О.В. Власенко, А.В. Співак, С.І. Яремчук

МЕТОД УМОВНОГО ГРАДІЄНТА ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗТАШУВАННЯ ДЖЕРЕЛ ФІЗИЧНИХ ПОЛІВ

Розглядається задача оптимізації розміщення дискретних джерел фізичних полів. Обгрунтовується можливість використання методу умовного градієнта для знаходження розв'язку цієї задачі у випадку, коли джерела мають форму n-мірних прямокутників.

При проектуванні складних технічних систем, характеристики яких залежать від поведінки поля (в енергетиці, електронній техніці, будівництві та інших галузях науки і техніки), суттєвий практичний інтерес представляє питання раціонального розміщення джерел фізичних полів із заданими геометричними та енергетичними характеристиками. Так, наприклад, задачі раціонального розміщення джерел полів постають при проектуванні радіоелектронної апаратури з урахуванням теплової та електромагнітної сумісності елементів вузлів, при компонуванні ядерних реакторів, при розстановці свердловин у нафтових пластах. В процесі проектування механічних конструкцій розв'язуються задачі оптимального розміщення зовнішніх впливів, впливів на характеристики конструкцій тощо.

Джерела фізичних полів можуть бути силовими, дифузними, тепловими, електромагнітними та іншими. В залежності від природи джерел існують скалярні або векторні фізичні поля. Якщо інтенсивність джерел змінюється в часі, то ними породжуються нестаціонарні фізичні поля, якщо ж не змінюється − стаціонарні. Але у кожному випадку розв'язується одна і та ж задача, яку в загальному вигляді можна сформулювати таким чином: необхідно в заданій області розмістити джерела поля із заданими геометричними та енергетичними характеристиками так, щоб задовольнити завчасно заданим обмеженням, які накладені на характеристики проектованого приладу, і отримати екстремум відповідної функції мети.

Будемо розглядати лише стаціонарні скалярні поля з дискретними джерелами. Виділимо два види розміщення джерела: регулярне та нерегулярне. До регулярного розміщення відносяться періодичне, решітчасте та симетричне. Будь-яке інше розміщення називається нерегулярним.

Математична модель поставленої задачі. В просторі R^n є обмежена замкнута область Ω, що містить джерела фізичного поля $D_1, D_2, \ldots, D_m$. Поле, що не змінюється в часі, описується першою крайовою задачею еліптичного типу:

$$\Delta u - \beta^2 u = -f(x, Z),$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x),$$

де

$$f(x,Z) = \begin{cases} A^i(x - Z^i), x \in D_i, \\ 0, x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} D_i, \end{cases}$$

$$\bigcup_{i=1}^{m} D_i \subset \Omega,$$

$x(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$; $Z = (Z^1, Z^2, \ldots, Z^m)$ − параметри розміщення джерел $D_1, D_2, \ldots, D_m$; $Z^i(\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_n^i)$ − координати центра i-го джерела.

Вимагається знайти таке місцеположення джерел Z^*, при якому досягла б свого екстремального значення функція мети, а вектор Z^* належав би до множини G − області зміни параметра Z. Множина G визначається умовами взаємного неперетинання джерел $D_1, D_2, \ldots, D_m$, а також умовами належності джерел області Ω.

Розглядається випадок, коли область Ω і джерела D_i $(i = 1, \overline{m})$ мають форму n-мірних прямокутників, а функція мети є значенням поля в заданій точці області Ω. Тобто задача має вигляд:

$$F(Z) = u(x_0, Z) \to min, Z \in G. \tag{1}$$

Розв'язок її будемо шукати з використанням методу умовного градієнта [1]. Для розв'язання задачі оптимізації цим методом необхідно, щоб функція мети була неперервно диференційованою, а множина допустимих розв'язків мала один із спеціальних видів. Зокрема ця множина може бути опуклим багатогранником, тобто визначатися системою лінійних нерівностей. Доведено, що функція мети (1) неперервно диференційована [2].

Умови взаємного неперетину джерел $D_1, D_2, \ldots, D_m$ описуються так:

1) для кожної пари джерел D_s, D_p існує хоча б одне i таке, що:

$$\xi_i^s - \xi_i^p \geq \frac{l_i^s + l_i^p}{2}, \; i = \overline{1,n}, \; s \neq p, \; s = \overline{1,m}, \; p = \overline{1,m}; \tag{2}$$

2) умови належності джерел області Ω мають вигляд:

$$\frac{l_i^j}{2} \leq \xi_i^j \leq a_i - \frac{l_i^j}{2}, \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,m}, \tag{3}$$

де $L^i\left(l_1^i, l_2^i, \ldots, l_n^i\right)$ – розміри i-го джерела; $a(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – границі області Ω.

Наведені нерівності (2), (3) описують множину G, яка є об'єднанням опуклих n-мірних багатогранників G_i:

$$G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i, \; i = \overline{1,r},$$

де r – кількість багатогранників.

Кожний багатогранник описується системою лінійних нерівностей. Таким чином, отримуємо r підзадач виду:

$$F(Z) = u\left(x^0, Z\right) \to min, \; Z \in G_i, \; G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i.$$

Отримані підзадачі розв'язуються методом умовного градієнта.

Розглянемо дану задачу для простору R^2. Джерела мають форму прямокутників з лінійними розмірами l_1^s, l_2^s. Область Ω має також форму прямокутника з лінійними розмірами a_1, a_2. Сумістимо лівий нижній кут області з початком координат, а сторону довжиною a_1 з віссю абсцис.

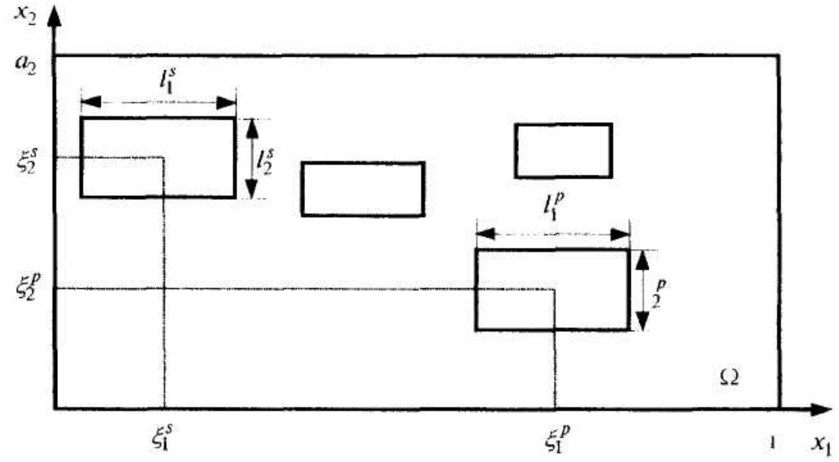

Рис. 1. Приклад розташування джерел на області Ω

В цьому випадку розв'язок крайової задачі можна знайти, використовуючи розклад в ряд Фур'є [3]:

$$u = \frac{16}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sum_{i=1}^{m} A^i \sin\frac{j\pi l_1^i}{a_1} \sin\frac{k\pi l_2^i}{a_2} \sin\frac{j\pi \xi_1^i}{a_1} \sin\frac{k\pi \xi_2^i}{a_2}}{\left(\frac{j^2\pi^2}{a_1^2} + \frac{k^2\pi^2}{a_2^2} + \beta^2\right) \cdot j \cdot k} \right] \cdot \sin\frac{j\pi x_1}{a_1} \cdot \sin\frac{k\pi x_2}{a_2}. \tag{4}$$

Тоді

$$F(Z)=u\left(x^0,Z\right)=\frac{16}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\sum_{i=1}^{m}A^i\sin\frac{j\pi l_1^i}{a_1}\sin\frac{k\pi l_2^i}{a_2}\sin\frac{j\pi\xi_1^i}{a_1}\sin\frac{k\pi\xi_2^i}{a_2}}{\left(\frac{j^2\pi^2}{a_1^2}+\frac{k^2\pi^2}{a_2^2}+\beta^2\right)\cdot j\cdot k}\right]\cdot\sin\frac{j\pi x_1^0}{a_1}\cdot\sin\frac{k\pi x_2^0}{a_2}. \quad (5)$$

При розв'язуванні конкретних задач функція $F(Z)$, що представляється нескінченним рядом (5) з будь-якою завчасно заданою точністю, задається частковою сумою цього ряду.

Припустимо, що є лише два прямокутних джерела. Тоді умови взаємного неперетину мають вигляд:

$$\left|\xi_1^1-\xi_1^2\right|\ge d_{12}\vee\left|\xi_2^1-\xi_2^2\right|\ge b_{12}, \quad (6)$$

де $d_{12}=\dfrac{l_1^1+l_1^2}{2}$, $b_{12}=\dfrac{l_2^1+l_2^2}{2}$.

Умови належності двох джерел області Ω записуються так:

$$\begin{cases}\frac{l_1^1}{2}\le\xi_1^1\le a_1-\frac{l_1^1}{2},\\ \frac{l_2^1}{2}\le\xi_2^1\le a_2-\frac{l_2^1}{2},\\ \frac{l_1^2}{2}\le\xi_1^2\le a_1-\frac{l_1^2}{2},\\ \frac{l_2^2}{2}\le\xi_2^2\le a_2-\frac{l_2^2}{2}.\end{cases} \quad (7)$$

Ці обмеження необхідно привести до вигляду, придатного для застосування методу умовного градієнта, тобто представити у вигляді сукупності систем лінійних рівнянь. В результаті відповідних перетворень отримаємо наступну сукупність систем:

$$\begin{cases}\xi_1^1-\xi_1^2\le -d_{12},\\ -\xi_1^1\le-\frac{l_1^1}{2},\\ \xi_1^1\le a_1-\frac{l_1^1}{2},\\ -\xi_2^1\le-\frac{l_2^1}{2},\\ \xi_2^1\le a_2-\frac{l_2^1}{2},\\ -\xi_1^2\le-\frac{l_1^2}{2},\\ \xi_1^2\le a_1-\frac{l_1^2}{2},\\ -\xi_2^2\le-\frac{l_2^2}{2},\\ \xi_2^2\le a_2-\frac{l_2^2}{2},\end{cases} (8) \quad \begin{cases}-\xi_1^1+\xi_1^2\le -d_{12},\\ -\xi_1^1\le-\frac{l_1^1}{2},\\ \xi_1^1\le a_1-\frac{l_1^1}{2},\\ -\xi_2^1\le-\frac{l_2^1}{2},\\ \xi_2^1\le a_2-\frac{l_2^1}{2},\\ -\xi_1^2\le-\frac{l_1^2}{2},\\ \xi_1^2\le a_1-\frac{l_1^2}{2},\\ -\xi_2^2\le-\frac{l_2^2}{2},\\ \xi_2^2\le a_2-\frac{l_2^2}{2},\end{cases} (9) \quad \begin{cases}\xi_2^1-\xi_2^2\le -b_{12},\\ -\xi_1^1\le-\frac{l_1^1}{2},\\ \xi_1^1\le a_1-\frac{l_1^1}{2},\\ -\xi_2^1\le-\frac{l_2^1}{2},\\ \xi_2^1\le a_2-\frac{l_2^1}{2},\\ -\xi_1^2\le-\frac{l_1^2}{2},\\ \xi_1^2\le a_1-\frac{l_1^2}{2},\\ -\xi_2^2\le-\frac{l_2^2}{2},\\ \xi_2^2\le a_2-\frac{l_2^2}{2},\end{cases} (10) \quad \begin{cases}-\xi_2^1+\xi_2^2\le -b_{12},\\ -\xi_1^1\le-\frac{l_1^1}{2},\\ \xi_1^1\le a_1-\frac{l_1^1}{2},\\ -\xi_2^1\le-\frac{l_2^1}{2},\\ \xi_2^1\le a_2-\frac{l_2^1}{2},\\ -\xi_1^2\le-\frac{l_1^2}{2},\\ \xi_1^2\le a_1-\frac{l_1^2}{2},\\ -\xi_2^2\le-\frac{l_2^2}{2},\\ \xi_2^2\le a_2-\frac{l_2^2}{2}.\end{cases} (11)$$

Для двох джерел на R^2 отримано 4 системи лінійних нерівностей, а значить чотири підзадачі: (5), (8); (5), (9); (5), (10); (5), (11). Кожна з цих задач розв'язується методом умовного градієнта. Після цього з отриманих розв'язків вибирається найкращий.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986.
2. *Стоян Ю.Г., Яремчук С.И., Крыжановский В.Б.* Дифференцируемость поля дискретных источников по параметрам их размещения // Доповіді національної Академії наук України, 1995. – № 10. – С. 38–40.
3. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластин и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 636 с.

ВЛАСЕНКО Олег Васильович – інженер-програміст, асистент кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
- методи оптимізації;
- програмування;
- алгоритмічні мови.

СПІВАК Андрій Валентинович – студент групи АК-3 факультету інформаційно-комп'ютерних технологій Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
- методи оптимізації.

ЯРЕМЧУК Світлана Іванівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
- методи оптимізації;
- моделювання фізичних полів з дискретними джерелами.