І.П. Атаманюк

АНАЛІЗ ЯКОСТІ ЛІНІЙНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ НА БАЗІ АПАРАТУ КАНОНІЧНИХ РОЗКЛАДІВ

Проведено аналіз якості лінійної екстраполяції випадкових процесів при різному об'ємі інформації на базі апарату канонічних розкладів.

Широке коло задач керування пов'язане з необхідністю передбачення майбутнього стану об'єкта контролю за його відомим та минулим станом. У випадку, коли дана задача вирішується в умовах невизначеності, одним з підходів до її розв'язку є розгляд значень параметра об'єкта контролю як реалізації випадкового процесу і застосування до цієї реалізації апарату екстраполяції випадкових процесів. Найбільш універсальним методом екстраполяції, з точки зору накладаємих на випадковий процес обмежень, є метод прогнозу, який базується на канонічному розкладі досліджуваного випадкового процесу [1]. За допомогою даного методу оптимальна в середньоквадратичному змісті оцінка $m_x^{(k)}(i)$ лінійного прогнозу незашумованого випадкового процесу $X(t)$ за результатами послідовних вимірювань $x(m)$, $m=\overline{1,k}$ має вигляд [1]:

$$m_x^{(\mu)}(i)=\begin{cases}0, \text{ при } \mu=0, \ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{I}};\\ m_x^{(\mu-1)}(i)+[x(\mu)-m_x^{(\mu-1)}(\mu)]\varphi_\mu(i), \ \ \mu=\overline{1,\mathrm{k}}, \ \mathrm{i}=\overline{\mu+1,\mathrm{I}}\end{cases} \tag{1}$$

Вираз (1) може бути записаний в еквівалентній явній формі:

$$m_x^{(k)}(i)=\sum_{\mu=1}^{k}x(\mu)f_\mu^{(k)}(i), \ \mathrm{i}=\overline{\mathrm{k}+1,\mathrm{I}}, \tag{2}$$

де

$$f_\mu^{(k)}(i)=\begin{cases}f_\mu^{(k-1)}(i)-f_\mu^{(k-1)}(k)\varphi_k(i), \ \ \mu\le \mathrm{k}-1;\\ \varphi_\mathrm{k}(i), \ \mu=\mathrm{k}.\end{cases} \tag{3}$$

В (1) та (2) без обмеження загальності покладено, що математичне очікування процесу $X(t)$ в досліджуваних точках дискретизації дорівнює нулю $m_x(i)=0, \ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{I}}$ (дана умова зберігається протягом всього подальшого викладу), а $\varphi_\mu(i), \ \mu=\overline{1,\mathrm{k}}$ є координатними функціями канонічного розкладу $X(t)$:

$$X(i)=\sum_{\nu=1}^{i}V_\nu\varphi_\nu(i), \ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{I}}, \tag{4}$$

елементи якого з використанням відомої дискретизованої функції дисперсії та кореляційної функції визначені стандартним чином:

$$V_i=X(i)-\sum_{\nu=1}^{i-1}V_\nu\varphi_\nu(i), \ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{I}}; \tag{5}$$

$$D_V(\nu)=D_x(i)-\sum_{\nu=1}^{i-1}D_V(\nu)\varphi_\nu^2(i), \ \ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{I}}; \tag{6}$$

$$\varphi_\nu(i)=\frac{1}{D_V(\nu)}[R_x(\nu,i)-\sum_{j=1}^{\nu-1}D_V(j)\varphi_j(\mu)\varphi_j(i)], \ \mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{I}}, \ \mathrm{i}=\overline{\mathrm{j},\mathrm{I}}; \tag{7}$$

де $D_V(i), \ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{I}}$ – дисперсії випадкових коефіцієнтів.

Вирази (1) та (2) в рамках лінійного наближення визначають умовне математичне очікування випадкового процесу $X(t)$ при умові $X(\mu)=x(\mu), \ \mu=\overline{1,\mathrm{k}}$, тобто дають незміщену оцінку майбутніх значень екстрапольованої реалізації і забезпечують абсолютний мінімум середнього квадрату похибки екстраполяції

$$E_x^{(k)}(i)=M[|m_x^{(k)}(i)-X(i)|^2], \ \ \mathrm{i}=\overline{\mathrm{k}+1,\mathrm{I}} \tag{8}$$

рівний дисперсії

$$E_x^{(k)}(i)=D_x^{(k)}(i)=\sum_{\nu=k+1}^{i}D_V(\nu)\varphi_\nu^2(i), \ \ \mathrm{i}=\overline{\mathrm{k}+1,\mathrm{I}} \tag{9}$$

апостеріорної випадкової послідовності

$$X^{(k)}(i) = m_x^{(k)}(i) + \sum_{\nu=k+1}^{i} V_\nu \varphi_\nu(i), \quad i = \overline{1,I}. \tag{10}$$

Єдина вимога алгоритму (1), (2) до досліджуваного процесу – кінцевість дисперсії в точках дискретизації – не є сутєвим обмеженням і, як правило, виконується для фізичних процесів.

Припустимо, що значеня $x(i)$, $i = \overline{1,I}$ не спостерігаються через помилки вимірювань $Y(i)$: $m_y(i) = 0$, $R_y(i,i) = D_y(i)$, $i = \overline{1,I}$, $R_y(i,j) = 0$, $i \neq j$, $j,i = \overline{1,I}$. В сукупності $X(i)$ і $Y(i)$ формують випадкову послідовність результатів вимірювань $\{Z\}$:

$$Z(i) = X(i) + Y(i), \quad i = \overline{1,I} \; . \tag{11}$$

Найпростіший алгоритм екстраполяції $X(t)$ по $z(\mu)$, $\mu = \overline{1,k}$ на базі канонічного розкладу (4) має вигляд

$$m_{x/z}^{(k)}(i) = \sum_{\mu=1}^{k} z(\mu) f_\mu^{(k)}(i), \quad i = \overline{k+1,I} \; . \tag{12}$$

Середній квадрат похибки екстраполяції алгоритмом (12) визначається із виразу:

$$\begin{gathered} E_{x/z}^{(k)} = D_x(i) - 2\sum_{\mu=1}^{k} R_x(\mu,i) f_\mu^{(k)}(i) + \\ + \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{k} R_z(\mu,\nu) f_\mu^{(k)}(i) f_\nu^{(k)}(i), \quad i = \overline{1,I} \end{gathered} \tag{13}$$

Природним кроком до підвищення якості екстраполяції є заміна в алгоритмі (12) результатів вимірювань $z(\mu)$, $\mu = \overline{1,k}$ деякими оцінками $\hat{x}(\mu)$, $\mu = \overline{1,k}$ з кращими властивостями точності: $M[\left|X(\mu) - \hat{X}(\mu)\right|^2] < D_y(\mu)$.

Використовуючи підхід Калмана, вираз для визначення незміщеної оцінки запишеться як

$$\hat{x}(\mu) = (1 - B_\mu) m_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(\mu) + B_\mu z(\mu), \quad \mu = \overline{1,k} \, , \tag{14}$$

де $m_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(\mu)$ – результат прогнозу на μ-тий крок за $(\mu - 1)$ попередньою оцінкою $\hat{x}(\nu)$, $\nu = \overline{1,\mu-1}$;

B_μ – коефіцієнт фільтрації, який визначається з умови мінімума середнього квадрата похибки приближення $M[\left|X(\mu) - \hat{X}(\mu)\right|^2]$.

Підстановка оцінки (14) в (12) дає алгоритм екстраполяції з попередньою фільтрацією похибок вимірювань, який може бути записаний в рекурентній та явній формах [2]:

$$m_{\hat{x}}^{(\mu)}(i) = \begin{cases} 0, \text{ при } \mu = 0, \; i = \overline{1,I} \; ; \\ m_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(i) + B_\mu [z(\mu) - m_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(\mu)] \varphi_\mu(i), \end{cases} \tag{15}$$

$m = \overline{1,k}$, $i = \overline{k+1,I}$;

$$m_{\hat{x}}^{(k)}(i) = \sum_{\mu=1}^{k} S_\mu^{(k)}(i) z(\mu), \quad k < I, \quad i = \overline{k+1,I} \; ; \tag{16}$$

де

$$S_\mu^{(k)}(i) = \begin{cases} S_\mu^{(k)}(i) - S_\mu^{(k-1)}(k) B_k \varphi_k(i), & \mu < k \, , \\ B_k \varphi_k(i), & \mu = k \, . \end{cases} \tag{17}$$

З урахуванням виразу (16) співвідношення для визначення оптимальних значень запишеться як:

$$B_\mu = \frac{E_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(\mu)}{E_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(\mu) + D_y(\mu)} \; , \tag{18}$$

де $E_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(\mu)$ – середній квадрат похибки екстраполяції $x(\mu)$ за $(\mu - 1)$ результатами вимірювань:

$$E_{\hat{x}}^{(\mu-1)}(\mu) = D_x(\mu) - 2\sum_{\nu=1}^{\mu-1} R_x(\nu,\mu) S_\nu^{(\mu-1)}(\mu) + \tag{19}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\sum_{j=1}^{\mu-1} R_z(\nu,j)S_\nu^{(\mu-1)}(\mu)S_j^{(\mu-1)}(\mu).$$

Відповідно якість екстраполяції алгоритмом (15), (16) в точках дискретизації $i=\overline{k+1,I}$ для k відомих значень $z(\mu)$, $\mu=\overline{1,k}$, визначається виразом

$$E_{\hat{x}}^{(k)} = D_x(i) - 2\sum_{\mu=1}^{k} R_x(\mu,i)S_\mu^{(k)}(i) + \tag{20}$$

$$+\sum_{\mu=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k} R_z(\mu,\nu)S_\mu^{(k)}(i)S_\nu^{(k)}(i),\ \ i=\overline{k+1,I}.$$

Слід відмітити, що алгоритм (15), (16) є аналогом відомих модифікацій фільтра Калмана для немарківських випадкових процесів. Так, наприклад, не важко показати, що у випадку використання в одній з таких модифікацій терміну "простір фазових станів" [3], розмірність якого визначається кількістю відомих вимірювань, рівняння системи $\overline{X}(\mu)=\Phi(\mu,\mu-1)\overline{X}(\mu-1)+G(\mu)\cdot V_\mu$, яке описує динаміку зміни $X(t)$ в точці t_μ з урахуванням властивості: $M[\overline{X}(\mu)\overline{X}(\mu-1)]=\Phi(\mu,\mu-1)M[\overline{X}(\mu-1)\overline{X}(\mu-1)]$, може бути записане в розгорнутому вигляді:

$$\begin{vmatrix} X(2)\\ .\\ .\\ .\\ .\\ X(\mu)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \ldots\ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 \ldots\ldots & 0 & 0\\ . & & & \\ . & & & \\ 0 & 0 \ldots\ldots & 1 & 0\\ f_1^{(\mu-1)}(\mu) & f_2^{(\mu-1)}(\mu) \ldots\ldots & f_{\mu-2}^{(\mu-1)}(\mu) & f_{\mu-1}^{(\mu-1)}(\mu)\end{vmatrix} \begin{vmatrix} X(1)\\ .\\ .\\ .\\ .\\ X(\mu-1)\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}0\\0\\.\\.\\0\\1\end{vmatrix} V_\mu, \tag{21}$$

тобто результат прогнозу $x(\mu)$ за допомогою (21) по $z(\nu)$, $\nu=\overline{1,\mu-1}$ є еквівалентним оцінці (12) для $k=\mu-1$, $i=\mu$, а результат фільтрації – оцінці (14).

Алгоритм (15), (16) поряд з очевидними позитивними якостями (відсутність обмежень на досліджуваний випадковий процес $X(t)$, простота обчислень) має сутєвий недолік – в екстраполяційну форму (1), (2), оптимальну для $x(\mu)$, $\mu=\overline{1,k}$, підставляються оцінки $\hat{x}(m)$, $m=\overline{1,k}$, ймовірністні властивості яких відрізняються від $x(\mu)$, $\mu=\overline{1,k}$. Наявність даного розузгоджування, очевидно, обмежує якість екстраполяції.

Вказаний недолік може бути усунутий за рахунок переходу від канонічного розкладу (4), який покладено в основу всіх наведених вище алгоритмів, до канонічного розкладу змішаної випадкової послідовності $\{x'\}=\{Z(1), Z(2), \ldots, Z(k), X(k+1), \ldots, X(i)\}$, яка поєднує в собі як результати вимірювань до $i=k$, так і дані про процес $X(t)$ для $i=\overline{k+1,I}$ [4]:

$$x'(i)=\sum_{\nu=1}^{i} U_\nu\beta_\nu(i),\ \ i=\overline{1,I}. \tag{22}$$

Елементи канонічного розкладу (21) визначаються співвідношеннями:

$$U_i = Z(i)-\sum_{\nu=1}^{i-1} U_\nu\beta_\nu(i),\ \ i=\overline{1,k}; \tag{23}$$

$$U_i = X(i)-\sum_{\nu=1}^{i-1} U_\nu\beta_\nu(i),\ \ i=\overline{k+1,I}; \tag{24}$$

$$D_u(i) = D_z(i)-\sum_{\nu=1}^{i-1} D_u(\nu)\beta^2{}_\nu(i),\ \ i=\overline{1,k}; \tag{25}$$

$$D_u(i) = D_x(i)-\sum_{\nu=1}^{i-1} D_u(\nu)\beta^2{}_\nu(i),\ \ i=\overline{k+1,I}; \tag{26}$$

$$\beta_\nu(i)=\frac{1}{D_u(\nu)}[R_x(\nu,i)-\sum_{j=1}^{\nu-1} D_u(j)\beta_j(\mu)\beta_j(i)],\ \ \nu=\overline{1,I},\ i=\overline{\nu,I},\ \mu\le i. \tag{27}$$

Алгоритм оптимальної в середньоквадратичному змісті лінійної екстраполяції на базі канонічного розкладу (21) має вигляд:

$$m_{x/z}^{(\mu)}(i)=\begin{cases}0, & \mu=0, \quad i=\overline{1,I}\,;\\ m_{x/z}^{(\mu-1)}(i)+(z(\mu)-m_{x/z}^{(\mu-1)}(\mu))\beta_\mu(i), & \mu=\overline{1,k}\,, \quad i=\overline{k+1,I}\end{cases} \tag{28}$$

або може бути записаний в еквівалентній явній формі Вінера [4]:

$$m_{x/z}^{(k)}(i)=\sum_{\mu=1}^{k} z(\mu)b_\mu^{(k)}(i), \quad i=\overline{k+1,I}\,, \tag{29}$$

де

$$b_\mu^{(k)}(i)=\begin{cases}b_\mu^{(k-1)}(i)-b_\mu^{(k-1)}(k)\beta_\mu(i), & \mu<k\,;\\ \beta_k(i), & \mu=k\,.\end{cases} \tag{30}$$

Вирази (28), (29) визначають умовне математичне очікування послідовності $\{X'\}$ при умові $Z(\mu)=z(\mu), \ \mu=\overline{1,k}$. Середній квадрат похибки екстраполяції алгоритмом (27), (28) дорівнює дисперсії

$$E_{x/z}^{(k)}(i)=D_{x'}^{(k)}(i)=\sum_{\nu=k+1}^{i} D_u(\nu)\beta_\nu(i), \quad i=\overline{k+1,I} \tag{31}$$

апостеріорної випадкової послідовності

$$x'^{(k)}(i)=m_{x/z}^{(k)}(i)+\sum_{\nu=k+1}^{i} U_\nu\beta_\nu(i), \quad i=\overline{1,I}\,. \tag{32}$$

Алгоритм (15), (16), в основу якого покладена ідея калманівської фільтрації і алгоритм (28), (29), який представляє собою фільтр-екстраполятор Вінера для нестаціонарних випадкових процесів (4), використовують для своєї роботи однаковий об'єм апріорної інформації. В зв'язку з цим з метою визначеня впливу розузгоджування в алгоритмі (15), (16) природним є проведення порівнювального аналізу якості екстраполяції даними алгоритмами.

Припустимо, що (15), (16) дає оптимальний в середньоквадратичному змісті результат екстраполяції, тоді в силу теореми про єдиність оптимального розв'язку:

$$m_{x/z}^{(k)}(i)=m_{\tilde{x}}^{(k)}(i), \quad i=\overline{k+1,I}\,. \tag{33}$$

З (33) слідує співвідношення:

$$\beta_\nu(i)=\beta_\nu(\nu)\varphi_\nu(i), \quad \nu=\overline{1,k}\,, \tag{34}$$

яке з урахуванням виразів (7), (27), (34) зводиться до рівняння:

$$\sum_{\nu=1}^{k-1}(D_V(\nu)-D_u(\nu)\beta_\nu^2(\nu))(D_x(k)\varphi_\nu(k)\varphi_\nu(i)-R_x(k,i)\varphi_\nu^2(k))=0\,. \tag{35}$$

Для двох відомих значень (k = 2) рівняння (35), а отже, і (33) істинно, якщо (для k = 1 – марківський випадок – (33) виконується без будь-яких умов):

$$D_V(1)=D_u(1)\beta_1^2(1) \tag{36}$$

або

$$D_x(2)R_x(1,i)=R_x(1,2)R_x(2,i)\,. \tag{37}$$

Вираз (36) еквівалентний $D_z(1)=D_x(1)$, тобто хибний, залишається (37).

У випадку, коли два вимірювання, які використовуються для прогнозу, відповідають точкам дискретизації із області можливих значень $\overline{1,k}$ співвідношення (37) набуває вигляду:

$$D_x(\nu)R_x(\mu,i)=R_x(\mu,\nu)R_x(\nu,i), \quad \nu,\mu=\overline{1,k}\,, \quad \mu<\nu\,. \tag{38}$$

Враховуючи, по-перше, рекурентний характер алгоритмів екстраполяції ($m^{(2)}(i)$ використовується для обчислення $m^{(3)}(i), m^{(4)}(i),\ldots$), по-друге, в канонічному розкладі може бути довільний порядок слідування точок дискретизації (для обчислювання $m^{(2)}(i)$ можуть бути використані два значення, які відповідають довільним перерізам з $\overline{1,k}$) співвідношення (37) має місце і для кількості відомих значень >2.

При виконанні умови (38) вираз для обчислення координатних функцій $\varphi_\nu(i)$ має вигляд:

$$\varphi_\nu(i)=\frac{R_x(\nu,i)}{D_x(\nu)}, \quad \nu=\overline{1,k}\,, \quad i=\overline{\nu,I}\,. \tag{39}$$

Доведемо це. Вираз (39) з урахуванням (7) еквівалентний рівнянню:

$$D_x(\nu)\sum_{j=1}^{\nu-1} D_V(j)\varphi_j(i) = R_x(\nu,i)\sum_{j=1}^{\nu-1} D_V(j)\varphi_j(\nu), \quad \nu=\overline{1,k}\ , \quad i=\overline{\nu,I}\ . \tag{40}$$

Доведемо, що ліва і права його частини рівні почленно:

1. $D_x(\nu)D_V(1)\varphi_1(\nu)\varphi_1(i) = R_x(\nu,i)D_V(1)\varphi_1^2(\nu)$ – істинно згідно з (38), з чого випливає:

$$\varphi_2(i) = \frac{R_x(2,i)}{D_x(2)} \qquad i=\overline{2,I}\ ; \tag{41}$$

2. $D_x(\nu)D_V(2)\varphi_2(\nu)\varphi_2(i) = R_x(\nu,i)D_V(2)\varphi_2^2(\nu)$ – істинно з урахуванням (38), (41).

Із 1, 2 слідує:

$$\varphi_3(i) = \frac{R_x(3,i)}{D_x(3)}, \quad i=\overline{3,I}\ . \tag{42}$$

Продовжуючи аналогічні розсуди, можна довести справедливість (39) для довільного ν.

Із (38), (39) витікає істинність співвідношення (35), оскільки $D_x(k)\varphi_\nu(k)\varphi_\nu(i) - R_x(k,i)\varphi_\nu^2(k) = 0$ для довільного ν.

Таким чином, алгоритм екстраполяції (15), (16) співпадає з (28), (29), тобто дає оптимальну оцінку майбутніх значень, якщо для досліджуваного випадкового процесу $X(t)$ справедливо співвідношення (38). Однак, випадковий процес, якому належить дана властивість, є марківським, оскільки

$$M[X(i)\ /\ x(1),\dots,x(\nu)] = x(\nu)\frac{R_x(\nu,i)}{D_x(\nu)}\quad ,$$

якщо справедливо рівняння

$$M[(X(i) - X(\nu)\frac{R_x(\nu,i)}{D_x(\nu)})X(\mu)] = 0, \quad \mu=\overline{1,\nu}\quad ,$$

яке еквівалентне (38).

Тобто, алгоритм (15), (16) є оптимальним тільки для марківських випадкових процесів і його явна форма запису в даному випадку значно спрощується:

$$m_{x/\dot{x}}^{(k)}(i) = \sum_{\mu=1}^{k} z(\mu)B_\mu(k)\frac{R_x(\mu,i)}{D_x(\mu)}, \quad i=\overline{k,I}\ , \tag{43}$$

де

$$B_\mu(k) = \begin{cases} B_\mu(k-1) - B_\mu(k-1)B_k\ , & \mu < k\ ; \\ B_\mu\ , & \mu = k\ . \end{cases} \tag{44}$$

Таким чином, в статі проведено аналіз якості екстраполяції різних алгоритмів, які базуються на апараті канонічних розкладів і відрізняються об'ємом покладеної в їх основу апріорної та апостеріорної інформації. Також отримано висновок про те, що застосування калманівського підходу до екстраполяції (фільтрації помилок вимірювань) немарківських випадкових процесів дає квазіоптимальний результат.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Кудрицкий В.Д.* Прогнозирующий контроль радиоэлектронных устройств. – К.: Техника, 1982. – 168 с.
2. *Кудрицкий В.Д., Атаманюк И.П., Иващенко Е.Н.* Оптимальная линейная экстраполяция реализации случайного процесса с фильтрацией погрешностей коррелированных измерений // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – № 1. – С. 99–107.
3. *Медич Дж.* Статистически оптимальные линейные оценки и управление. – М.: Энергия, 1973. – 440 с.
4. *Кудрицкий В.Д., Атаманюк И.П.* Алгоритм определения оптимальных параметров фильтра-экстраполятора Винера для нестационарных случайных процессов, наблюдаемых с погрешностями // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – № 3. – С. 183–186.

АТАМАНЮК Ігор Петрович – кандидат технічних наук, викладач Житомирського військового інституту радіоелектроніки.

Наукові інтереси:
- екстраполяція випадкових процесів;
- фільтрація помилок вимірювань.