В.В. Гніліцький, Я.В. Мокеічева, В.В. Таратін

ПРОПУСКНА СПРОМОЖНІСТЬ ДИСКРЕТНОГО НЕСИМЕТРИЧНОГО КАНАЛУ ЗВ'ЯЗКУ

Отримано алгоритм для визначення пропускної спроможності несиметричного стаціонарного каналу без пам'яті з довільною потужністю алфавіта, суть якого є в складанні та розв'язанні двох систем лінійних рівнянь.

Питанням аналізу пропускної спроможності несиметричних дискретних (цифрових) каналів зв'язку в літературі приділяється дуже мало уваги. Так, в [1] наведено означення симетричного каналу. В [2] розглянуто приклад визначення пропускної спроможності специфічного трійкового каналу без пам'яті, в якому один символ передається завжди безпомилково, а два інші можуть переходити один в другий з однаковою імовірністю; для розв'язку задачі використовується метод невизначених коефіцієнтів Лагранжа. В [3] отримано вираз для пропускної спроможності двійкового край несиметричного каналу, в якому символ "1" завжди передається вірно, а при передачі символу "0" можливі помилки. В [4] наведено ітераційний алгоритм, який дозволяє підраховувати пропускну спроможність стаціонарного несиметричного каналу без пам'яті із заданою заздалегідь точністю; чим більша точність потрібна, тим більше кроків необхідно виконати.

Для довільної потужності алфавіту навіть для стаціонарного каналу без пам'яті аналітичний розв'язок відсутній. Це можна пояснити принаймні двома причинами. По-перше, складністю отримання аналітичного виразу для розрахунку або досить близької оцінки пропускної спроможності [4]. По-друге, тою обставиною, що до деякого часу більшість цифрових систем зв'язку базувалась на двійковому каналі [5]. Тобто в цих системах інформація представляється двійковими кодами, і саме сигнали із двійкового ансамблю послідовно передаються по лініях зв'язку, де піддаються спотворенням та діям завад. Такі двійкові канали є симетричними або близькими до них.

Відомо, що використання в цифрових системах зв'язку двійкових сигналів не дозволяє в загальному випадку наблизити швидкість передачі інформації до пропускної спроможності неперервного каналу, по якому ці сигнали передаються. Збільшити швидкість передачі інформації можна лише застосуванням більш складних сигналів. Тому останнім часом все частіше цифрові системи зв'язку будуються не на двійкових каналах, а на каналах із суттєво більшою кількістю елементарних сигналів (в сучасних модемах [5] кількість сигналів дорівнює 256, 512, а іноді і більше). До того ж такі канали є несиметричними. Тому задача аналізу несиметричних дискретних каналів набуває все більшої актуальності.

Дискретний стаціонарний канал без пам'яті з алфавітом $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ на вході та алфавітом $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ на виході задається матрицею перехідних імовірностей [4]:

$$\begin{pmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & \dots & p(y_m/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & \dots & p(y_m/x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(y_1/x_m) & p(y_2/x_m) & \dots & p(y_m/x_m) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де $p(y_j/x_i)$ – імовірність переходу символу x_i на вході каналу у символ y_j на його виході. Для всіх рядків матриці справедливо:

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i) = 1. \quad (2)$$

Для визначення пропускної спроможності C необхідно максимізувати середню взаємну інформацію між ансамблями X та Y:

$$I(X,Y) = [H(Y) - H(Y/X)], \quad (3)$$

де $H(Y)$ – безумовна ентропія вихідного алфавіту; $H(Y/X)$ – повна умовна ентропія вихідного алфавіту.

Позначимо $p(x_i)$ – імовірність виникнення символу x_i на вході каналу. Оскільки $\sum_{i=1}^{m} p(x_i) = 1$, то одну із імовірностей можна виразити через інші. Для зручності вибираємо $p(x_m)$:

$$p(x_m) = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} p(x_i). \quad (4)$$

З урахуванням (4) пропускна спроможність

$$C = max\ I(X,Y) = max\left[-\frac{1}{ln\,2}\sum_{j=1}^{m} p(y_j)\,ln\,p(y_j) - \left(\sum_{i=1}^{m-1}\left[(H_i - H_m)p(x_i)\right] + H_m\right)\right], \tag{5}$$

де H_i – частинна умовна ентропія:

$$H_i = H(Y/x_i) = -\sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i)\log_2 p(y_j/x_i), \tag{6}$$

а $p(y_j)$ – імовірність появи символу y_j:

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{m-1}\left[p(x_i)p(y_j/x_i)\right] + \left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} p(x_i)\right)p(y_j/x_m) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1}\left[\left(p(y_j/x_i) - p(y_j/x_m)\right)p(x_i)\right] + p(y_j/x_m). \tag{7}$$

Для отримання максимуму функції $I(X, Y)$ по всіх розподілах імовірностей $p(x_i)$ знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial I(X,Y)}{\partial p(x_i)} = -\frac{1}{ln\,2}\sum_{j=1}^{m-1}\left[p(y_j/x_i) - p(y_j/x_m)\right]ln\frac{p(y_j)}{p(y_m)} - (H_i - H_m), \tag{8}$$

і прирівнюємо кожну похідну нулю:

$$\frac{\partial I(X,Y)}{\partial p(x_i)} = 0, \quad i = \overline{1, m-1}. \tag{9}$$

Безпосереднє розв'язання цієї системи пов'язано із значними труднощами. Щоб їх уникнути, позначимо

$$F_j = ln\frac{p(y_j)}{p(y_m)}. \tag{10}$$

Тоді система (9) набуває вигляду:

$$\sum_{j=1}^{m-1}\left(p(y_j/x_i) - p(y_j/x_m)\right)F_j = -ln\,2^{H_i - H_m}. \tag{11}$$

Її можна записати у матричному вигляді:

$$A \cdot F = B, \tag{12}$$

де A – матриця розміром $(m-1)\times(m-1)$, елементами якої є коефіцієнти рівнянь системи (11), $A_{ij} = p(y_j/x_i) - p(y_j/x_m)$; B – матриця-стовпець розміром $(m-1)$, елементами якої є вільні члени системи (11), $B_i = -ln\,2^{H_i - H_m}$; F – матриця-стовпець розміром $(m-1)$, елементами якої є змінні F_j рівнянь системи (11).

Розв'язуємо цю систему за допомогою метода Крамера:

$$F_j = \frac{det\ A^{(j)}}{det\ A}, \quad j = \overline{1, m-1}, \tag{13}$$

де $A^{(j)}$ – матриця, у якої j-й стовпець замінено на стовпець вільних членів.

Із (10) отримаємо

$$p(y_j) = p(y_m)e^{F_j}, \tag{14}$$

де $j = \overline{1, m-1}$.

З урахуванням (7) останню систему можна записати:

$$\sum_{i=1}^{m-1}\left[\left(p(y_j/x_i) - p(y_j/x_m)\right) - e^{F_j}\left(p(y_m/x_i) - p(y_m/x_m)\right)\right]p(x_i) =$$

$$= p(y_m/x_m)e^{F_j} - p(y_j/x_m), \quad j = \overline{1, m-1}. \tag{15}$$

Або у матричному вигляді:

$$K \cdot P = L, \tag{16}$$

де K – матриця розміром $(m-1)\times(m-1)$, елементами якої є коефіцієнти рівнянь системи (15), $K_{ij} = \left(p(y_i/x_j) - p(y_i/x_m)\right) - e^{F_i}\left(p(y_m/x_j) - p(y_m/x_m)\right)$; L – матриця-стовпець розміром $(m-1)$, елементами якої є вільні члени системи (15), $L_j = p(y_m/x_m)e^{F_j} - p(y_j/x_m)$; P – матриця-стовпець розміром $(m-1)$, елементами якої є змінні $p(x_i)$ системи (15).

Цю систему розв'язуємо також за допомогою метода Крамера:

$$p(x_i) = \frac{det\ K^{(i)}}{det\ K}, \quad i = \overline{1, m-1}. \tag{17}$$

Після цього із співвідношення (4) отримуємо значення $p(x_m)$.

Отже, усі ймовірності $p(x_i)$, де $i = \overline{1, m}$, знайдено. Тепер знаходимо значення пропускної спроможності:

$$C = -\left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\left[p(x_i)p(y_j/x_i)\right]log_2 \sum_{i=1}^{m}\left[p(x_i)p(y_j/x_i)\right] + \sum_{i=1}^{m} p(x_i)\sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i)log_2\ p(y_j/x_i)\right]. \tag{18}$$

На основі вище викладеного матеріалу можна навести алгоритм, за яким обраховується пропускна спроможність C:

1. За формулою (6) обраховуємо частинні умовні ентропії H_i.
2. Складаємо матрицю A та вектор B для матричного рівняння (12).
3. За формулою (13) знаходимо значення F_i.
4. Складаємо матрицю K та вектор L для матричного рівняння (16).
5. За формулами (17) та (4) обчислюємо значення $p(x_i)$, де $i = \overline{1, m}$.
6. За формулою (18) обчислюємо значення пропускної спроможності C.

За цим алгоритмом розроблена програма на мові "C" для розрахунку пропускної спроможності дискретних несиметричних каналів зв'язку з алфавітом будь-якої потужності.

З метою перевірки правильності розв'зку за допомогою цього алгоритму було розраховано пропускну спроможність двійкового край несиметричного каналу; результати розрахунків збіглися з розрахунками за виразами для такої моделі, що наведена в [3].

Крім того, для каналів з більшою потужністю ($m = 4$, $m = 8$) пропускна спроможність, та оптимальні розподіли $p(x_i)$ були отримані чисельними методами з викоритсанням виразу (3); результати оптимізації збіглися з обчисленням пропускної спроможності за отриманим алгоритмом.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Дмитриев В.И.* Прикладная теория информации. – М.: Высш. шк., 1989. – 320 с.
2. *Кузьмин И.В., Кедрус В.А.* Основы теории информации и кодирования. – К.: Вища школа, 1986. – 238 с.
3. Справочник по теоретическим основам радиоэлектроники / Под ред. Б.Х. Кривицкого. – Т. 2. – М.: Энергия, 1977. – 472 с.
4. *Колесник В.Д., Полтырев Г.Ш.* Курс теории информации. – М.: Наука, 1982. – 416 с.
5. *Блох Э.Л.* и др. Модели источника ошибок в каналах передачи цифровой информации. – М.: Связь, 1971. – 312 с.
6. *Лагутенко О.И.* Модемы: Справочник пользователя. – СПб.: Лань, 1997. – 368 с.

ГНІЛІЦЬКИЙ Віталій Васильович – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри автоматики та управління в технічних системах Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
- цифрова обробка сигналів;
- інформаційні системи.

МОКЕІЧЕВА Яна Володимирівна – студентка 3 курсу факультету інженерно-комп'ютерних технологій Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
- теорія інформації.

ТАРАТІН Владлен Вадимович – студент 3 курсу факультету інженерно-комп'ютерних технологій Житомирського інженерно-технологічного інституту.

Наукові інтереси:
- теорія інформації.