УДК 519.852

А.О. Данильченко, асист.
Житомирський державний технологічний університет

ТОЧНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПАРОСПОЛУЧЕННЯ ЗІ ЗНИКАЮЧИМИ ДУГАМИ

(Представлено д.т.н., проф. Панішевим А.В.)

В статті розглянуто задачу складання розкладу проходження процедур пацієнтами санаторію. Розроблено оптимальний алгоритм її розв'язку як розширеної задачі пошуку максимального паросполучення у дводольному графі зі зникаючими дугами. Запропонований точний алгоритм має меншу обчислювальну складність порівняно з методом повного перебору за рахунок скорочення кількості паросполучень, що аналізуватимуться.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Призначення процедур у сучасних санаторних та лікувальних закладах є складним процесом, що повинен враховувати досить велику кількість факторів, основними з яких є [1, 2]:

- перелік призначених лікарем процедур;
- час роботи процедурного кабінету;
- пропускна здатність процедурного кабінету (одну процедуру одночасно можуть приймати декілька пацієнтів);
- тривалість прийому процедури (для різних процедур тривалість її прийому різна);
- тривалість часу технічної перерви між прийомами процедур;
- сумісність процедур (пацієнт не може одночасно приймати декілька процедур, але, крім цього, на розклад накладається додаткове обмеження – пацієнт не може приймати наступну процедуру менш ніж через деякий час після прийняття попередньої, для кожної пари процедур значення часу сумісності може різнитися).

Зрозуміло, що вказана конкретна ситуація може бути поширена на велику кількість споріднених задач складання оптимальних розкладів за наявності деякої множини обмежень. Наприклад, розподіл за часом обмежених ресурсів, призначення виконання різних видів робіт (операцій, завдань, процесів).

Такі задачі розв'язуються математичним апаратом теорії розкладів – розділу прикладної математики, що вивчає моделі упорядкування робіт та методи складання розкладів. При розв'язанні цього класу задач застосовують різні методи комбінаторної оптимізації [3]. Але наявність додаткових обмежень суттєво ускладнює їх розв'язання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Аналіз літератури показав, що задача складання оптимального розкладу може бути розв'язана за допомогою теорії графів, зокрема шляхом модифікації (а саме врахуванням додаткових обмежень) класичної задачі про паросполучення, варіанти рішення якої в різних постановках наведено в [4–6].

У статті [1] розглянуто задачу складання розкладу проходження процедур пацієнтами санаторію. Сформульована задача зведена до розширеної задачі пошуку максимального паросполучення у дводольному графі. Розроблено оптимальний алгоритм її розв'язку.
Із NP-повноти задачі «Про паросполучення зі зникаючими дугами», яка доведена в [1], слідує, що вона не піддається ефективним точним методам рішення [7–8].

Відомо, що будь-яка NP-повна задача може бути розв'язана методом повного перебору. Але при цьому, залежно від розмірності задачі, потрібні обчислювальні ресурси та час її розв'язання можуть бути неприпустимо великими з практичної точки зору [9].

Для оптимізації процесу повного перебору застосовують метод гілок та меж, який дозволяє зменшувати множину допустимих рішень за допомогою ефективного алгоритму пошуку, а також розпаралелювання обчислень. Слід зазначити, що для методу гілок та меж найбільшу складність мають саме процедура розгалуження та процедура знаходження оцінок верхніх і нижніх меж для оптимального значення на підмножині припустимих рішень.

Розпаралелювання обчислень не звужує кількість варіантів, що аналізуються, а лише скорочує потрібний на це час [3].

Таким чином, єдиною доцільною схемою зменшення обчислювальної складності знаходження точного рішення NP-повних задач залишається скорочення повного перебору.

Метою статті є розробка точного алгоритму розв’язання задачі про паросполучення зі зникаючими дугами, який згідно із запропонованою математичною моделлю повинен забезпечити:

- меншу обчислювальну складність порівняно з методом повного перебору за рахунок скорочення кількості паросполучень, що аналізуватимуться;
- гарантоване знаходження найбільшого паросполучення, що відповідає заданим обмеженням.

Викладення основного матеріалу. Задано дводольний граф $G = (X, Y, E)$, в якому X – множина вершин графа, що відповідають всім можливим проміжкам прийому процедур (згідно з встановленим графіком роботи відповідного процедурного кабінету) $||X|| = m$; Y – множина вершин графа, які відповідають процедурам, що призначені пацієнтам санаторія, $||Y|| = n$ (при цьому кожна вершина множини Y має ознаку приналежності до певного пацієнта); E – множина ребер графа. Ребро $(x_i, y_k) \in E$, $x_i \in X$, $y_k \in Y$, $i = 1...m$, $k = 1...n$ в тому випадку, коли процедура y_k може бути призначена для прийому визначеним пацієнтом у проміжок часу x_i.

Відомі обмеження задані множиною слідств C таких, що $(x_i, y_j) \to C_{i,j} = \{(x_{i_1}, y_{j_1}),...,(x_{i_k}, y_{j_k})\}$. Ці обмеження враховують, насамперед, неможливість призначення однієї й тієї ж процедури різним пацієнтам на однаковий час (з урахуванням пропускної здатності процедурного кабінету), а також сумісніть процедур. Крім того, можливо врахувати, за необхідності, й деяку послідовність прийняття процедур (наприклад, деяка процедура повинна обов’язково передувати заданій множині інших процедур) тощо.

Скорочення кількості паросполучень, що аналізуватимуться, може бути досягнуто за рахунок врахування слідств $C_{i,j}$ при обранні деякого паросполучення (x_i, y_j) на кожному з послідовних кроків алгоритму. Тоді при обранні будь-якої дуги (x_i, y_j) для включення її до множини паросполучень на ітерації t множина ребер графа для подальшого аналізу може бути виражена як $E^{t+1}\big|_{(x_i, y_j)} = E^t - C_{i,j}$. При цьому отримаємо по кожній з ітерацій множину E^{t+1} меншої потужності, що й звужує область аналізу порівняно з методом повного перебору.

Для гарантованого знаходження найбільшого паросполучення M в алгоритмі, що розробляється, необхідно реалізувати послідовний перебір всіх можливих варіантів побудови паросполучень на заданому графі $G = (X, Y, E)$ з урахуванням заданих обмежень C. З цією метою потрібно організувати цикл по всіх вершинах множини Y та вкладений цикл по підмножині інцидентних поточній вершині y_i дуг.

Достатньою умовою оптимальності знайденого варіанта розв’язання задачі буде виконання рівності $||M|| = ||Y||$. При знаходженні такого найбільшого паросполучення виконання алгоритму може бути завершено. Необхідною умовою оптимальності знайденого варіанта розв’язання задачі є виконання умови $||M|| = \max$, тобто знаходження паросполучення M максимальної потужності. Якщо по закінченні циклу перебору всіх вершин множини Y достатня умова оптимальності не виконується, то при заданих обмеженнях може бути знайдено оптимальне рішення, яке забезпечить призначення найбільшої можливої кількості (але не всіх призначених) процедур при заданих обмеженнях.

Оптимальний алгоритм розв’язання задачі про паросполучення зі зникаючими дугами (рис. 1) містить наступні кроки:

1. Будуємо дводольний граф $G = (X, Y, E)$, в якому X – множина вершин графа, що відповідають можливим проміжкам прийому процедур $||X|| = m$; Y – множина вершин графа, які відповідають процедурам, що призначені пацієнтам санаторія, $||Y|| = n$; P – множина пацієнтів; E – множина ребер графа. Ребро $(x_i, y_k) \in E$, $x_i \in X$, $y_k \in Y$, $i = 1...m$, $k = 1...n$ в тому випадку, коли процедура пацієнта y_k може бути призначена для прийому в проміжок часу x_i. Задані відношення слідства $C_{i,j}$. Множина ребер, що належать максимальному паросполученню $M = \varnothing$. Нехай $k = q$, $q = 1$.

2. Послідовно перебираємо, починаючи з $k = q$ вершини множини Y. Якщо всі вершини були обрані, перехід до пункту 5.

3. Для вершини y_k послідовно досліджуємо ребра $(x_i, y_k) \in E$, $i = 1...m$. Нехай знайдено деяке ребро $(x_i, y_k) \in E$, $y_k \in P_j$, претендент на включення до M, тобто жодна з вершин x_i та y_k не інцидентна ребрам, що вже належать паросполученню M. Враховуємо задані обмеження, для чого тимчасово виключаємо з графа $G = (X, Y, E)$ дуги, $(x_i, y_k) \to C_{i,k}$.

4. Перевіряємо наявність дуг $(x_i, y_r) \in E$, $x_i \in X$, $y_r \in Y$, $i = 1...m$, $r = k + 1...n$, тобто інцидентних наступним вершинам у множині Y (ще є процедури, для яких не призначено час їх проходження).

Якщо по кожній з цих вершин є хоча б одна інцидентна їй дуга, то $M = M \cup (x_i, y_k)$. Якщо $k = n$, перехід до пункту 2. Інакше $k = k + 1$ і переходимо до пункту 3.

В іншому випадку (немає інцидентних дуг, тобто неможливо призначити час для всіх процедур) включаємо до графа $G = (X, Y, E)$ дуги, $(x_i, y_k) \to C_{i,k}$ та шукаємо наступне ребро: якщо $i = m$, перехід до пункту 2; інакше $i = i + 1$ і переходимо до пункту 3.

5. Перевіряємо, що у знайденому паросполученні присутні всі призначені процедури. Якщо $||M|| = n$, то рішення знайдене, кінець алгоритму. Якщо $||M|| \neq n$, то $q = q + 1$. Якщо $q < n$, перехід до пункту 2. Інакше – обрати зі знайдених рішень паросполучення максимальної потужності.

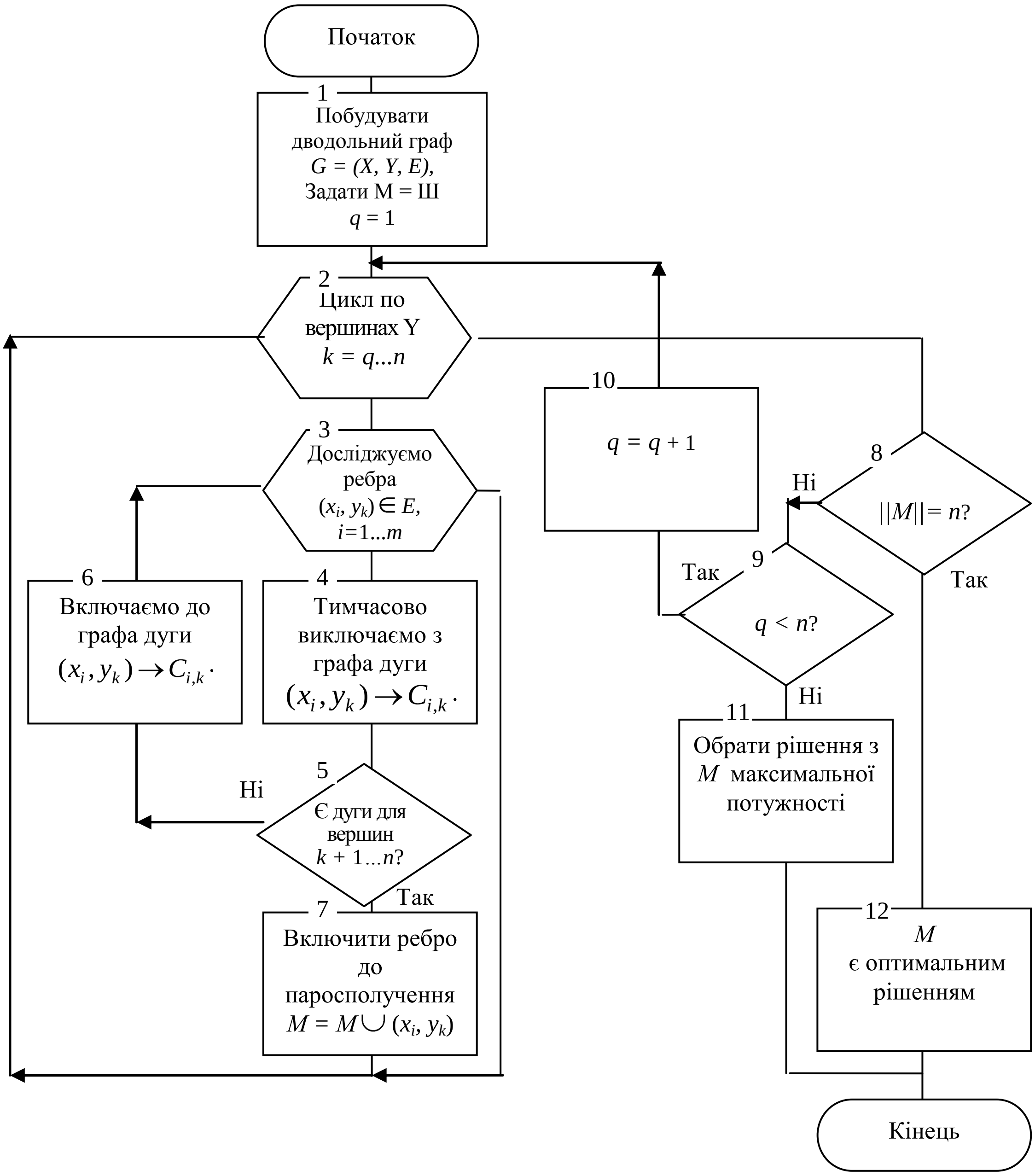

Рис. 1. Схема оптимального алгоритму розв'язання задачі про паросполучення зі зникаючими дугами

Розглянемо приклад. Крок 1 (рис. 2, *а*). Побудований дводольний граф $G = (X, Y, E)$ містить множину вершин графа, що відповідають можливим проміжкам прийому процедур X = {9.30–10.30; 11.00–12.00; 12.30–13.30; 9.30–10.00; 11.00–11.30; 12.30–13.00}, $||X|| = 6$; множину вершин графа, які відповідають процедурам, що призначені пацієнтам санаторію $Y = \{1_1; 2_1; 1_2\}$, $||Y|| = 3$; E – множину ребер графа, які відповідають випадку, коли процедура пацієнта y_k може бути призначена для прийому в проміжок часу x_i.

Введемо обмеження:

- неможливість призначення однієї і тієї ж процедури різним пацієнтам на однаковий час;
- друга процедура не може назначатися після першої раніше ніж через 1 годину.

Задані обмеження визначимо множиною слідств C таких, що $(x_i, y_j) \to C_{i,j} = \{(x_{i_1}, y_{j_1}),...,(x_{i_k}, y_{j_k})\}$:

$$(x_1, y_1) \to C_{1,1} = \{(x_1, y_3),(x_2, y_1),(x_3, y_1),(x_4, y_1),(x_5, y_1)\};$$

$$(x_2, y_1) \to C_{2,1} = \{(x_2, y_3),(x_1, y_1),(x_3, y_1),(x_5, y_2),(x_6, y_2)\};$$

$$(x_3, y_1) \to C_{3,1} = \{(x_3, y_3),(x_1, y_1),(x_2, y_1),(x_6, y_2)\};$$

$$(x_4, y_2) \to C_{4,2} = \{(x_5, y_2),(x_6, y_2),(x_1, y_1)\};$$

$$(x_5, y_2) \to C_{5,2} = \{(x_4, y_2),(x_6, y_2),(x_1, y_1),(x_2, y_1)\};$$

$$(x_6, y_2) \to C_{6,2} = \{(x_4, y_2),(x_5, y_2),(x_2, y_1),(x_3, y_1)\};$$

$$(x_1, y_3) \to C_{1,3} = \{(x_2, y_3),(x_3, y_3),(x_1, y_1)\};$$

$$(x_2, y_3) \to C_{2,3} = \{(x_1, y_3),(x_3, y_3),(x_2, y_1)\};$$

$$(x_3, y_3) \to C_{3,3} = \{(x_1, y_3),(x_2, y_3),(x_3, y_1)\}.$$

Множина ребер, що належать максимальному паросполученню M = Ø. Нехай $k = q$, $q = 1$.

Крок 2. Беремо вершину y_1. Вона відповідає призначенню першої процедури для першого пацієнта.

Крок 3. Починаємо послідовне дослідження інцидентних вершині y_1 дуг. Беремо перше ребро (9.30–10.30, 1_1).

Тимчасово виключаємо з графа $G = (X, Y, E)$ дуги: (11.00–12.00, 1_1), (12.30–13.30, 1_1), (9.30–10.30, 2_1) – за умови неможливості призначення однієї і тієї ж процедури різним пацієнтам на однаковий час; (9.30–10.00, 1_2), (11.00–11.30, 1_2) – за умови призначення другої процедури після першої не раніше ніж через 1 годину.

Крок 4. Перевіряємо на отриманому графі (рис. 2, *б*) наявність дуг $(x_i, y_r) \in E$, $x_i \in X$, $y_r \in Y$, $i = 1...m$, $r = k + 1...n$, тобто інцидентних наступним вершинам у множині Y (ще є процедури, для яких не призначено час їх проходження).

Оскільки по кожній з цих вершин (y_2, y_2) є інцидентні їм дуги, то $M = M \cup$ (9.30–10.30, 1_1), $k = k + 1$ і переходимо до пункту 3.

Крок 5. ($k = 2$) Беремо вершину y_2. Ця вершина відповідає призначенню другої процедури першому пацієнту. Починаємо дослідження інцидентних їй дуг.

Крок 6. Беремо ребро (12.30–13.00, 1_2).

Виключення дуг із графа $G = (X, Y, E)$ в даному випадку проводити непотрібно.

Крок 7. Перевіряємо на отриманому графі наявність дуг $(x_i, y_r) \in E$, $x_i \in X$, $y_r \in Y$, $i = 1...m$, $r = k + 1...n$, тобто інцидентних наступній вершині (2_1).

Оскільки для неї є більш ніж одна інцидентна дуга (рис. 2, *в*), то $M = M \cup$ (12.30–13.00, 1_2), $k = k + 1$ і переходимо до пункту 3.

Крок 8. ($k = 3$) Беремо вершину y_3. Ця вершина відповідає призначенню першої процедури для другого пацієнта. Починаємо дослідження інцидентних їй дуг.

Крок 9. Беремо ребро (11.00–12.00, 2_1).

Тимчасово виключаємо з графа $G = (X, Y, E)$ дугу (12.30–13.30, 2_1).

Крок 10. Наступних вершин у множині Y немає.

$M = M \cup$ (11.00–12.00, 2_1) (рис. 2, *г*), переходимо до пункту 2.

Крок 11. Оскільки всі вершини у множині Y були обрані, перехід до пункту 5.

Крок 12. Перевіряємо, що у знайденому паросполученні присутні всі призначені процедури.

Оскільки $||M|| = 3$, то оптимальне рішення при заданих обмеженнях знайдене, кінець алгоритму.

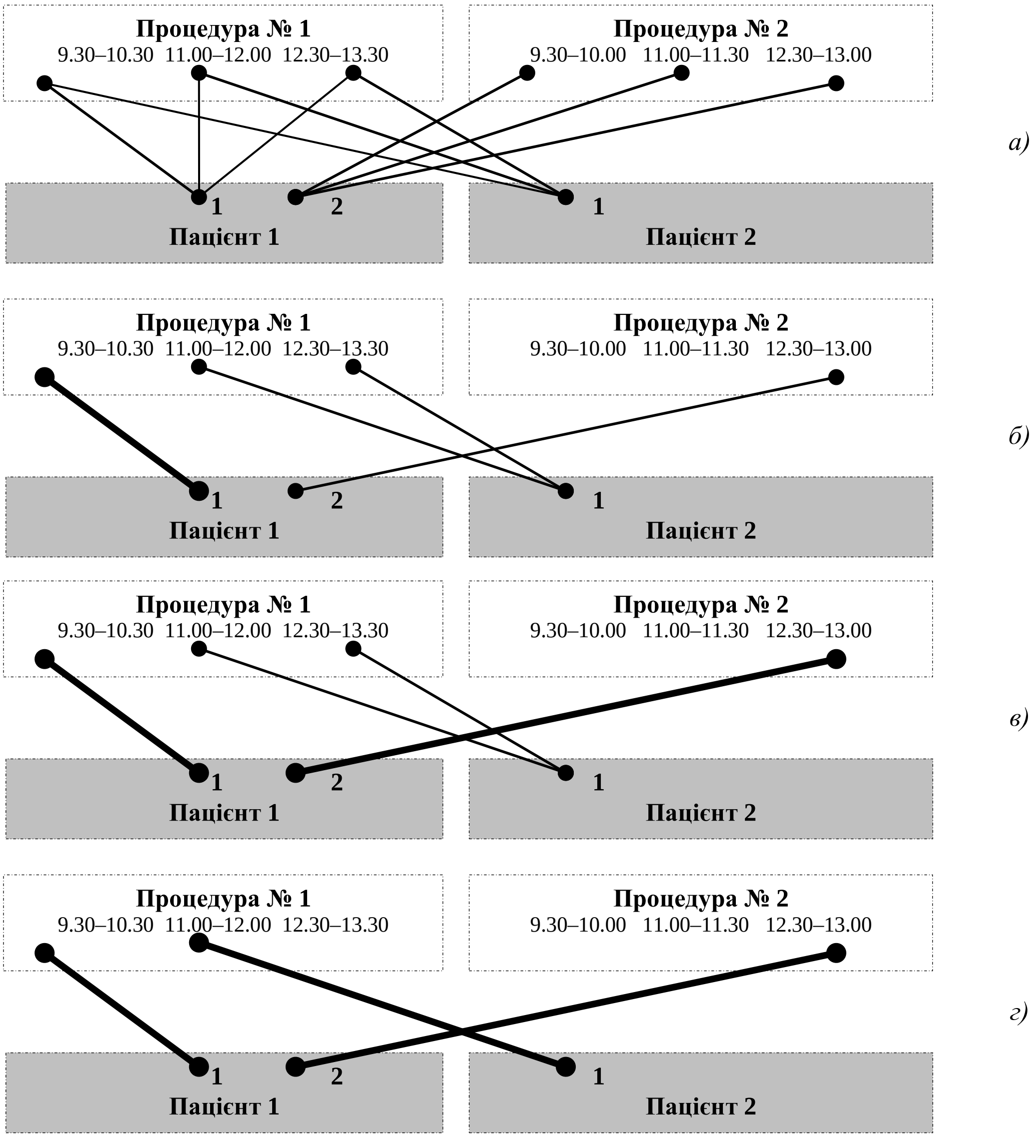

Рис. 2. Розв'язання задачі про максимальні паросполучення зі зникаючими дугами за оптимальним алгоритмом

Треба зазначити, що кожна процедура має деяку пропускну здатність, тобто на один проміжок часу може призначатися кільком пацієнтам одночасно. Для виконання цієї умови слід для кожного проміжку часу кожної процедури ввести додатково відповідну кількість вершин (рис. 3).

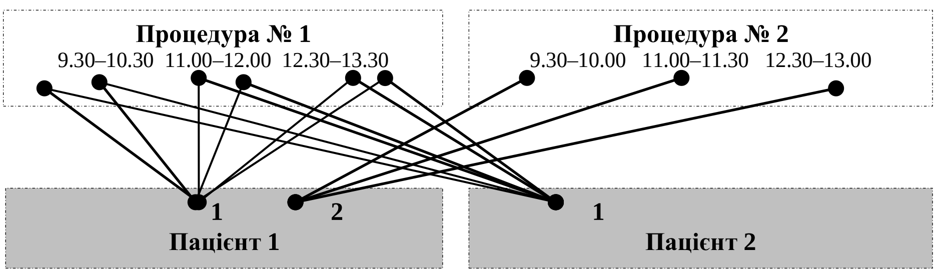

Рис. 3. Приклад побудови дводольного графа

Висновок. Автором запропоновано алгоритм розв'язання задачі про паросполучення зі зникаючими дугами, який має меншу обчислювальну складність порівняно з методом повного перебору за рахунок скорочення кількості паросполучень, що аналізуються та гарантовано знаходить найбільше паросполучення, що відповідає заданим обмеженням.

Перспективним напрямком подальших досліджень є розв'язання задачі складання розкладу іншими відомими методами (гілок та меж, генетичним алгоритмом та мурашиним алгоритмом), а саме, їх модифікація з метою врахування заданих обмежень та порівняння з методом, що запропонований.

Список використаної літератури:

1. *Данильченко А.М.* Задача про паросполучення зі «зникаючими» дугами. Доведення NP- повноти / *А.М. Данильченко, А.В. Панішев, А.А. Данильченко* // Моделювання та інформаційні технології. – Вип. 63. – К., 2012. – С. 75–81.
2. *Данильченко А.М.* Задача о паросочетании с «исчезающими" дугами» / *А.М. Данильченко, А.В. Панишев, А.А. Данильченко* // Труды IX Междунар. науч.-практ. конф. «Современные информационные и электронные технологии». – Одеса, 2011. – Т. 1. – С. 31.
3. *Данильченко О.М.* Розв'язання одного класу задач складання розкладів генетичними алгоритмами на кластерних системах / *О.М. Данильченко, А.В. Панішев, А.О. Ібрагім* // Вісник ЖІТІ. – 2004. – № 4. – С. 130–135.
4. *Пантелеев А.В.* Методы оптимизации в примерах и задачах / *А.В. Пантелеев, Т.А. Летова*. – М. : Высшая школа, 2005. – 544 с.
5. *Кормен Т.Х.* Алгоритмы для работы с графами / *Т.Х. Кормен*. – 2-е изд. – М. : Вильямс, 2006. – 1296 с.
6. *Босс В.А.* Перебор и эффективные алгоритмы / *В.А. Босс*. – К. : Изд-во ЛКИ, 2008. – 216 с.
7. *Харари Ф.* Теория графов / *Ф.Харари* ; пер. с англ. и предисл. *В.П. Козырева* ; под ред. *Г.П. Гаврилова*. – 2-е изд. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.
8. *Пападимитриу Х.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / *Х.Пападимитриу, К.Стайглиц*. – М. : Мир, 1985. – 512 с.
9. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах / *И.Л. Акулич*. – СПб. ; М. : Лань, 2011. – 185 с.

ДАНИЛЬЧЕНКО Анна Олександрівна – асистент кафедри інформатики та комп'ютерного моделювання Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
- теорія розкладів;
- паралельні обчислювання;
- бази даних.

Стаття надійшла до редакції 24.10.2012