І.Г. Ленчук

ІНВАРІАНТИ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРОЕКЦІЙ В АНАЛІТИКО-СИНТЕТИЧНОМУ ТЛУМАЧЕННІ

Обгрунтовуються методологічні засади вивчення властивостей паралельного проеціювання, які гарантують їх свідоме сприйняття і розуміння. Ідеалізуються роль і місце основної теореми метрики в конструктивних випробовуваннях.

Секретом Полішинеля для фахівця графічних дисциплін є факт, згідно з яким переважна більшість студентів-початківців не без зусиль опановують теорію курсу нарисної геометрії, надто повільно набираються досвіду в розв'язуванні позиційних та метричних задач. Першопричину цього слід шукати в недосконалості системи шкільної освіти, закостенілості програм і методик викладання стереометрії та креслення. В результаті випускники не мають добре розвинених просторових уявлень, не можуть вільно виконувати конструктивні операції над уявними просторовими об'єктами геометрії. Вузівські методики теж не завжди враховують конкретні знання вчорашніх школярів. Однак знання, здобуті інколи й формально, мають знайти неприховано виражене застосування, хоча б з метою викорінення цього формалізму. Особливо цінні посилання на відомі твердження при вивченні тих тем вищої геометрії, які мають загальногеометричне тлумачення, де споріднення і спадкоємність, внутрішні методологічні зв'язки дисциплін можна подати на користь справі найбільш зримо.

В основу побудови вказаного курсу покладено, як відомо, метод проеціювання, за допомогою якого досягається геометрично закономірне зображення просторового об'єкта на площині. Розпочинати процес навчання звичайно ж потрібно з введення поняття центральної проекції. Вже тут чітко розмежовують апарат, дію проеціювання і результат дії. Наголошується, що надто серйозне застосування має метод паралельних проекцій, який вирізняється простотою в побудовах і зручновимірністю (зворотністю) креслень.

Вивчення властивостей паралельних проекцій з детальними доведеннями сприяє їх глибокому розумінню і кращому запам'ятанню, осмисленню ролі і місця елементарної геометрії у теорії зображень.

Перші чотири властивості не потребують особливих зусиль для їх усвідомлення, сприймаються природно і у більшості випадків на практиці використовуються безпомилково, певною мірою, підсвідомо. Доведення прості, а тому вести їх можна *синтетично*, тобто йти від того, що дано (умови), до того, що потрібно довести (висновку). Тут *аналіз* висновку лише направляє хід дій.

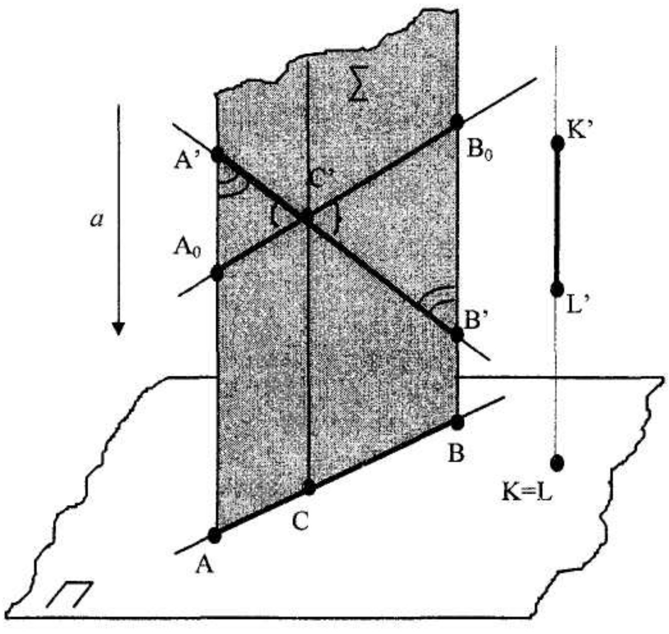

Рис. 1

1^0. Проекцією точки є точка.

2^0. Проекцією прямої в загальному випадку є пряма.

3^0. Якщо точка належить прямій, то проекція точки належить проекції прямої.

4^0. Проекції прямих, що перетинаються, в загальному випадку теж перетинаються.

Наведемо, наприклад, повну схему доведення третьої властивості (рис. 1).

Синтетичний метод зводиться до дій розгортання умови і виведення наслідків з понять, про які йдеться в умові.

Отож, точка С' належить прямій А'В'. Ця пряма, у свою чергу, належить проеціюючій площині Σ, яка цілком визначається парою прямих А'В' і А'А, що перетинаються. Проеціюючий промінь С'С паралельний напрямку проеціювання *а*, як і проеціюючий промінь А'А. Тому, за ознакою паралельних прямих (теорема 16.2) [1], С'С $\|$ А'А. Звідси маємо, що С'С також лежить у площині Σ (задача № 4, § 16), і оскільки напрям *а* не паралельний П , то С'С не паралельна АВ (ознака паралельності прямої і площини, теорема 16.3). Отже, С'С і АВ, що лежать в одній і тій же площині, перетинаються в точці С, яка є (за умовою) паралельною проекцією точки С'. Властивість доведена.

Наступним чотирьом властивостям варто приділити більше уваги, хоча й вони теж майже очевидні з точки зору розуміння, але при побудові зображень малодосвідченими виконавцями порушуються значно частіше. Про них іноді забувають, ними іноді нехтують, що в будь-якому випадку суперечить вимозі вірності таких побудов.

5^0. Проекції мимобіжних прямих або паралельні, або перетинаються.

Тут слушно звернутися до *аналітико-синтетичного* методу, який ще називають методом навперемінного руху з двох кінців. Справді, за цим методом розпочинають доведення з *аналізу* висновку, але міркування не доводять до кінця. Зупиняються на деякому кроці з тим, щоб продовжити його з іншого кінця, з розгортання умови, тобто застосовують *синтетичний* метод.

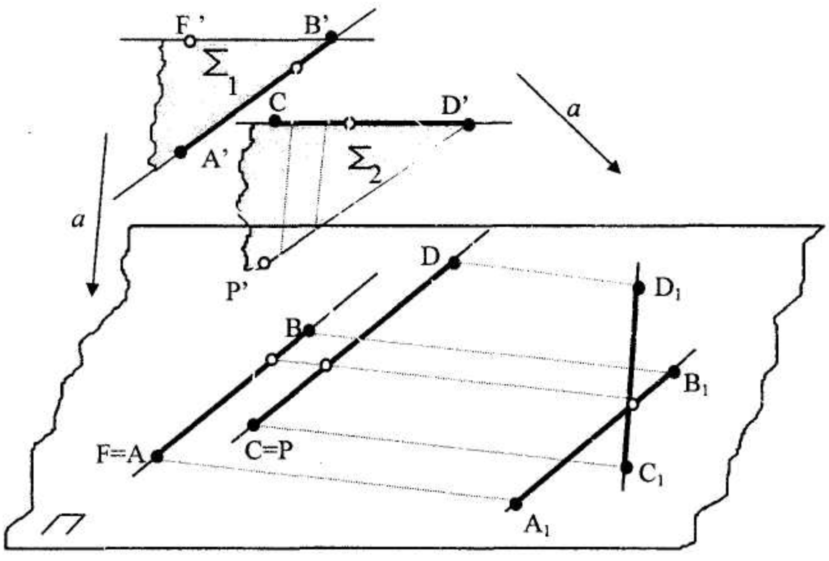

Рис. 2

Очевидно, що дві мимобіжні прямі А'В' і С'D' (рис. 2) будуть зображатися на площині проекції П паралельними прямими АВ і CD тільки тоді, коли їх проеціюючі площини Σ_1 і Σ_2 будуть паралельні, оскільки дві паралельні площини в перетині з третьою висікають паралельні прямі (перша властивість паралельних площин, § 16).

На цьому призупиняємо аналіз і приступаємо до розгортання умови. Через точку В' прямої А'В' проведемо пряму В'F', паралельну іншій заданій прямій С'D'. Двома прямими, що перетинаються, визначається площина Σ_1 = A'B'F' (аксіома С3). Через точку D' прямої С'D' проведемо пряму D'P', паралельну прямій А'В', чим визначимо ще одну площину Σ_2 = C' D' P'. Площини Σ_1 і Σ_2 паралельні згідно з ознакою паралельності двох площин (теорема 16.4). Якщо напрям проеціювання *а* задати паралельно цим двом площинам, то останні перетнуть площину проекцій П за паралельними прямими АВ і CD.

Для того, щоб дві мимобіжні прямі A'B' і C'D' проеціювалися на площину проекцій П у вигляді прямих A_1B_1 і C_1D_1 , що перетинаються, необхідно, щоб проеціюючі площини заданих прямих також перетиналися. Досить, щоб вони не були взаємно паралельними, тобто напрям проеціювання *a* не може лежати у площині, паралельній прямим A'B' і C'D'. Таких напрямів проеціювання може бути безліч.

Інші три властивості доводяться синтетичним методом (рис. 1, 3). Ми обмежимося лише формулюванням цих тверджень.

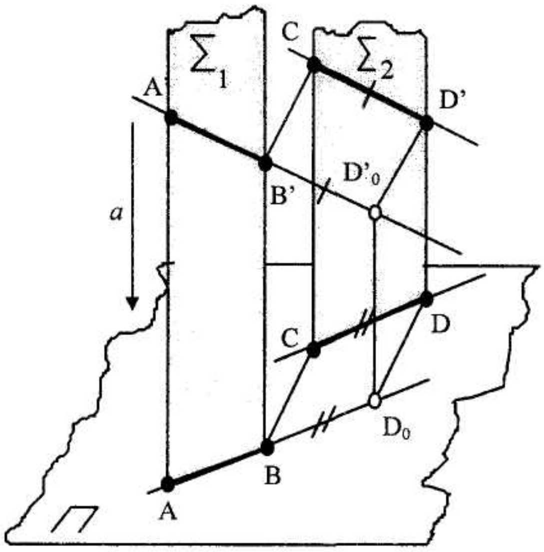

Рис. 3

6^0. Відношення відрізків прямої рівне відношенню їх проекцій.

7^0. Проекції паралельних прямих у загальному випадку паралельні.

8^0. Відношення відрізків паралельних прямих рівне відношенню проекцій цих відрізків.

Дві властивості, що завершують список, стосуються ортогонального проеціювання ($a \perp$ П) і займають винятково чільне місце у розв'язуванні питань метрики на комплексних кресленнях Г. Монжа. Вони досить цікаві також і з суто геометричної точки зору.

9^0. Ортогональна проекція відрізка прямої лінії загального розташування рівна відрізку, помноженому на косинус кута нахилу прямої до площини проекції.

Тут доведення доцільно вести *аналітико-синтетичним* методом (рис. 4).

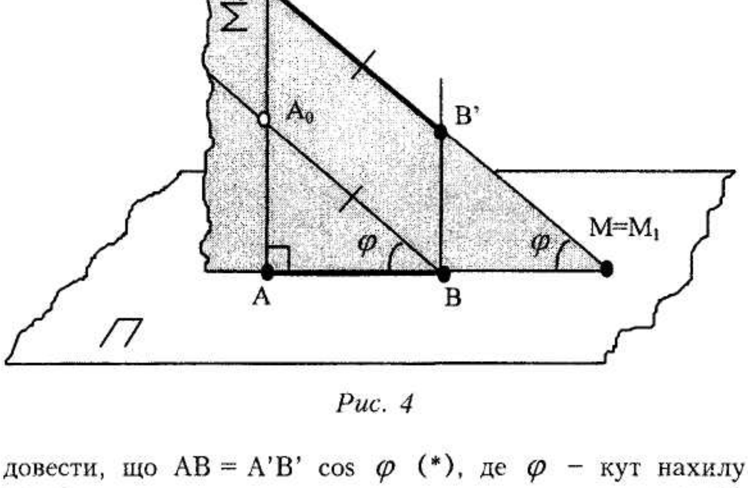

Рис. 4

Отже, потрібно довести, що AB = A'B' cos φ (*), де φ – кут нахилу прямої A'B' до площини проекцій П (означення кута між прямою і площиною, § 18). Очевидно, що обґрунтувати істинність рівності (*) можна відшуканням (побудовою) прямокутного трикутника з катетом АВ, гіпотенузою А'В' і прилеглим гострим кутом φ (означення косинуса кута, §7). Чи існує такий трикутник в ортогональній проекції даного відрізка?

Щоб відповісти на запитання, розгорнемо умову. Проеціююча площина Σ прямої А'В' перпендикулярна до площини проекцій П, оскільки $A'A \parallel B'B \perp П$ (ознака перпендикулярності площин, теорема 17.6), і цілком визначається парою прямих А'В' та В'В, що перетинаються. Проведемо через точку В пряму, паралельну А'В'. Вона теж належить площині Σ (задача № 4, § 16) і перетинає А'А у деякій точці A_0. Трикутник A_0AB прямокутний ($\angle A_0AB = 90^\circ$ згідно з означенням перпендикулярності прямої і площини, § 17). У ньому $\angle A_0BA = \angle A'MA = \varphi$, як відповідні кути при паралельних прямих А'В' і A_0B. (теореми 4.3 і 2.2). Крім цього, чотирикутник $A'B'BA_0$ – паралелограм (за означенням, § 6), оскільки $A'B' \parallel A_0B$ (за побудовою) і $A'A \parallel B'B$ (за умовою). Тому $A'B' = A_0B$ (теорема 6.3). Отже, $AB = A_0B \cos\varphi = A'B' \cos\varphi$. Властивість доведена.

10^0. *Теорема про проеціювання прямого кута*: прямий кут проеціюється ортогонально у вигляді прямого кута тоді і тільки тоді, коли хоча б одна з його сторін паралельна площині проекцій, а інша не перпендикулярна до неї.

На відміну від багатьох книг з нарисної геометрії (див., напр., [3]) доведення проведемо *не синтетичним*, а *аналітичним* методом.

Старогрецький математик Папп так характеризує *аналітичний* метод доведення [2]: «В аналізі шукане вже уявляється знайденим і дивимося, звідкіля його можна було б одержати, і далі, що передувало б цьому останньому, поки не дійдемо до чого-небудь відомого – того, що могло б послужити вихідним пунктом. Цей шлях ми назвемо аналізом, або, що однаково, зворотним розв'язуванням».

Аналіз висновку полегшує відшукання оптимального алгоритму доведення, а у процесі доведення, *аналізуючи*, пов'язуючи умову з висновком, виконавець не зіб'ється з вірного ходу міркувань. Аналітичний метод передбачає лише належне володіння фактичним матеріалом евклідової геометрії, характеризується чіткістю, обгрунтованістю і логічною завершеністю; сприяє розвитку алгоритмічного мислення. В ході його реалізації не потрібно перенапружувати мозок запам'ятовуванням шляху доведення теореми.

Необхідність. Дано: $\angle ABC = 90^\circ$; $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$; $a \perp П$.

Довести: якщо АВ не паралельна П і АВ не перпендикулярна П, то $BC \parallel П$.

Якби одна із сторін прямого кута (наприклад, АВ) була перпендикулярна площині проекцій П, то, згідно з ознакою перпендикулярності двох площин (теорема 17.6), його сторони АВ і ВС у перетині визначали б проеціюючу площину, і кут АВС вироджувався б на П у пряму лінію, що у наших дослідженнях не варто уваги. Тому АВ в умові відмінна від проеціюючої прямої.

Для визначеності припускаємо також, що АВ не паралельна площині проекцій П, адже у противному варіанті задання АВ, теорема вже була б доведена. Таким чином, ми виключаємо з розгляду частинні і тривіальні випадки і доводимо, за вказаних умов, що $BC \parallel П$ (рис. 5).

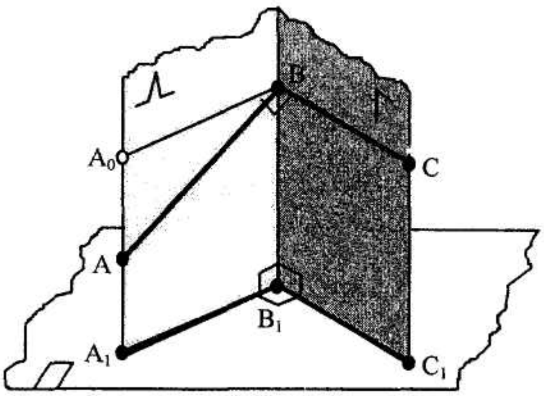

Рис. 5

Згадаємо на початку ознаку паралельності прямої і площини (теорема 16.3): *якщо пряма, що не належить площині, паралельна будь-якій прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині.* До ладу залучений відомий факт конкретизує висновок і зводить доведення до відшукання у площині П прямої, якій BC була б паралельна. Оскільки BC і B_1C_1 , яка є проекцією BC на площину П, лежать в одній і тій самій проеціюючій площині Г, то слушно за шукану взяти саме пряму B_1C_1. Твердження, що $BC \parallel B_1C_1$, передує у доведенні твердженню, що $BC \parallel П$: $BC \parallel B_1C_1 \rightarrow BC \parallel П$.

Друга властивість перпендикулярності прямої і площини (теорема 17.4) стверджує: *дві прямі, перпендикулярні одній і тій же площині, паралельні.* Звідси випливає, що BC буде паралельна B_1C_1 , якщо вони обидві будуть перпендикулярні до однієї і тієї ж площини. Уважне осмислення рисунка і урахування даних умови ($\angle ABC = 90°$; $\angle A_1B_1C_1 = 90°$; $a \perp П$) спонукають до гіпотетичного припущення, що BC і B_1C_1 перпендикулярні проеціюючій площині Λ , якій належать прямі AB і A_1B_1 : $B_1C_1 \perp \Lambda$, $BC \perp \Lambda$. Доведення останніх двох тверджень передує твердженню, що $BC \parallel B_1C_1$: $(B_1C_1 \perp \Lambda,\ BC \perp \Lambda) \rightarrow BC \parallel B_1C_1$.

Звичайно, на цьому етапі міркувань доцільно згадати й інші ознаки паралельності двох прямих і, аналізуючи, переконатися, що вище запропонована ознака найбільш доречна у даній конкретній ситуації.

Напевне, що визначитися з наступною ланкою в ланцюгу логічних переходів слід через ознаку перпендикулярності прямої і площини (теорема 17.2): *якщо пряма перпендикулярна двом прямим, що перетинаються і лежать в даній площині, то вона перпендикулярна цій площині.* Те, що $B_1C_1 \perp \Lambda$, слідує безпосередньо з умови. Справді, $\angle A_1B_1C_1 = 90°$, тому $B_1C_1 \perp A_1B_1$, а A_1B_1 належить Λ . Крім цього, BB_1 – проеціюючий промінь площини Λ (як і площини Г, до речі), розташований перпендикулярно до площини проекції П ($a \perp П$). Але ж відомо, що пряма, перпендикулярна даній площині, перпендикулярна усякій прямій, що лежить у цій площині (означення, § 17), а B_1C_1 якраз лежить у площині П. Тому $BB_1 \perp B_1C_1$ і, за властивістю симетрії відношення «перпендикулярні прямі», маємо $B_1C_1 \perp BB_1$. Таким чином, $(B_1C_1 \perp A_1B_1;\ B_1C_1 \perp BB_1) \rightarrow B_1C_1 \perp \Lambda$ – доведений факт і, отже, залишається довести, що $BC \perp П$.

Умовою теореми також задано, що $\angle ABC = 90°$. Звідси слідує, що $BC \perp AB$, а AB, як відомо, належить площині Λ . Як взаємно розташовані, прямі BC і BB_1 вихідними даними не обумовлено. Тому додатковою побудовою у площині Λ треба знайти ще одну пряму, таку, яка містила б точку B і якій була б перпендикулярна BC. За припущенням AB не паралельна П, тому вона не паралельна і прямій A_1B_1, що є спільною для проеціюючої площини Λ та площини проекцій П. Відомо, що через точку B у площині Λ можливо провести єдину пряму, паралельну A_1B_1 (аксіома паралельних IX і задача № 8, § 4). Нехай такою прямою на рисунку буде пряма A_0B. Твердження, що $BC \perp AB$ і $BC \perp A_0B$ передують твердженню, що $BC \perp \Lambda$: ($BC \perp AB$, за умовою; $BC \perp A_0B$) $\rightarrow BC \perp \Lambda$.

Доведемо тепер, що $A_0B \perp BC$ і, скориставшись вже згаданою раніше властивістю симетрії, одержимо $A_0B \perp BC \rightarrow BC \perp A_0B$. Останнє твердження буде істинне за умови, що пряма A_0B виявиться перпендикулярною до іншої проеціюючої площини Г, якій належить пряма BC: $A_0B \perp Г \rightarrow A_0B \perp BC$. Як легко помітити, обгрунтування останніх кроків доведення аналогічні наведеним вище, тому запис цих операцій подаємо більш компактно. Отож, A_0B паралельна A_1B_1 за побудовою, а тому: $A_1B_1 \perp Г \rightarrow A_0B \perp Г$, а $A_1B_1 \perp Г$ за умовою теореми: $(A_1B_1 \perp B_1C_1;\ A_1B_1 \perp BB_1) \rightarrow A_1B_1 \perp Г$.

Тепер нам залишається лише уважно простежити деталізований до дрібниць алгоритм доведення теореми у зворотному напрямку. З умови маємо, що $A_1B_1 \perp Г$, отже $A_0B \perp Г$, тобто A_0B перпендикулярна усякій прямій цієї площини, зокрема, прямій BC. Таким чином, BC перпендикулярна прямим AB і A_0B, що лежать у площині Λ . Як наслідок, $BC \perp \Lambda$. Але ж B_1C_1 (за умовою) теж перпендикулярна Λ , тому $BC \parallel B_1C_1$ і $BC \parallel П$. Необхідна умова теореми доведена.

Алгоритмічна схема

$$BC \parallel \Pi \leftrightarrow BC \parallel B_1C_1 \leftrightarrow \begin{cases} B_1C_1 \perp \Lambda \leftrightarrow \begin{cases} B_1C_1 \perp A_1B_1\ , \\ B_1C_1 \perp BB_1\ (\text{за умовою}). \end{cases} \\ BC \perp \Lambda \leftrightarrow \begin{cases} BC \perp AB\ (\text{за умовою}), \\ BC \perp A_0B \leftrightarrow A_0B \perp BC \leftrightarrow A_0B \perp \Gamma \leftrightarrow A_1B_1 \perp \Gamma \leftrightarrow \begin{cases} A_1B_1 \perp B_1C_1\ , \\ A_1B_1 \perp BB_1\ (\text{за умовою}). \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Стрілка «вправо» означає пошук твердження, що передує твердженню «зліва»; стрілка «вліво» означає зворотний шлях доведення.

Достатність: Дано: $\angle ABC = 90°$; $BC \parallel \Pi$; $a \perp \Pi$.

Довести: якщо AB не паралельна П, то $\angle A_1B_1C_1 = 90°$.

Якби AB розташовувалася паралельно площині П, то теорема вже була б доведена. Адже будь-яка плоска фігура, зокрема, прямий кут ABC, що належав би площині рівня, проеціювався б у цій ситуації на площину проекцій П у натуральну величину (без спотворення). Тому AB в умові не паралельна П.

Провести доведення достатньої умови з усіма подробицями пропонуємо читачеві самостійно. Ми ж зупинимося на ньому лише схематично.

Отже, потрібно довести, що $\angle A_1B_1C_1 = 90°$, або що $B_1C_1 \perp A_1B_1$, або що $B_1C_1 \perp \Lambda$, оскільки A_1B_1 належить Λ, або що $BC \perp \Lambda$, оскільки $B_1C_1 \parallel BC$, або що $BC \perp AB$ (це твердження істинне, адже за умовою $\angle ABC = 90°$) і $BC \perp BB_1$, оскільки AB і BB_1 – дві прямі площини Λ, що перетинаються у точці B. Останнє твердження виконується тому, що $BC \parallel B_1C_1$ (за умовою), а $B_1C_1 \perp BB_1$ ($a \perp \Pi$). Далі розпочинає діяти наслідок з властивості кутів, утворених січною при перетині паралельних прямих (теорема 4.3). Простежування кроків наведеного алгоритму у зворотному напрямку доводить достатню умову.

Алгоритмічна схема

$$\angle A_1B_1C_1 = 90^0 \leftrightarrow B_1C_1 \perp A_1B_1 \leftrightarrow B_1C_1 \perp \Lambda \leftrightarrow BC \perp \Lambda \leftrightarrow \begin{cases} BC \perp AB \textit{ (за умовою)}, \\ BC \perp BB_1 \leftrightarrow B_1C_1 \perp BB_1 \leftrightarrow \begin{cases} BB_1 \perp \Pi, \\ B_1C_1 \in \Pi \textit{ (за умовою)}. \end{cases} \end{cases}$$

Цікавою і важливою у пізнавальному плані потрібно вважати ситуацію, що тепер склалася у стереометрії між теоремою про проеціювання прямого кута і відомою та широко вживаною теоремою про три перпендикуляри. У певній мірі другу з них слід вважати наслідком першої. Справді, уявимо собі рисунок 5 таким, на якому сторона AB прямого кута розташована «вище» прямої A_0B в проеціюючій площині Λ, що, хоч би там як, не впливає на зміст теореми. Виконаємо паралельне перенесення кута ABC на вектор BB_1. Тоді пряма BC (рис. 6) у площині проекцій П виконуватиме роль прямої с (порівняйте з рис. 353, теорема 17.5). Далі, у кожній з теорем будемо, перш за все, зважати на апарат ортогонального проеціювання і, окрім цього, чітко розрізняти три суто геометричні факти їх умов і висновків: $\angle ABC = 90°$; $\angle A_1B_1C_1 = 90°$; $BC \parallel \Pi$. Необхідність і достатність базової теореми мають спільним в умові $\angle ABC = 90°$. Якщо ж ще й $\angle A_1B_1C_1 = 90°$, то доводиться, що $BC \parallel \Pi$, і навпаки, якщо ж покласти $BC \parallel \Pi$, то доводиться, що $\angle A_1B_1C_1 = 90°$. Пряме і обернене твердження наслідка включають до умови спільним те, що $BC \parallel \Pi$ (адже BC = c належить П). Якщо ж, крім цього, $\angle A_1B_1C_1 = 90°$, то доводиться, що $\angle ABC = 90°$, і навпаки. Отже, достатність і обернена теорема – суть одне і те ж саме твердження за умови, що BC лежить у площині проекцій П. Необхідність і пряме твердження у своєму формулюванні дещо відрізняються вихідними даними і, отже, висновком. Однак доведення прямої теореми про три перпендикуляри є частинним випадком доведення необхідної умови теореми про проеціювання прямого кута.

Таким чином, доведення в курсі стереометрії теореми про проеціювання прямого кута виключає доведення теореми про три перпендикуляри у тому вигляді, як це зроблено у шкільному підручнику. Останню вважаємо наслідком першої і доводимо, як наслідок.

В курсі нарисної геометрії цінність теореми про проеціювання прямого кута зростає багаторазово, оскільки вона є *основною теоремою метрики* цього специфічного підрозділу конструктивної геометрії.

На практиці, з метою побудови на епюрі Г.Монжа прямих і площин, перпендикулярних до заданих прямих і площин, неминуче користуються іншою теоремою, що також є наслідком попередньої, яка тепер вже кваліфікується як основна теорема метрики: ***для того, щоб у просторі пряма і площина загального розташування були перпендикулярні, необхідно і досить, щоб на комплексному кресленні горизонтальна проекція прямої була перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі площини, а фронтальна проекція прямої – до фронтальної проекції фронталі цієї площини*** (рис. 7).

Обгрунтовується це твердження просто, переконливо і логічно виважено, якщо скористатися ознакою перпендикулярності прямої і площини (теорема 17.2) та, звичайно ж, доведеною основною теоремою метрики. Справді, згідно з ознакою, пряма n перпендикулярна площині Σ, якщо вона перпендикулярна двом прямим цієї площини, що перетинаються. За такі прямі у площині Σ зручно взяти її будь-яку горизонталь h і фронталь f. До речі, не секрет, що усяку площину загального розташування можна вщерть заповнити горизонталями і (або ж) фронталями. Оскільки h паралельна горизонтальній площині проекцій Π_1, а f паралельна фронтальній площині проекцій Π_2, то посилаючись на основну теорему, матимемо: $h_1 \perp n_1$, $f_2 \perp n_2$. Твердження доведено.

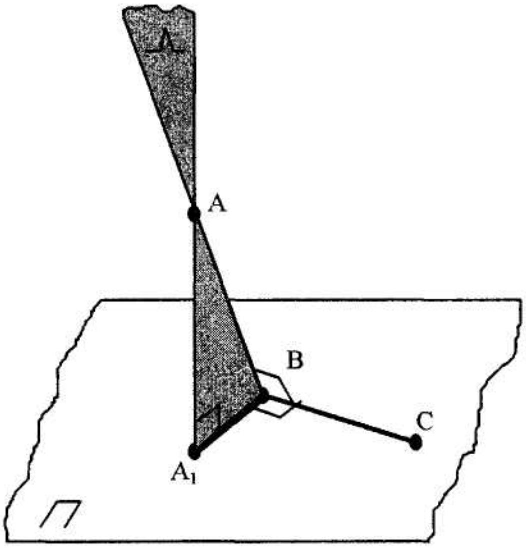

Рис. 6

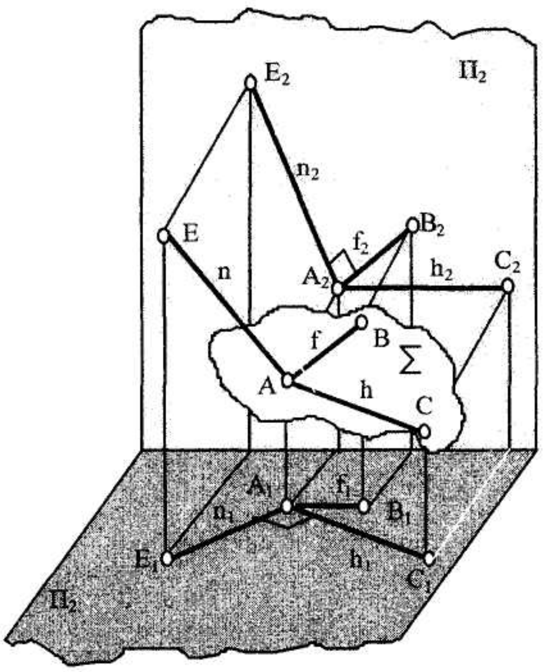

Рис. 7

Якщо площина Σ задається слідами на Π_1 і Π_2, що при розв'язуванні метричних задач трапляється досить часто, то формулювання останньої теореми буде дещо іншим: ***для того, щоб у просторі пряма і площина загального розташування були перпендикулярні, необхідно і досить, щоб на комплексному кресленні проекції даної прямої були перпендикулярні одноіменним слідам даної площини*** $(n \perp \Sigma \Leftrightarrow (n_1 \perp h_1;\ n_2 \perp f_2))$.

Переконливим фактором на користь обов'язкових строгих доведень властивостей паралельних проекцій аналітико-синтетичними методами слід вважати здійснення виконавцем у цьому процесі уявних операцій з геометричними фігурами винятково у тривимірному просторі. Адже не секрет, що усяка більш-менш серйозна метрична задача передбачає створення на самому початку правила-орієнтира її розв'язання у загальногеометричній формі, тобто тут просторове тлумачення пошуку розв'язку задачі просто необхідне. І лише після цього знайдена конструктивна схема реалізується певним чином на тому чи іншому проекційному кресленні.

Варто також мати на увазі, що виконуючи доведення не досить робити посилання на безперечні геометричні факти, вказавши лише назву аксіоми чи номер теореми. Важливо, користуючись методами аналізу і синтезу, побудувати логічно обгрунтований алгоритм дій. І кожний крок в його реалізації має сприйматися без сумнівів, як єдино вірно вибрана ланка в ланцюжку міркувань. У слухачів має скластися враження, що у доведенні теореми нічого нового, крім самого факту, немає – результат випливає з добре відомих і певним чином розташованих геометричних тверджень. Викладення матеріалу в такій постановці викликатиме жваву зацікавленість до конкретного питання і, в цілому, до геометрії як науки, де просторові уявлення і логічне мислення неподільні.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Погорелов А.В.* Геометрия / Учебник для 7–11 классов средней школы. – М.: Просвещение, 1990. – 384 с.
2. *Слепкинь З.И.* Психолого-педагогические основы обучения математике. – К.: Радянська школа, 1983. – 192 с.
3. *Четверухин Н.Ф., Левицкий Ф.С. и др.* Начертательная геометрия. – М.: Высшая школа, 1963. – 458 с.

ЛЕНЧУК Іван Григорович – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри математики Житомирського державного педагогічного інституту ім. І.Я. Франка.

Наукові інтереси:

- прикладна геометрія;
- конструктивна геометрія.