**А.В. Панішев, О.О. Подоляка, С.Чернищук**

# ДИХОТОМІЧНИЙ ПОШУК РОЗВ'ЯЗКУ МІНІМАКСНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

*Описано ефективний точний алгоритм розв'язку задачі про призначення з мінімальним критерієм, розроблений для складання розкладів руху пасажирського автотранспорту.*

Розглянемо задачу про призначення $m$ робіт на $m$ машин у наступному формулюванні.

Нехай для перестановки $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_m)$ рядків квадратної матриці $\left[\beta_{ij}^0\right]_m$ визначена функція штрафу

$$\beta(\omega) = \max_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le m} \beta_{ij}(\omega),$$

$$\beta_{ij}(\omega) = \begin{cases} \beta_{ij}^0, & \text{якщо робота } j \text{ виконується машиною } i, \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Потрібно знайти перестановку $\omega^* = \left(i_1^*, i_2^*, \dots, i_m^*\right)$ з найменшим значенням функції штрафу:

$$\beta(\omega^*) = \min_{\omega} \beta(\omega). \qquad (1)$$

Наприклад, для матриці

$$\left[\beta_{ij}^0\right]_5 = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 8 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ \infty & 8 & 8 & 5 & 8 \\ 8 & 6 & 6 & 5 & \infty \\ 6 & 8 & 7 & 5 & \infty \end{bmatrix}$$

мінімум значення функції штрафу $\beta(\omega^*) = 6$ досягається при $\omega^* = (5, 2, 4, 3, 1)$.

Природна транспортна інтерпретація задачі, представлена таким чином [1]. Два населені пункти А і В з розташованими в них автопідприємствами пов'язані розкладом руху автобусів, що складається з $m$ рейсів. Кожна бригада автобусів, що відправляється в рейс $i$, $i = 1, \dots, m$, з одного пункту в інший, повинна повернутися на своє автопідприємство. Необхідно так розподілити бригади по автопідприємствах, щоб мінімізувати найбільший час, що проводять бригади поза місцем їх роботи.

У наведеній змістовній постановці кожний елемент матриці $\left[\beta_{ij}^0\right]_m$ визначається:

$$\beta_{ij}^0 = \min\left\{\beta_{ij}^A, \beta_{ij}^B\right\}.$$

Елементи матриці $\left[\beta_{ij}^A\right]$ та $\left[\beta_{ij}^B\right]$ вираховуються за розкладами руху з А до В та з В до А і містять інформацію про час відсутності бригад на своєму автопідприємстві: матриця $\left[\beta_{ij}^A\right]_m$ – за умови, що всі бригади працюють на автопідприємстві пункту А, а матриця $\left[\beta_{ij}^B\right]_m$ – якщо всі бригади з автопідприємства В.

Задача (1) може розглядатися як задача складення розкладу для однієї машини у наступному формулюванні.

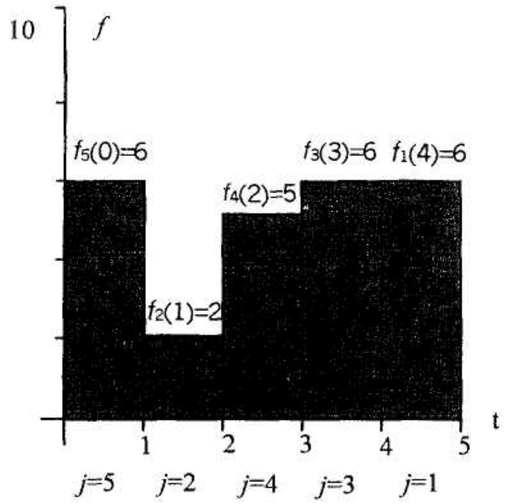
Необхідно виконати на одній машині $n$ незалежних робіт $T_j$ одиничної тривалості. Для кожної роботи $T_j$ визначена цілочисельна функція штрафу $f_j$. Розкладом з початком в точці $t = 0$ (без простоїв) назвемо послідовність індексів всіх робіт з цілочисельними координатами, що належать відрізку $[0, n - 1]$.

При цьому, якщо індекс $j$ має координату $i - 1$, $i = 1, \dots, n$ в розкладі $\omega$, то це означає, що в одиничному інтервалі $[i - 1, i]$ машина виконує роботу $j$. Значення функції $f_j(i - 1)$ називається штрафом елемента $j$ в розкладі $\omega$. Функції штрафу у загальному вигляді довільні, відрізняються одна від одної і допускають "розриви" при $f_j(i - 1) = \infty$. Максимальний штраф серед штрафів всіх робіт в розкладі $\omega$ називається штрафом $f_{max}(\omega)$ всього розкладу.

Задача міститься у побудові розкладу $\omega^*$ з найменшим штрафом серед всіх розкладів $\omega$. У такій постановці в оптимальному розкладі $\omega^* = (5, 2, 4, 3, 1)$, одержаному з наведеного числового прикладу. Штрафами робіт $f_j$ при $t = 0$ будуть значення: $f_5(0) = \beta_{15}^0 = 6$, $f_2(1) = \beta_{22}^0 = 2$, $f_4(2) = \beta_{34}^0 = 5$, $f_3(3) = \beta_{43}^0 = 6$, $f_1(4) = \beta_{51}^0 = 6$, а максимальний штраф всього розкладу $f_{max}(\omega^*) = 6$.

Звертаючись до загальноприйнятого способу опису задач теорії розкладів за допомогою класифікаційних формул, задачу мінімізації максимального штрафу за виконання робіт одиничної тривалості на одній машині запишемо у вигляді $1|P_j = 1|f_{max}$. Вибравши за критерій мінімуму суми штрафів всіх робіт одиничної тривалості, що виконується на одній машині, одержимо задачу $1|P_j = 1|\sum f_i$, відому як задача про призначення.

Для наведеного числового прикладу сумарний штраф розкладу (5, 2, 4, 3, 1) дорівнює 15.




Звісно, що задача про призначення ефективно розв'язується [2]. Для розв'язку задачі $1|P_j = 1|f_{max}$ будемо користуватися відомими визначеннями та результатами теорії паросполучень, що з успіхом застосовуються при розробці алгоритмів оптимального призначення теорії розкладів [3].

Паросполучення графу – це множина ребер, в якій ніякі два ребра не мають спільних вершин. Паросполучення з найбільшою кількість ребер називається максимальним паросполученням.

Кінцева вершина ребра, що належить паросполученню, називається насиченою. Нехай вершина $y$ – насичена вершина ребра $(y, z)$, що входить до паросполучення $m$. Тоді вершина $z$ називається напарником $y$.

Досконале паросполучення – паросполучення, що насичує всі вершини графу.

Ланцюг графу $G = (V, E)$, що чергується, – це ланцюг, ребра якого почергово входять до паросполучення $M$ та $E$-$M$.

***Теорема 1 (Берж).*** Паросполучення є максимальним тоді й тільки тоді, коли між двома ненасиченими у ньому вершинами не існує ланцюга, що чергується.

Нехай $M$ – паросполучення графа $G$, а $P$ – ланцюг, що чергується між двома ненасиченими в $M$ вершинами. Тоді $M \oplus P = (M - P) \cup (P - M)$ є паросполученням з кількістю ребер на одиницю більшою, ніж в $M$. З цього приводу шлях $P$ називається додаючим по відношенню до $M$.

Граф $G = (V, E)$ називається дводольним, якщо множину вершин $V$ можна розбити на дві такі підмножини $X$ та $Y$, що кожне ребро, яке належить $E$, має одну вершину в $X$, а другу – в $Y$.

Паросполучення $M$ у дводольному графі $G = (X, Y, E)$ є повним паросполученням $X$ з $Y$, якщо кожна вершина $X$ насичена в $M$.

Нехай у дводольному графі $G = (X, Y, E)$ $S \subseteq X$, а $\Gamma(S)$ – підмножина вершин з $Y$, суміжна з вершинами $S$.

***Теорема 2 (Холл).*** У дводольному графі $G = (X, Y, E)$ існує, повне паросполучення $X$ з $Y$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $S \subseteq X$ справедлива нерівність $|S| \le |\Gamma(S)|$.

Повним дводольним графом $K_{m,m}$ називається дводольний граф, у якому для кожної вершини $V \in X$ і $V_1 \in Y$ існує ребро $(V_i, V_j)$ та $|X| = |Y| = m$.

З матрицею $\left[\beta_{ij}^0\right]_m$ пов'яжемо повний дводольний граф $H_{m,m} = (X, Y, U)$, де $X = \{x_i, |1 \le i \le m\}$ – множина вершин, що представляє машини, а $Y = \{y_i, |1 \le j \le m\}$ – множина вершин, що представляє роботи. Кожному ребру $(x_i, y_i)$ приписана вага $\beta_{ij}^0$, що дорівнює часу виконання $j$-ої роботи на $i$-й машині. Тоді задача (1) (або $1|P_j = 1|f_{max}$) відповідає задачі визначення у зваженому графі $H_{m,m}$ довершеного паросполучення $\omega^*$ з мінімальною вагою.

Для графу $H_{m,m} = (X, Y, U)$, що містить нескінченно більші значення ваги ребер, мінімальна вага довершеного паросполучення може також дорівнювати нескінченно великій величині. Інакше кажучи, в такому випадку $\omega^*, |\omega^*| = m$, має одне або кілька ребер з вагою $\infty$. Оскільки величина $\beta_{ij}^0 = \infty$ означає неможливість виконання $j$-ї роботи на $i$-ї машині, то будемо говорити, що у випадку $\beta(\omega^*) = \infty$ задача (1) не має розв'язку.

Існування розв'язку у розумінні $\beta(\omega^*) \ne \infty$ можна встановити, звернувшись до дводольного графу $G_r = (X, Y, U_r)$ у випадку $|X| = |Y|$, у теоремі Холла сформульовано необхідні та достатні умови існування довершеного паросполучення.

В основу пропонованого нижче алгоритму розв'язку задачі $1|P_j = 1|f_{max}$ покладена схема методу дихотомії з використанням відомої поліноміальної процедури знаходження довершеного паросполучення в головному підграфі $G_r = (X, Y, U_r)$, $|X| = |Y|$, графу $K_{m,m} = (X, Y, U)$ з одиничними вагами ребер [3, 4]. Процедура – або знаходить довершене паросполучення графу $G_r = (X, Y, U_r)$, якщо воно існує, або встановлює, що для даного графу довершеного паросполучення не існує.

Алгоритм знаходження $\omega^*$ складається з кінцевого числа звернень до процедури побудови довершеного паросполучення, що застосовується до різних головних підграфів графу $K_{m,m}$.

Головний підграф $G_r = (X, Y, U_r)$ графу $K_{m,m}$ будується для будь-якого значення ваги $\beta(\omega^*) \ne \infty$ ребра $(x_i, y_i)$ графу $H_{m,m}$.

Опишемо його побудову для ваги ребра, що визначається з матриці $\left[\beta_{ij}^0\right]_m$ таким чином:

$$\beta_{min} = max\left\{\max_i \min_i \beta_{ij}^0, \max_j \min_j \beta_{ij}^0\right\}.$$

По матриці $\left[\beta_{ij}^0\right]_m$ побудуємо матрицю $\left[\delta_{ij}^{(r)}\right]_m$, в якій

$$\delta_{ij}^{(r)} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \beta_{ij}^0 \le \beta_{min}, \\ 0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Матриця $\left[\delta_{ij}^{(r)}\right]_m$ відповідає головному підграфу $G_r = (X, Y, U_r)$ графу $K_{m,m}$.

Якщо для графу $G_r$ виконання процедури знаходження довершеного сполучення завершується його побудовою, то, ясна річ, $\beta(\omega^*) = \beta_{min}$. Інакше вибирається нове значення $\beta_{кр}^0 > \beta_{min}$, по матриці $\left[\beta_{ij}^0\right]_m$ визначається матриця $\left[\delta_{ij}^{(r+1)}\right]_m$ з елементами

$$\delta_{ij}^{(r+1)} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \beta_{ij}^0 \le \beta_{кр}, \\ 0, \text{ в іншому випадку,} \end{cases}$$

далі будується відповідний матриці $\left[\delta_{ij}^{(r+1)}\right]_m$ підграф $G_{r+1}=\left(X,Y,U_{r+1}\right)$, для якого знову виконується процедура побудови довершеного паросполучення.

Процедура, застосована до графу $G_r=\left(X,Y,U_r\right)$, містить наступні кроки [3]:

S1. $G_r=\left(X,Y,U_r\right)$ – дводольний граф, де $|X|=|Y|$; $\omega_0^{(r)}=\varnothing$ – пусте паросполучення; $l=0$.

S2. Якщо всі вершини з $X$ насичені у паросполученні $\omega_l^{(r)}$, то $\omega_l^{(r)}$ – довершене паросполучення у графі $G_r=\left(X,Y,U_r\right)$. Інакше вибрати будь-яку ненасичену вершину $V\in X$ і покласти $S\{V\},T=\varnothing$.

S3. Якщо Г(S)=Т, то граф $G_r=\left(X,Y,U_r\right)$ не містить довершеного паросполучення; вийти з процедури; інакше вибрати вершину $y\in\Gamma(S)-T$.

S4. Якщо $y$ – ненасичена в $\omega_l^{(r)}$, то перейти до кроку S5, інакше покласти $r$ – напарник $y$, $S=S\cup\{z\}$, $T=T\cup\{y\}$, після чого повернутися до кроку S3.

S5. Знайдено додаючий шлях Р. Покласти $\omega_{l+1}^{(r)}=\omega_l^{(r)}\oplus P$, $1=1+1$ і йти до кроку S2.

Дихотомічний пошук мінімуму функції, заданої на кінцевій множині елементів $\omega$, виконується у проміжку, який визначається її нижньою та верхньою границями.

Впорядкуємо по зростанню всі різні значення $b_s=\beta_{ij}^0$ матриці $\left[\beta_{ij}^0\right]_m$, починаючи з $\beta_{min}=b_1$:

$$b_1<b_2<\ldots<\ldots b_q=\beta_{max}^0<\infty .$$

Зрозуміло, що шукане значення $\beta(\omega^*)$ міститься у проміжку:

$$\beta_{min}^0=\beta_{min}-1<\beta\left(\omega^*\right)\le\beta_{max}^0<\infty .$$

Далі визначимо величину:

$$\Delta P=\min_{1\le S\le q}\left|\left(\beta_{min}^0+\beta_{max}^0\right)/2\right|,$$

відповідне їй значення $b_p$ і підграф $G_1=\left(X,Y,U_1\right)$, у якому вершини $x_i$ та $y_j$ поєднані ребром, якщо $\beta_{ij}^0\le b_p$.

Тепер вирішується $\beta^1$-задача $\left(\beta^1=b_p\right)$, що міститься в знаходженні довершеного паросполучення $\omega^1$ графу $G_1$. У випадку побудови $\omega^1$ покладемо $\beta_{min}^1=\beta_{min}^0,\beta_{max}^1=\beta^1$, в іншому випадку:

$$\beta_{min}^1=\beta^1,\ \beta_{max}^1=\beta_{max}^0,\ \beta_{min}^1<\beta\left(\omega^*\right)\le\beta_{max}^1 .$$

У загальному випадку на $r$-й ітерації методу дихотомії слід:

1) знайти величину $\beta^r=b_l$, відповідну

$$\Delta t=\min_S\left|b_s-\left(\beta_{min}^{r-1}+\beta_{max}^{r-1}\right)/2\right|,\ \beta_{min}^{r-1}<b_S<\beta_{max}^{r-1};\qquad(2)$$

2) визначити, чи існує довершене паросполучення $\omega^r$ у підграфі $G_r$, в якому вершина $x_i$ поєднана ребром з вершиною $y_i$, якщо $\beta_{ij}^0\le\beta^r$, $i,j=1,\ldots,m$;

3) змінити границі таким чином:

$$\beta_{min}^r=\begin{cases}\beta_{min}^{r-1}, & \text{якщо граф } G_r \text{ містить } \omega^r,\\ \beta^r, & \text{в іншому випадку;}\end{cases}$$

$$\beta_{min}^r=\begin{cases}\beta^r, & \text{якщо побудовано довершене паросполу4ення } \omega^r,\\ \beta_{max}^{r-1}, & \text{в іншому випадку.}\end{cases}$$

Кількість значень мінімізуючої функції $\beta(\omega)$ дорівнює числу різних значень матриці від $b_l$ до $b_q<\infty$. На кожній ітерації методу дихотомії проміжок, що містить шуканий мінімум, звужується за рахунок виключення з розглядання тих значень $b_S$, котрі:

а) менші значення, вибраного за формулою (2) і встановленого як нижня границя для чергової ітерації;

б) більші цього значення, прийнятого для чергової ітерації як верхня границя.

Процес пошуку $\omega^*$ завершується, коли з розгляду виключено всі значення $b_S$, $s = 1,\dots,q$. При цьому розв'язок існує, якщо для значення, вибраного за формулою (2), побудовано довершене паросполучення, і розв'язок не існує, якщо воно не побудовано для $\beta^0_{max}$.

Визначимо часову складність розв'язку задачі.

Число ітерацій $Q$ методу дихотомії у цьому випадку залежить від кількості різних значень $\beta^0_{ij}$, що задовольняють відношенням $\beta^0_{min} < \beta^0_{ij} \le \beta^0_{max}$ від величини $\beta^0_{max} - \beta^0_{min}$ і від взаємного розташування $b_S$ на відрізку $\left[\beta^0_{min}, \beta^0_{max}\right]$. Кількість різних значень $b_S$ не перевищує величини $n^2 - n$. Тоді число ітерацій $Q$ обмежено знизу й зверху таким чином:

$$-\left[-\log\left(n^2 - n\right)\right] \le Q \le n(n-1).$$

Відомо, що складність процедури побудови довершеного паросполучення оцінюється величиною $O\left(n^{5/2}\right)$. Час побудови довільного графа, для якого знаходиться довершене паросполучення, визначається як $O\left(n^2\right)$. Значить, трудомісткість виконання однієї ітерації пропорційна величині $n^{5/2} + n^2$ і оцінюється як $O\left(n^{5/2}\right)$. Час пошуку $\beta^0_{min}$ та $\beta^0_{max}$ визначається як $O(4n\log n)$, а для сортування значень $G_S$ треба виконати $O\left(n(n-1)\log\left(n^2 - n\right)\right)$ операцій. Таким чином, одержано наступний результат.

***Твердження.*** Задача $1\left|P_j = 1\right|f_{max}$ коректно вирішується за час $O\left(n^{9/2}\right)$.

Проілюструємо описані дії по знаходженню $\beta\left(\omega^*\right)$ для наведеної вище матриці $\left[\beta^0_{ij}\right]_5$.

Знаходимо:

$\beta_{min} = max\{5,\ 1,\ 5,\ 5,\ 5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 3\} = 5;\qquad \beta^0_{min} = 4$.

Впорядковуючи по зростанню всі різні значення матриці, починаючи з $\beta_{min}$, одержуємо: $b_1 = 5,\ b_2 = 6,\ b_3 = 7,\ b_4 = 8$. Таким чином, $\beta^0_{max} = 8$.

Тепер визначимо

$min\left\{\left|5 - (8+4)/2\right|, \left|6 - (8+4)/2\right|, \left|7 - (8+4)/2\right|, \left|8 - (8+4)/2\right|\right\} = min\{1,0,1,2\} = 0$.

Одержаному значенню відповідає величина $b_2 = 6$ та дводольний граф $G_1$.

Будемо вирішувати задачу побудови довершеного паросполучення з вагою $\beta\left(\omega^1\right) = 6$, виконуючи наступні дії:

S1. $\omega^{(1)}_0 = \varnothing,\ l = 0$.

S2. Вершина $x_l$ ненасичена; $S = \{x_l\},\ T = \varnothing$.

S3. $\Gamma(S) = \{y_4\}$, $\Gamma(S) \supset T$; вибираємо $y_4 \in \Gamma(S) - T = \{y_4\}$.

S4. Вершина $y_4$ ненасичена.

S5. Одержано додаючий шлях $P = \{(x_1, y_4)\}$. Покладемо

$$\omega^{(1)}_1 = \omega^{(1)}_0 \oplus P = \left(\varnothing - \{x_1, y_4\}\right) \cup \left(\{(x_1, y_4)\} - \varnothing\right) = \varnothing \cup \{(x_1, y_4)\} = \{(x_1, y_4)\}.$$

Аналогічні дії, виконані для вершини $x_2$, призводять до побудови паросполучення $\omega^{(1)}_2 = \{(x_1 y_4), (x_2, y_1)\}$.

Знову повторюємо дії процедури побудови довершеного паросполучення:

S1. $l = 3$.

S2. Вершина $x_3$ ненасичена, $S = \{x_3\},\ T = \varnothing$.

S3. $\Gamma(S) = \{y_4\} \supset T$.

S4. Вершина $y_4$ насичена в $\omega^{(1)}_2$; $x_1$ – напарник $y_4$ в $\omega^{(1)}_2$; $S = \{x_1, x_3\},\ T = \{y_4\}$.

S3. $\Gamma(S) = \{y_4, y_5\} \supset T$; вибираємо в $\Gamma(S) - T = \{y_5\}$ вершину $\{y_5\}$.

S4. Вершина $\{y_5\}$ ненасичена.

S5. Одержано додаючий шлях $P = \{(x_3, y_4), (x_4, y_1)(x_1, y_5)\}$.

Знаходимо $\omega_3^{(1)} = (P - \omega_2^{(1)}) \cup (\omega_2^{(1)} - P) = \{(x_3, y_4), (x_2, y_1), (x_1, y_5)\}$.

Тепер будемо будувати паросполучення, що містить чотири ребра.

S1. $l = 4$

S2. Вершина $x_4$ ненасичена, $S = \{x_4\}, T = \varnothing$.

S3. $\Gamma(S) = \{y_3, y_4\} \supset T$.

S4. Вершина $\{y_3\}$ ненасичена в $\omega_3^{(1)}$.

S5. Додаючий шлях $P = \{(x_4, y_3)\}$ та $\omega_4^{(1)} = \{(x_4, y_3), (x_3, y_4), (x_2, y_1), (x_1, y_5)\}$.

Наступні дії завершують процедуру побудови довершеного паросполучення.

S1. $l = 1$

S2. Вершина $x_5$ ненасичена, $S = \{x_5\}, T = \varnothing$.

S3. $\Gamma(S) = \{y_1, y_4\} \supset T$.

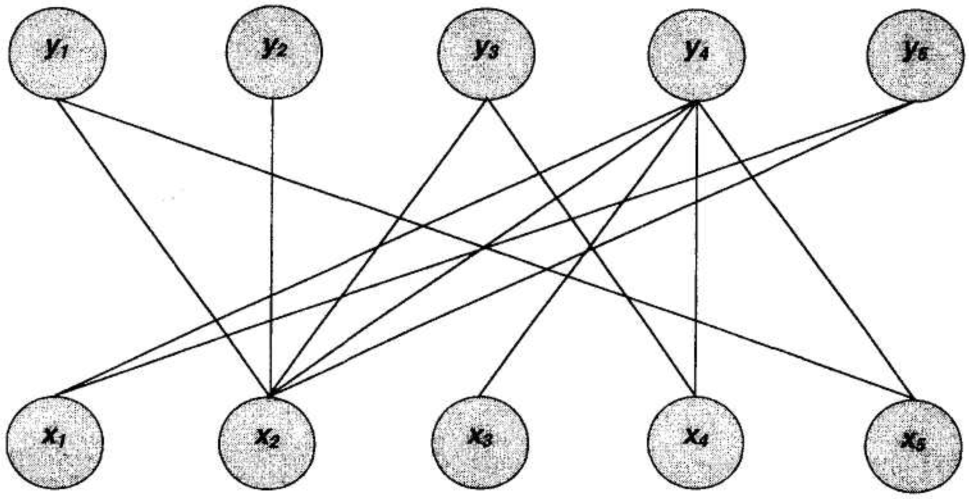
S4. Вершина $y_1$ насичена, $x_2$ – напарник $y_1$, $S = \{x_2, x_5\}, T = \{y_1\}$.

S3. $\Gamma(S) = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\} \supset T$; вибираємо в $\Gamma(S) - T$ будь-яку з вершин $\{y_2, y_3, y_4, y_5\}$, наприклад, $y_2$.

S4. Вершина $y_2$ ненасичена.

S5. Одержано додаючу путь $P = \{(x_5, y_1), (y_1, x_2), (x_2, y_2)\}$ та

$$\omega_5^{(1)} = \{(x_5, y_1), (x_2, y_2), (x_4, y_4), (x_3, y_4), (x_1, y_5)\}.$$




На наступній ітерації методу дихотомії встановлюємо $\beta_{min}^2 = \beta_{min}^1 = 4$, $\beta_{max}^2 = \beta_{max}^1 = 6$ і одержуємо $min|5 - (4 + 6) / 2| = 0$.

Визначимо, чи існує довершене сполучення з вагою, що дорівнює 5.

Після знаходження паросполучення $\omega_2^{(2)} = \{(x_1, y_4), (x_2, y_1)\}$ виконуються наступні дії:

S1. $l = 0$.

S2. $S = \{x_3\}$, $T = \varnothing$.

S3. $\Gamma(S) = \{y_4\}$, вибираємо $y_4$.

S4. Напарник вершини $y_4$ – вершина $x_1$, $S = \{x_3, x_1\}, T = \{y_4\}$.

S3. $\Gamma(S) = \{y_4\}$, $\Gamma(S) = T$; вихід з процедури.

Так, на кроці S3 виконується умова $\Gamma(S) = T$, а значить, не існує для даної матриці $\left[\beta_{ij}^{0}\right]_5$ довершеного паросполучення з вагою 5. Таким чином, $\beta\left(\omega^{*}\right) = 6$.

**ЛІТЕРАТУРА:**


1. *Сергиенко И.В., Рощин В.А.* О решении одной задачи целочисленного программирования специального вида // Оптимальное управление и методы оптимимзации. – 1996. – № 5. – С. 16–22.
2. *Шахбазян К.В., Лебединская Н.Б.* Эффективные методы оптимизации составления расписаний для одной машины (обзор) // Зап. Науч. Семинаров ЛОМИ АН СССР. Численные методы и вопросы организации вычислений. – 1981. – № 5. – С. 195–217.
3. *Свами М., Тхуласироман К.* Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, 1984. – С. 454.
4. *Данильченко А.М., Панишев А.В.* Дихотомический поиск решения одной задачи упорядочения // Кибернетика. – 1980. – № 2. – С. 118–121.



ПАНІШЕВ Анатолій Васильович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики Харківського автомобільно-дорожнього технічного університету.

Наукові інтереси:

- математичне моделювання;
- теорія розкладів та її застосування.

ПОДОЛЯКА Оксана Олександрівна – аспірант кафедри інформатики Харківського автомобільно-дорожнього технічного університету.

Наукові інтереси:

- математичне моделювання;
- теорія розкладів та її застосування.

ЧЕРНИЩУК Сергій – студент Харківського автомобільно-дорожнього технічного університету.

Наукові інтереси:

- математичне моделювання;
- теорія розкладів та її застосування.