Л.І. Палієнко

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛІ МІГРАЦІЇ ХІМІЧНИХ РЕЧОВИН У НАСИЧЕНИХ НЕОДНОРІДНИХ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

(Представлено доктором технічних наук, професором Грабаром І.Г.)

Розглядається задача управління об'єктами, що описуються псевдогіперболічними диференціальними рівняннями з розподіленими параметрами. Доведено, що задача розв'язується і має один розв'язок, який належить позитивному гільбертовому просторові. Запропоновано метод побудови наближеного розв'язку типу методу Галеркіна.

У роботі вивчається початково-крайова задача у циліндричній області $Q = \{\Omega x(0 \le t \le T)\}$, $\Omega \subset R^n$ (Ω – область з регулярною границею $\partial\Omega$) для узагальненого рівняння, яке моделює міграції хімічних речовин у насичених неоднорідних пористих середовищах:

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + M\frac{\partial u}{\partial t} + A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + B(u) + C(u) + Nu = f, \tag{1}$$

де $A(\cdot) = -\sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$; $B(\cdot) = -\sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}B_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$; $C(\cdot) = \sum\limits_{i=1}^{n}C_i\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Нехай стан системи задовольняє умовам:

$$u\big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0; \quad u\big|_{x\in\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Припустимо, що $A_{ij}(x) = A_{ji}$, $B_{ij}(x) = B_{ji}$, $\{A_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $\{B_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ – неперервно диференційовані, а $\{C_i\}_{i=1}^{n}$, $M = M(x)$ та $N = N(x)$ – неперервні у замкнутій області $\overline{\Omega}$ функції,

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\xi_i\xi_j \ge \lambda_A\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \quad \sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}\xi_i\xi_j \ge 0, \quad \forall\xi_i \in R^1, \quad i=\overline{1,n}; \quad \lambda_A = const > 0;$$

$$M(x) \ge 0; \quad N(x) \ge \lambda_N; \quad N(x) \ge 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial C_i(x)}{\partial x_i}, \quad |C_i(x)| \le \lambda_C, \quad i=\overline{1,n};$$

$$\lambda_N = const > 0, \quad \lambda_C = const \ge 0.$$

Введемо наступні позначення: $L_2(Q)$ – простір вимірних інтегрованих з квадратом на множині Q функцій, $W_{гр}$ – поповнення простору гладких функцій, що задовольняють умовам (2), за нормою:

$$\|u\|_{W_{гр}}^2 = \int\limits_Q (u_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n}u_{tx_i}A_{ij}u_{tx_j})dQ, \tag{3}$$

де $W_{гр^+}$ – той самий простір, але функції задовольняють умовам спряженої задачі:

$$v\big|_{t=T} = \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=T} = 0; \quad v\big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

де $H_{гр}, H_{гр^+}$ – аналогічні простори, отримані поповненням гладких функцій за нормою:

$$\|u\|_{H_{гр}}^{+} = \int\limits_Q (u^2 + \sum_{i,j=1}^{n}u_{x_i}A_{ij}u_{x_j})dQ,$$

де $W_{гр}^-, W_{гр^+}^-, H_{гр}^-, H_{гр^+}^-$ – відповідні негативні простори [5].

Мають місце вкладення

$$W^+ \subset H^+ \subset L_2(Q) \subset H^- \subset W^-,$$

причому оператори вкладення цілком неперервні [3].

Під розв'язком задачі (1), (2) будемо розуміти узагальнений розв'язок у наступному сенсі.

Означення 1. Сильним узагальненим розв'язком задачі (1), (2) називається функція $u(t,x) \in W_{гр}$ така, що існує послідовність гладких функцій, що задовольняють умовам (2), та

$$\left\|u_i - u\right\|_{W_{гр}} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,\ \left\|Lu_i - f\right\|_{W^-_{гр^*}} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

Означення 2. Узагальненим розв'язком задачі (1), (2) називається функція $u(t,x) \in H_{гр}$ така, що існує послідовність гладких функцій, що задовольняють умовам (2), та

$$\left\|u_i - u\right\|_{H_{гр}} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0,\ \left\|Lu_i - f\right\|_{W^-_{гр^*}} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

Аналогічно визначаються узагальнені розв'язки для спряженої задачі.

Лема 1. Для функцій $u(t,x) \in W_{гр}, v(t,x) \in W_{гр^*}$ справедливі апріорні нерівності у негативних нормах [5]:

$$C_1\|u\|_{H_{гр}} \le \|Lu\|_{W^-_{гр^*}} \le C_2\|u\|_{W_{гр}}, \tag{5}$$

$$C_1\|v\|_{H_{гр^*}} \le \left\|L^*v\right\|_{W^-_{гр}} \le C_2\|v\|_{W_{гр^*}},$$

де C_1, C_2 – деякі сталі, L^* – оператор спряженої задачі.

Праві нерівності у (5) можна легко отримати за допомогою операції інтегрування за частинами, нерівності Гельдера та врахування граничних умов (2), (3) [5]. Доведемо ліву нерівність першого співвідношення у (5) для гладких функцій $u(t,x) \in W_{гр}$. Введемо допоміжну функцію $v(t, x)$ наступним чином:

$$v(t,x) = \int_t^T \frac{u(\tau,x)}{p(\tau)}d\tau,$$

де $p(t) = \dfrac{e^{\frac{n\lambda_C^2}{2\lambda_A\lambda_N}t}}{\sin\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{T-t}{T}}}$.

Покажемо справедливість нерівності

$$(Lu, v)_{L_2(Q)} \ge C\|v\|^2_{W_{гр^*}}, \tag{6}$$

де C – деяка додатна константа.

Розглянемо

$$\left(Lu, v\right)_{L_2(Q)} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6.$$

Використовуючи операцію диференціювання за частинами, зв'язок між $u(t, x)$ та $v(t,x)$, виконання граничних умов, отримаємо:

$$I_1 = (v, u_{tt})_{L_2(Q)} = \int_Q (vu_t)_t dQ - \int_Q v_t u_t dQ = \int_Q pv_t v_{tt} dQ + \int_Q p_t v_t^2 dQ =$$

$$= \frac{1}{2}\int_Q p_t v_t^2 dQ.$$

Враховуючи, що $M(x) \ge 0$, отримаємо:

$$I_2 = \left(v, Mu_t\right)_{L_2(Q)} = \int_Q pMv_t^2 dQ \ge 0.$$

Через симетричність та невід'ємність матриці $\left\{B_{ij}\right\}^n_{i,j=1}$ справедливі співвідношення:

$$I_3 = (v, Bu)_{L_2(Q)} = \frac{1}{2}\int_\Omega p(0)\sum_{i,j=1}^n v_{x_i}(0)B_{ij}v_{x_j}(0)d\Omega + \frac{1}{2}\int_Q p_t\sum_{i,j=1}^n v_{x_i}B_{ij}v_{x_j}dQ \ge 0;$$

$$I_4 = (v, A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right))_{L_2(Q)} = \int_Q p\sum_{i,j=1}^n v_{tx_i}A_{ij}v_{tx_j}dQ;$$

$$I_5 = \left(v, C(u)\right)_{L_2(Q)} \ge -\lambda_C\int_Q p\sum_{i=1}^n |v|\cdot\left|v_{tx_i}\right|dQ;$$

$$I_6 = \left(v, Nu\right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{2}\int_\Omega p(0)Nv^2(0)d\Omega + \frac{1}{2}\int_Q p_t Nv^2 dQ \ge \frac{\lambda_C^2}{8\lambda_A}\int_Q p\sum_{i=1}^n v^2 dQ.$$

Таким чином,

$$\left(v, Lu\right)_{L_2(Q)} \geq C\int_Q (v_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} v_{tx_i} A_{ij} v_{tx_j})dQ +$$

$$+\frac{1}{2}\int_Q p\sum_{i=1}^{n}(\frac{\lambda_C^2}{4\lambda_A}v^2 - \lambda_C|v|\cdot\left|v_{tx_i}\right| + \lambda_A v_{tx_i}^2)dQ =$$

$$= C\|v\|^2_{W_{\varepsilon p^+}} + \frac{1}{2}\int_Q p\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_C}{2\sqrt{\lambda_A}}|v| - \sqrt{\lambda_A}\left|v_{tx_i}\right|\right)^2 dQ \geq C\|v\|^2_{W_{\varepsilon p^+}}.$$

З наведених співвідношень випливає справедливість (6). Застосуємо до нього нерівність Шварца:

$$C\|v\|^2_{W_{\varepsilon p^+}} \leq \left(v, Lu\right)_{L_2(Q)} \leq \|v\|_{W_{\varepsilon p^+}}\|Lu\|_{W^-_{\text{гр}^+}}.$$

Скорочуючи на $\|v\|_{W_{\varepsilon p^+}}$ та враховуючи зв'язок між $u(t, x)$ та $v(t, x)$, встановлюємо справедливість нерівності, що доводиться для гладких функцій $u(t, x)$:

$$\|Lu\|_{W^-_{\varepsilon p^+}} \geq C\|v\|_{W_{\varepsilon p^+}} \geq C_1\|u\|_{H_{\varepsilon p}},$$

де C_1 – деяка додатна константа.

Справедливість лівої нерівності в (5) для всіх $u(t,x) \in W_{\varepsilon p}$ доводиться застосуванням граничного переходу. Справедливість лівої нерівності другого співвідношення в (5) доводиться аналогічно. Інтегральний оператор у цьому випадку має вигляд:

$$u(t,x) = \int_0^t \frac{v(\tau,x)}{p^*(\tau)}d\tau,$$

де $p^*(t) = \dfrac{e^{-\frac{n\lambda_C^2}{2\lambda_A\lambda_N}t}}{\sin\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{t}{T}}}$.

Внаслідок теореми Хана–Банаха про поширення лінійних неперервних функціоналів та теореми про представлення лінійних неперервних функціоналів над негативними гільбертовими просторами [5] має місце наступна теорема.

Теорема 1. Нехай для операторів L та L^* справедливі нерівності (5). Тоді, якщо права частина $f(t, x)$ рівняння (1) належить простору $H^-_{\varepsilon p^+}$, то існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1), (2) у сенсі означення 1, а якщо $f(t,x) \in W^-_{\text{гр}^+}$, то цей розв'язок розуміється у сенсі означення 2.

Аналогічні твердження мають місце для спряженої задачі.

Лема 2. Для функцій $u(t, x) \in W_{\varepsilon p}$ справедлива енергетична нерівність:

$$\left(\varphi u_t, Lu\right)_{L_2(Q)} \geq C_3\|u\|^2_{W_{\varepsilon p}},$$

де $\varphi(t) = e^{-\frac{n\lambda_C^2}{2\lambda_A\lambda_N}t}$.

Доведення. Розглянемо лему для гладких функцій $u(t, x) \in W_{\varepsilon p}(Q)$.

Розглянемо функціонал

$$\left(\varphi u_t, Lu\right)_{L_2(Q)} = \left(\varphi u_t, u_{tt} + Mu_t + A(u_t) + B(u) + C(u) + Nu\right)_{L_2(Q)}.$$

Дослідимо окремо доданки, що стоять в правій частині рівності:

$$\left(\varphi u_t, Mu_t\right)_{L_2(Q)} \geq 0.$$

Диференціюючи за частинами, отримуємо:

$$\left(\varphi u_t, u_{tt}\right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi(T)u_t^2(T)d\Omega - \frac{1}{2}\int_Q \varphi_t u_t^2 dQ \geq -\frac{1}{2}\int_Q \varphi_t u_t^2 dQ;$$

$$\left(\varphi u_t, B(u)\right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi(T)\sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i}(T)B_{ij}u_{x_j}(T)d\Omega - \frac{1}{2}\int_Q \varphi_t \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i}B_{ij}u_{x_j}dQ \geq 0;$$

$$\left(\varphi u_t, C(u)\right)_{L_2(Q)} = \int\limits_Q \varphi \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} C_i u_t dQ \geq -\lambda_C \int\limits_Q \varphi \sum_{i=1}^{n} \left|u_{tx_i}\right| \cdot |u| dQ +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_Q \varphi_t \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial C_i}{\partial x_i} u^2 dQ;$$

$$\left(\varphi u_t, A(u_t)\right)_{L_2(Q)} = \int\limits_Q \varphi \sum_{i,j=1}^{n} u_{tx_i} A_{ij} u_{tx_j} dQ;$$

$$\left(\varphi u_t, Nu\right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \varphi(T) N u^2(T) d\Omega - \frac{1}{2}\int\limits_Q \varphi_t N u^2 dQ .$$

Таким чином,

$$\left(\varphi u_t, Lu\right)_{L_2(Q)} \geq \frac{1}{2}\int\limits_Q \varphi \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda_C^2}{4\lambda_A} u^2 - \lambda_C |u| \cdot \left|u_{tx_i}\right| + \lambda_A u_{tx_i}^2\right) dQ +$$

$$+ C_3 \|u\|_{W_{\varepsilon p}}^2 = \frac{1}{2}\int\limits_Q \varphi \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda_C}{2\sqrt{\lambda_A}} |u| - \sqrt{\lambda_A} \left|u_{tx_i}\right|\right)^2 dQ + C_3 \|u\|_{W_{\varepsilon p}}^2 \geq C_3 \|u\|_{W_{\varepsilon p}}^2 .$$

Застосовуючи граничний перехід, отримаємо справедливість леми для усіх $u(t,x) \in W_{\varepsilon p}$.

Побудуємо аналог методу Галеркіна для розв'язку задачі (1), (2) [6]. Будемо шукати наближений розв'язок u_n у вигляді скінченної суми:

$$u_p(t,x) = \sum_{i=1}^{p} g_i(t)\omega_i(x), \tag{7}$$

де $\omega_i(x)$ – гладкі функції, що задовольняють умовам (2), такі, що система $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ повна в $W_{\varepsilon p}(\Omega)$;

$g_i(t)$ – розв'язок задачі Коши для звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{p} g_{ktt}\left(\omega_k, \omega_i\right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{p} g_{kt}\left(M\omega_k, \omega_i\right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{p} g_{kt}\left(A\left(\omega_k\right), \omega_i\right)_{L_2(\Omega)} + \\
\sum_{k=1}^{p} g_{k}\left(B\left(\omega_k\right), \omega_i\right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{p} g_{k}\left(C\left(\omega_k\right), \omega_i\right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{p} g_{k}\left(N\omega_k, \omega_i\right)_{L_2(\Omega)} = \\
= \left(f, \omega_i\right)_{L_2(\Omega)}; \\
g_k(0) = g_{kt}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p; \quad i = 1, 2, \ldots, p.
\end{gathered} \tag{8}$$

Співвідношення (8) перепишемо у вигляді

$$(Lu_p, \omega_i)_{L_2(\Omega)} = \left(f, \omega_i\right)_{L_2(\Omega)}, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{9}$$

Теорема 2. Для будь-якої функції $f \in L_2(Q)$ послідовність функцій $u_p(t,x)$, визначених в (7), (8), збігається до розв'язку задачі (1), (2) у сенсі означення 2.

Доведення. Помножимо обидві частини рівності (9) на $\varphi(t) g_{it}(t)$, просумуємо по i від 1 до p та проінтегруємо по t. Отримаємо:

$$\left(Lu_p, \varphi u_{pt}\right)_{L_2(Q)} = \left(f, \varphi u_{pt}\right)_{L_2(Q)}.$$

Через лему 2 та нерівність Гельдера

$$C_3 \left\|u_p\right\|_{W_{\varepsilon p}}^2 \leq \left(\varphi u_{pt}, Lu_p\right)_{L_2(Q)} = \left(\varphi u_{pt}, f\right)_{L_2(Q)} \leq \left(\int\limits_Q \varphi^2 u_{pt}^2 dQ\right)^{1/2} \left(\int\limits_Q f^2 dQ\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C_4 \left\|u_p\right\|_{W_{\varepsilon p}} \|f\|_{L_2(Q)},$$

звідки, скорочуючи на $\left\|u_p\right\|_{W_{\varepsilon p}}$, отримаємо:

$$\left\|u_p\right\|_{W_{\varepsilon p}} \leq C \|f\|_{L_2(Q)}.$$

Послідовність $\left\{u_p\right\}_{p=1}^{\infty}$ обмежена у просторі $W_{гр}$, отже з неї можна виділити слабо збіжну до деякого $\widetilde{u}$ підпослідовність. Через результати Банаха та Сакса [7] з неї можна виділити підпослідовність $\left\{u_{p_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ таку, що $\widetilde{u}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu} u_{p_k}$ збігається сильно в $W_{гр}$ до тієї ж самої функції $\widetilde{u}$. Внаслідок (5) можна показати, що $L\widetilde{u}_\nu$ збігається до f у нормі простору $W_{гр'}^{-}$, отже $\widetilde{u}$ є розв'язком (1), (2) у сенсі означення 1. Оскільки оператор вкладення з $W_{гр}$ в $H_{гр}$ є цілком неперервним, обрана вище слабо збіжна в $W_{гр}$ підпослідовність $\left\{u_{p_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ буде в $H_{гр}$ сильно збіжною, отже $\widetilde{u}$ є розв'язком задачі (1), (2) у сенсі означення 2. Відмітимо, що немає необхідності вибирати підпослідовність, оскільки через лему 1 гранична точка єдина й вся послідовність (8) збігається до неї в $H_{гр}$.

Використовуючи операцію усереднення [5], далі ці результати можна поширити на випадок $f \in W_{гр'}^{-}$. Наведені твердження можна використовувати для розв'язку задач оптимального імпульсного керування.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Маловичко В.А.* О краевых задачах для вырождающихся псевдопараболических и псевдогиперболических систем // Дифференц. уравнения, 1991. – 27, № 12. – С. 2120–2124.
2. *Plumb O.A., S.Whitaker.* Dispersion in heterogeneous porous media, Parts 1 // Water Resour. Res. – 1988. – 24, № 7. – P. 913–926; Part 2 // The same. – P. 927–938.
3. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
4. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наук. думка, 1965. – 789 с.
5. *Ляшко И.И., Диденко В.П., Цитрицкий О.Е.* Фильтрация шумов. – К.: Наук. думка, 1979. – 230 с.
6. *Ляшко С.И.* Метод нахождения приближенного решения задачи Коши с операторным коэффициентом гиперболического типа // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 247. – № 3. – С. 546–549.
7. *Балакришнан А.* Введение в теорию оптимизации в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1974. – 260 с.

ПАЛІЄНКО Лариса Іванівна – асистентка кафедри економічної кібернетики Національного аграрного університету.

Наукові інтереси:

– задачі керування системами з розподіленими параметрами у оснащених гільбертових просторах.