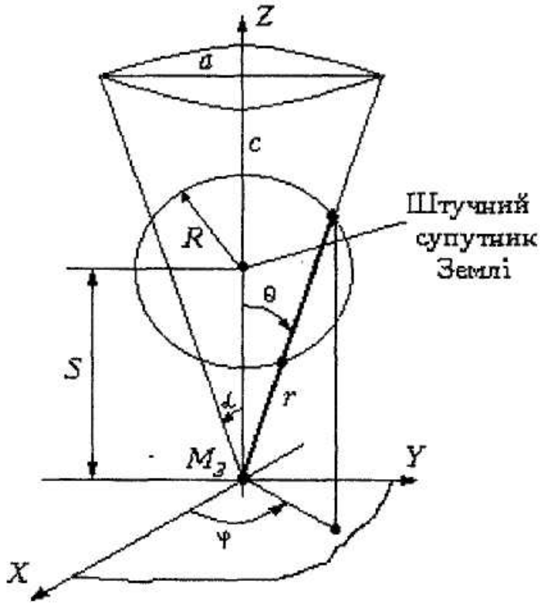

Рис. 3. Схема взаємного розташування простору маневрування капсули (конуса) та сфери розсіювання

Переходячи до сферичної системи координат з центром у точці *Mз* та віссю Z, яка проходить через точку знаходження штучного супутника Землі, рівняння конуса та сфери

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \tag{15}$$

$$x^2+y^2+(z-S)^2=R^2 \tag{16}$$

будуть записани у вигляді [3]:

$$\frac{r^2\cdot sin^2\theta}{a^2}-\frac{r^2\cdot cos^2\theta}{c^2}=0, \tag{17}$$

$$r^2-2Sr\cdot cos\theta+S^2=R^2, \tag{18}$$

де a – радіус основи конуса;

c – висота конуса;

S – відстань від початку координат (точки захвату супутника системою самонаведення) до супутника по осі Z;

R – радіус сфери ($R=3\sigma$).

Тоді вираз (7) буде мати вигляд:

$$P(V_r)=\int_{\varphi_{вх}}^{\varphi_{вих}}\int_{\theta_{вх}}^{\theta_{вих}}\int_{r_{вх}}^{r_{вих}} p(\Delta r(\tau^*),r,\theta,\varphi)drd\theta d\varphi. \tag{19}$$

Обчисливши межі інтегрування, отримаємо:

$$P(V_r)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_{r_1}^{r_2} p(\Delta r(\tau^*),r,\theta,\varphi)drd\theta d\varphi, \tag{20}$$

де

$$\alpha=arctg\frac{a}{c}; \tag{21}$$

$$r_1=S\cdot cos\theta-\sqrt{R^2-S^2\cdot sin^2\theta}; \tag{22}$$

$$r_2=S\cdot cos\theta+\sqrt{R^2-S^2\cdot sin^2\theta}. \tag{23}$$

В умовах, коли відстань захвату штучного супутника Землі системою самонаведення капсули S менша за потрійне значення помилок цілевказівок $3\sigma = R$:

$$r_1 = 0. \tag{24}$$

Визначення простору можливої стиковки та щільності ймовірності розподілу вектора промаху вантажної капсули дозволяє обчислити ймовірність доставки вантажу.

3. Алгоритм обчислення ймовірності

Для того, щоб обчислити інтеграл ймовірності виконується чисельне інтегрування з використанням квадратурних формул Гауса [5]. Точність обчислення $p(\Delta r(\tau^*))$ визначається точністю формул Гауса та числом підінтервалів інтегрування. Стосовно квадратурних формул, які розглядаються, похибка обчислень подається у вигляді [5]:

$$\delta P = \frac{(n!)^4 \cdot (b_i - a_i)^{2n-1}}{(2n-1)\cdot\left[(2n)!\right]^3} \cdot y_{max}^{(2n)}(x), \tag{25}$$

де $a < x < b$ та дорівнює одиницям відсотків.

Для застосування квадратурних формул необхідно перетворити вираз обчислення ймовірності аварійної доставки вантажу на штучний супутник Землі. Вираз (20) з урахуванням (13) буде мати вигляд:

$$P(V_r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \cdot \sigma_1\sigma_2\sigma_3} \cdot$$

$$exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2} + \frac{(z-a_3)^2}{\sigma_3^2}\right]\right\} dr d\theta d\varphi, \tag{26}$$

де $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – середньоквадратичні помилки за співвідносними осями системи координат,

a_1, a_2, a_3 – зміщення центра фігури помилок цілевказівок від початку координат за відповідними осями.

Для наочності розглянемо випадок, коли помилки цілевказівок виражаються сферою, а вісь Z системи координат проходить через точку предбачуваного знаходження супутника. Тоді

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_\Sigma = \sqrt{\sigma_{цв}^2 + \sigma_н^2}, \tag{27}$$

де $\sigma_{цв}$ – середньоквадратична помилка цілевказівок;

$\sigma_н$ – середньоквадратична помилка наведення капсули;

$$a_1 = a_2 = 0, \;\; a_3 = S. \tag{28}$$

Виходячи з вищевказаного, вираз (26) записується у вигляді:

$$P(V_r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \cdot \sigma_\Sigma^3} \cdot exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\Sigma^2}\left[x^2 + y^2 + (z-S)^2\right]\right\} dr d\theta d\varphi. \tag{29}$$

Використовуючи формули переходу до сферичної системи координат, отримуємо:

$$P(V_r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \cdot \sigma_\Sigma^3} \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_{r_1}^{r_2} \left(exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\Sigma^2}\left[r^2 - 2rS\cdot cos\,\theta + S^2\right]\right\} \cdot r^2 \cdot sin\,\theta\right) dr d\theta d\varphi. \tag{30}$$

Зводячи інтеграл до вигляду [5]:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \eta(\xi_r, \xi_\theta, \xi_\varphi) d\xi_r d\xi_\theta d\xi_\varphi, \tag{31}$$

після перетворень отримуємо:

$$P(V_r) = \frac{\alpha}{4\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_\Sigma^3} \cdot \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} R_1 R_3 R_4^2 \cdot exp\left\{R_6 R_7\right\} d\xi_r d\xi_\theta d\xi_\varphi, \tag{32}$$

де

$$R_1 = sin\,\frac{\alpha}{2}(\xi_\theta + 1); \tag{33}$$

$$R_2 = cos\,\frac{\alpha}{2}(\xi_\theta + 1); \tag{34}$$

$$R_3 = \sqrt{R^2 - S^2 R_1^2}; \tag{35}$$

$$R_4 = R_3 \xi_r + S R_2; \tag{36}$$

$$R_5 = (SR_2 + R_3)\cdot(\xi_r + 1); \tag{37}$$

$$R_6 = \frac{1}{2\sigma_\Sigma^2}; \tag{38}$$

$$R_7 = 2SR_2R_4 - R_4^2 - S^2. \tag{39}$$

Для випадку, який описується виразом (24):

$$P(V_r) = \frac{\alpha}{4\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_\Sigma^3}\cdot\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{R_1R_8R_5^2\cdot exp\left\{R_6R_9\right\}}{8}d\xi_r d\xi_\theta d\xi_\varphi, \tag{40}$$

де

$$R_8 = SR_2 + R_3; \tag{41}$$

$$R_9 = SR_2R_5 - \frac{1}{4}R_5^2 - S^2. \tag{42}$$

Таким чином, отримані вирази (32) і (40) для розрахунку ймовірності доставки вантажу на штучний супутник Землі.

Висновок

Розроблений метод дозволяє оцінити ймовірність аварійної доставки вантажу на штучний супутник Землі за балістичною траєкторією на заданому відрізку орбіти супутника.

Метод дає можливість оцінити вплив на ймовірність доставки вантажу на штучний супутник Землі різноманітних параметрів орбіти супутника, параметрів траєкторії виведення вантажної капсули, масово-енергетичних характеристик ракетоносія та капсули, точносних характеристик наземних засобів та систем наведення.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Абезгауз Г.Г., Тронь А.П., Копенкин Ю.Н.* Справочник по вероятностным расчётам. – М.: Воениздат, 1970. – 536 с.
2. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ. – М.: Наука, 1963. – 500 с.
3. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – М.: Наука, 1980. – 976 с.
4. *Зимин Г.В., Бурмистров С.К., Букин Б.М.* Справочник офицера противовоздушной обороны. – М.: Воениздат, 1987. – 512 с.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
6. *Решетнёв М.Ф., Лебедев А.А., Бартенев В.А.* Управление и навигация искусственных спутников Земли на околокруговых орбитах. – М.: Машиностроение, 1988.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения / Пер. с англ. – М.: Мир, 1967.

МАЛІЦА Анатолій Миколайович – кандидат технічних наук, начальник кафедри Житомирського військового інституту радіоелектроніки.

Наукові інтереси:
- теорія польоту штучних супутників Землі;
- математичне моделювання в наукових дослідженнях.

ПЕКАРЄВ Дмитро Володимирович – ад'юнкт Житомирського військового інституту радіоелектроніки.

Наукові інтереси:
- теорія польоту штучних супутників Землі;
- математичне моделювання в наукових дослідженнях.

П'ЯСКОВСЬКИЙ Дмитро Володимирович – кандидат технічних наук, начальник Житомирського військового інституту радіоелектроніки.

Наукові інтереси:
- теорія управління складними системами;
- теорія навігації.