А.О. Боярчук, Н.І. Бурау, Л.М. Гельман

НЕРУЙНІВНЕ ОЦІНЮВАННЯ ТРІЩИН НА ОСНОВІ ЧАСТОТИ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ВИРОБІВ

Проведені теоретичні дослідження основ низькочастотного акустичного методу вільних коливань для діагностики та неруйнівної оцінки відносних розмірів тріщин втомленості при зміні власної частоти коливань об'єкта діагностики. Отримані аналітичні залежності оцінки зміни власної частоти коливань і оцінки відносного розміру тріщини при використанні методу максимальної правдоподібності.

Для діагностики технічних пристроїв використовується низькочастотний акустичний метод вільних коливань, що полягає в ударному збудженні вільно згасаючих пружних коливань в об'єкті діагностики та аналізі параметрів акустичних коливань, що при цьому виникають [3]. Підгрунтям для використання даного методу є той факт, що за наявності дефектів та пошкоджень в контрольованому об'єкті змінюються параметри його вільних коливань. Однією з діагностичних ознак наявності пошкоджень в об'єкті може слугувати зміна власної частоти коливань [2]. Метою даної статті є теоретичне дослідження основ низькочастотного діагностичного методу вільних коливань для неруйнівної оцінки параметрів втомленісних тріщин в об'єкті (наприклад, в лопатках газотурбінних двигунів) по зміні власної частоти коливань.

Як модель об'єкта діагностики розглянемо коливальну систему з одним ступенем волі, яка складається з інерційного (маса m) та пружного (пружина) елементів у припущенні лінійної залежності між напругою та деформацією x в матеріалі об'єкта.

За наявності тріщини матеріал об'єкта матиме різні значення жорсткості при розтягу та стиску [3]: при стиску $(x < 0)$ матеріал поводить себе як суцільний і його жорсткість C_c дорівнює жорсткості матеріалу без тріщини: $C_c = C$; при розтягу $(x \geq 0)$ жорсткість матеріалу зменшується на величину ΔC: $C_p = C - \Delta C$, де C – жорсткість матеріалу без тріщини.

Відношення ΔC і C вважаємо таким, що дорівнює відношенню довжини тріщини Δl до розміру об'єкта l в напрямку тріщини:

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta l}{l}. \tag{1}$$

Відповідно до прийнятих позначень вільні коливання об'єкта з тріщиною будуть описуватись рівняннями:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_p^2 = 0, & x \geq 0; \\ \ddot{x} + \omega_c^2 = 0, & x < 0, \end{cases} \tag{2}$$

де $\omega_p^2 = {C_p}/{m}$; $\omega_c^2 = {C_c}/{m}$.

Для початкових умов $t = 0$; $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = V_0$ рішення рівняння (2), що відповідає одному періоду вільних коливань об'єкта з тріщиною, має вигляд:

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{V_0}{\omega_p} \sin \omega_p t, & 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{\omega_p}; \\ -\dfrac{V_0}{\omega_c} \sin \omega_c \left(t - \dfrac{\pi}{\omega_p} \right), & -\dfrac{\pi}{\omega_p} \leq t < 0, \end{cases} \tag{3}$$

де V_0 – швидкість початкового збудження.

Період вільних коливань об'єкта з тріщиною визначається з виразу:

$$T_0 = \frac{T_p}{2} + \frac{T_c}{2} = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

де $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_p}$; $T_c = \dfrac{2\pi}{\omega_c}$; $\omega_0 = \dfrac{2\omega_p \omega_c}{\omega_p + \omega_c}$;

ω_0 – власна частота коливань об'єкта з тріщиною.

Відношення частот ω_p і ω_c залежить від розміру тріщини Δl :

$$\frac{\omega_p}{\omega_c} = \sqrt{1 - \frac{\Delta l}{l}} = b. \tag{4}$$

У відповідності до (4) частота ω_0 вільних коливань об'єкта з тріщиною залежить від відносного розміру тріщини $\Delta l / l$:

$$\omega_0 = \frac{2b}{1+b}\omega_c, \tag{5}$$

а її відношення до частоти ω_c коливань об'єкта без тріщини спадає зі збільшенням відносного розміру тріщини (рис. 1).

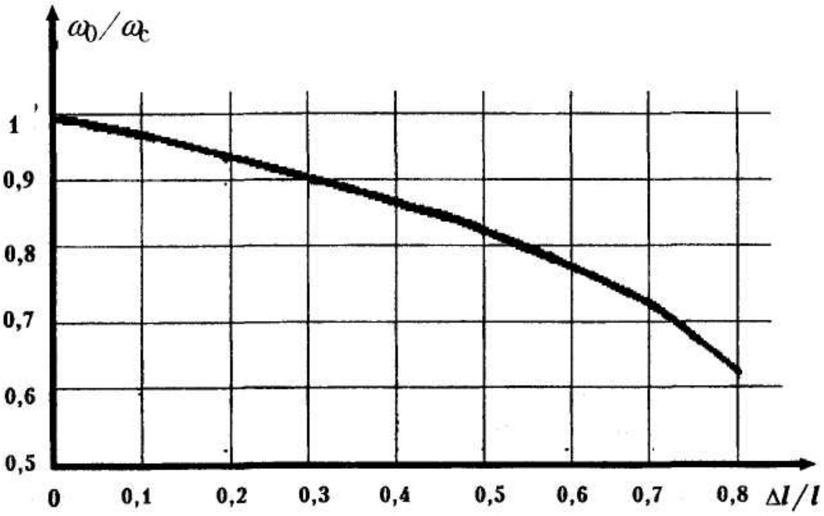

Рис. 1. Залежність відношення ω_0/ω_c від відносного розміру тріщини

На рис. 2 і рис. 3 наведені отримані експериментальним шляхом спектральні щільності металевих зразків відповідно за відсутності та наявності тріщини (відносний розмір тріщини – 0,3), з яких видно зменшення основної частоти власних коливань за наявності тріщини.

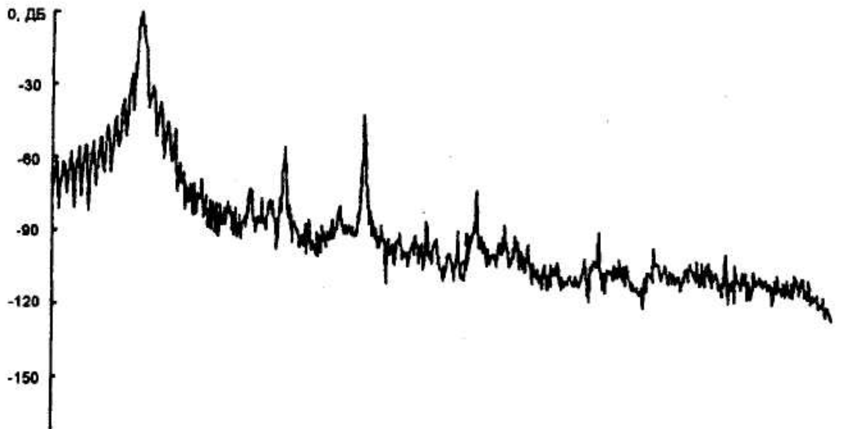

Рис. 2. Спектральна щільність за відсутності тріщини

Таким чином, зменшення частоти власних коливань об'єкта діагностики слугуватиме ознакою наявності тріщини і може бути використаним для оцінки її відносного розміру.

Для оцінки відносного розміру тріщини за зміненням власної частоти ω_0 рішення (3) доцільно представити у вигляді розкладання в ряд Фур'є за гармоніками основної частоти ω_0:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t, \tag{6}$$

де амплітуда k-ї гармоніки з урахуванням виразів (4) і (5) визначається у вигляді:

$$a_k = \frac{8V_0(1+b)^2(1-b^2)}{\pi\omega_0\left[(b+1)^2 - 4k^2\right]\left[(b+1)^2 - 4b^2k^2\right]} \cdot \cos\frac{\pi k}{b+1}. \tag{7}$$

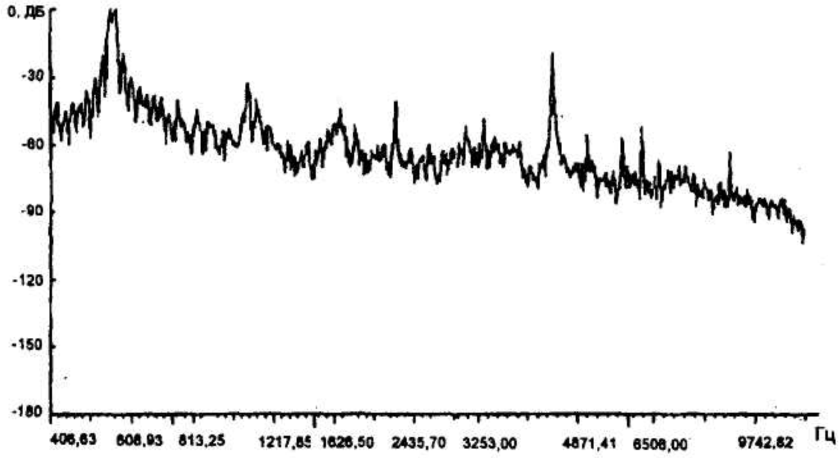

Рис. 3. Спектральна щільність за наявності тріщини

Відповідно до реальних умов вимірювань частоту ω_0 при i-му вимірюванні розглядатимемо як випадкову величину з нормальним законом розподілу.

$$f(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left[-\frac{(\omega_{0i} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{8}$$

У виразі (8) математичне очікування μ випадкової величини визначається виразом (5):

$$\mu = \frac{2b}{1+b}\omega_c, \tag{9}$$

а дисперсія частоти вузькосмугового процесу (6) при $k = 1$ у випадку прийому його на фоні адитивного білого шуму з однобічною спектральною щільністю $N_0/2$ відповідно до [4] і з урахуванням (7) матиме вигляд:

$$\sigma^2 = \left[\omega_c\sigma_0 \frac{b(b-1)(b+3)(3b+1)}{(b+1)^4 \cos\frac{\pi}{b+1}}\right]^2, \tag{10}$$

де $\sigma_0^2 = {3\pi^2}/{4\rho^2}$; $\rho^2 = {V_0^2\tau^2}/{N_0}$;

ρ^2 – відношення сигнал/шум;

τ – інтервал вимірювання.

Оцінку відносного розміру тріщини будемо проводити за методом максимуму правдоподібності [1], відповідно до якого для нормального закону розподілу (8) оцінка визначається рішенням рівняння:

$$\frac{\partial \ln L(\zeta)}{\partial\zeta} = \frac{\partial\sigma}{\partial\zeta}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{\omega}_{0i} - \mu)^2}{\sigma^2} - n\right] + \frac{\partial\mu}{\partial\zeta}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\omega}_{0i} - n\mu}{\sigma}\right] = 0, \tag{11}$$

де $\zeta = \Delta l/l$;

$L(\zeta)$ – функція правдоподібності;

$\hat{\omega}_{oi}$ – оцінка частоти власних коливань об'єкта з тріщиною, що визначається при i-му вимірюванні.

Рішення рівняння (11) щодо відношення оцінок частот $\hat{\omega}_o$ і $\hat{\omega}_c$ в області додатних частот при $n = 1$ має вигляд:

$$\frac{\hat{\omega}_0}{\hat{\omega}_c}(\zeta) = -P_1(\zeta) + \left[P_1^2(\zeta) - P_2(\zeta)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

де

$$P_1(\zeta) = 0.5\sigma \cdot \frac{\partial\mu}{\partial\zeta} \cdot \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\zeta}\right)^{-1} - \mu;$$

$$P_2(\zeta) = \mu^2 - \sigma^2 - \mu\sigma\frac{\zeta\mu}{\partial\zeta}.$$

На рис. 4 наведені графіки залежності відношення оцінок (12) від відносного розміру тріщини, які показують, що при збільшенні співвідношення сигнал/шум оцінка $\hat{\omega}_o$ власної частоти коливань об'єкта з тріщиною наближується до кривої математичного очікування.

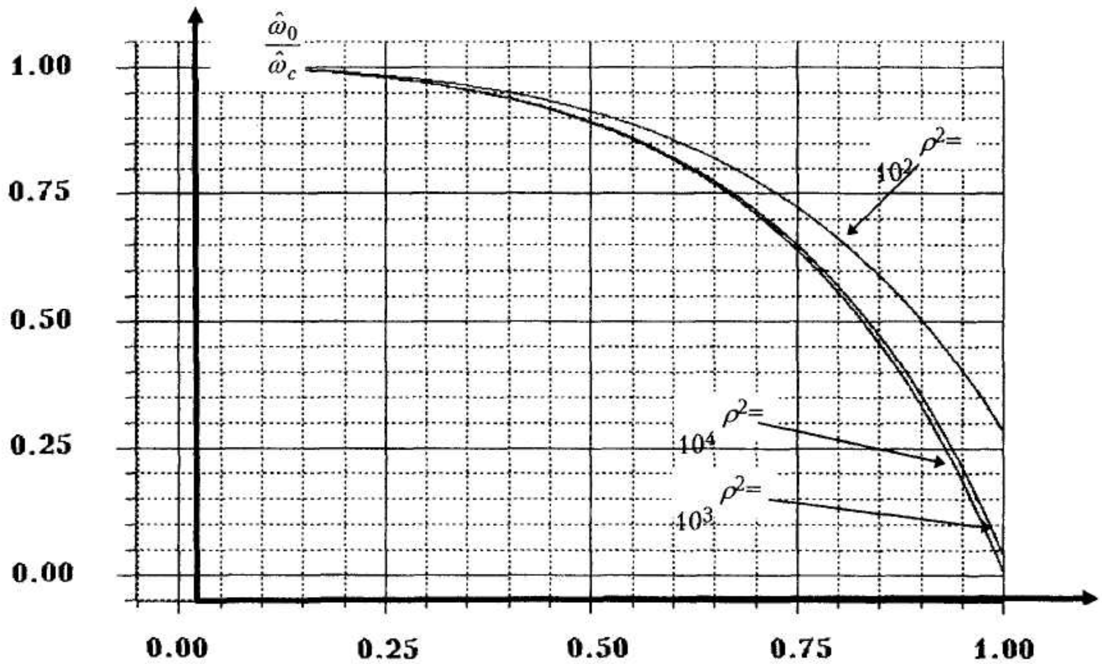

Рис. 4. Залежності відношення оцінок $\hat{\omega}_0/\hat{\omega}_c$ *від відносного розміру тріщини* ζ

Для малих значень відносного розміру тріщини ($\zeta \leq 0,1$), апроксимуючи вирази (9) і (10) поліномами першого порядку, відповідно:

$$\mu = \omega_c(1 + k_1\zeta); \qquad \sigma = \sigma_0\omega_c(1 + k_2\zeta)$$

рішення рівняння (11) відносно φ являтимуть собою вирази для оцінки відносного розміру тріщини:

$$\hat{\zeta}_{1,2} = \frac{-f_1\left(\frac{\hat{\omega}_0}{\hat{\omega}_c}\right) \pm \left[f_1^2\left(\frac{\hat{\omega}_0}{\hat{\omega}_c}\right) - 4f_2\left(\frac{\omega_0}{\hat{\omega}_c}\right)f_3\left(\frac{\hat{\omega}_0}{\hat{\omega}_c}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{2f_2\left(\frac{\hat{\omega}_0}{\hat{\omega}_c}\right)}, \tag{13}$$

де

$$f_1\left(\frac{\hat{\omega}_0}{\hat{\omega}_c}\right) = nk_1(k_2 - k_1) - k_1k_2\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{\omega}_{oi}}{\hat{\omega}_c} - 2\pi\sigma_0{}^2k_2^2;$$

$$f_2\left(\frac{\hat{\omega}_0}{\hat{\omega}_c}\right) = -n\sigma_0^2k_2^3;$$

$$f_1\left(\frac{\hat{\omega}_0}{\hat{\omega}_c}\right) = k_2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\hat{\omega}_{oi}}{\hat{\omega}_c}\right)^2 + (k_1 - 2k_2)\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{\omega}_{oi}}{\hat{\omega}_c} + n(k_2 - k_1) - nk_2\sigma_0^2.$$

Вираз (13) буде слугувати для неруйнівної оцінки відносного розміру тріщини в лопатках газотурбінних двигунів за вимірювання та оцінки власної частоти коливань лопатки.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. Том I, Нью-Йорк, 1968 / Пер. с англ., под ред. проф. В.И. Тихонова. – М.: Советское радио, 1972. – 744 с.
2. *Bouraou N.I., Gelman L.M.* "Theoretical Bases of Free Oscillation Method for Acoustical Non-Destructive Testing". In Proceedings of the 1997 National Conference on Noise Control Engineering, State College, Pennsylvania, Book 1, 1997. – 553 p.
3. *Карасев В.А., Ройтман А.Б.* Доводка эксплуатируемых машин. Вибродиагностические методы. – М.: Машиностроение, 1986. – 192 с.
4. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – М.: Советское радио, 1966. – 678 с.

БОЯРЧУК Анатолій Олексійович – студент Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут".

– неруйнівний контроль та оцінювання.

БУРАУ Надія Іванівна – доцент Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут".

Наукові інтереси:

– обробка сигналів;
– віброакустичні методи діагностики;
– неруйнівний контроль та оцінювання.

ГЕЛЬМАН Леонід Мусійович – професор Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут".

Наукові інтереси:

– обробка сигналів;
– віброакустичні методи діагностики;
– адаптивні системи;
– неруйнівний контроль та оцінювання.