П.І. Когут, С.В. Северенчук

S-УСЕРЕДНЕННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ І ПИТАННЯ ДВОЇСТОСТІ

Вирішені проблеми розробки перетворення Фенхеля S-усереднення для класу задач оптимального керування в банаховому просторі.

Аналіз численних публікацій, що стосуються проблем усереднення задач оптимального керування, дозволяє виділити дві самостійні методики їх дослідження. В одному випадку автори застосовують, так звану, пряму схему для знаходження усередненої задачі, коли усередненню підлягає кожне із співвідношень в початковій математичній моделі. В іншому випадку – апарат усереднення застосовується безпосередньо до необхідних умов оптимальності. Оскільки зазначені відмінності у методиках не мають свого формального обгрунтування, то залишається відкритим питання: яку методику варто покласти в основу при усередненні конкретних задач керування? Будемо виходити з того, що усереднена задача повинна мати "стійкі" варіаційні властивості, тобто сукупність оптимальних чи субоптимальних характеристик у вихідних задачах повинна збігатися (в деякій топології) до оптимальних характеристик для усередненої задачі. Нехтування даною обставиною є однією з основних причин неузгодженості зазначених вище методик. Відомо, що більшість задач оптимального керування можна записати як задачі умовної мінімізації деяких функціоналів на множині допустимих пар. Тоді для формального тлумачення такого поняття процес усереднення, при якому зберігаются зазначені вище варіаційні властивості, можна скористатися апаратом S-збіжності [2–4].

У даній роботі основним об'єктом досліджень виступають опуклі задачі умовної мінімізації. Оскільки такі об'єкти допускають двоїстий опис, то виникає закономірне питання: чи буде перехід від початкової множини задач до відповідної направленості двоїстих задач неперервним відносно варіаційної S-збіжності? Як показано нижче, в загальному випадку це не так, тобто S-граничні задачі для вихідної і спряженої множини задач не будуть взаємно двоїстими. Разом з тим, структура двоїстої задачі до S-граничної буде суттєво залежати від вибору топології, в якій розглядається варіаційна S-збіжність.

Нехай X – довільний банаховий простір, X^* – його топологічно спряжений. Нехай далі τ – локально опукла топологія на X, що узгоджена з двоїстістю, A – впорядкована множина індексів, що направлена за зростанням. Будемо вважати, що в X задана направленість підмножин $\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$, для якої нижня топологічна границя $\tau - LiX_\alpha$ є непустою. Розглянемо узгоджену з $\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ направленість функцій $\left\{F^\alpha : X_\alpha \to \overline{R}\right\}_{\alpha\in A}$ та відповідну їй направленість задач умовної мінімізації

$$\left\{\left\langle \inf_{x\in X_\alpha} F^\alpha(x)\right\rangle, \alpha\in A\right\} \qquad \left(P_\alpha\right). \tag{1}$$

Множину задач (1) пропонується разглядати как сукупність об'єктів $\left\langle \inf_{x\in X_\alpha} F^\alpha(x)\right\rangle$, кожний з яких однозначно визначається парою $\left\langle F^\alpha, X_\alpha\right\rangle$. Нижні грані в задачах P_α будемо позначати як $\inf P_\alpha$. По аналогії з [6], задачу P_α будемо називати нетривіальною, якщо знайдеться елемент $x_\alpha^0 \in X_\alpha$ такий, що $F^\alpha\left(x_\alpha^0\right) < +\infty$.

Як зазначено в [2–4], довільній направленості задач (1) можна поставити у відповідність дві граничні задачі

$$\left\langle \inf_{x\in \tau - LsX_\alpha} \tau - li_s F^\alpha(x)\right\rangle, \quad \left\langle \inf_{x\in \tau - LiX_\alpha} \tau - ls_s F^\alpha(x)\right\rangle, \tag{2}$$

які відповідно будемо називати нижньою та верхньою варіаційною S-границями направленості (1). Тут через $\tau - li_s F^\alpha : \tau - Ls\, X_\alpha \to \overline{R}$, $\tau - ls_s F^\alpha : \tau - Li\, X_\alpha \to \overline{R}$ позначено нижню та верхню

S-границі направленості функцій $\left\{F^\alpha : X_\alpha \to \overline{R}\right\}_{\alpha \in A}$. Якщо для сукупності множин $\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha \in A}$ існує топологічна границя $\tau - LmiX_\alpha$, тобто $\tau - LiX_\alpha = \tau - LsiX_\alpha$ і на множині $\tau - LmiX_\alpha$ виконується рівність $\tau - Li_S F^\alpha = \tau - Ls_S F^\alpha$, то S-граничні задачі (2) співпадають, отже для направленості (1) існує в τ-топології абсолютна варіаційна S-границя

$$\left\langle \inf_{x \in \tau - LmX_\alpha} \tau - lm_s^\alpha F^\alpha(x) \right\rangle. \tag{3}$$

Розглянемо питання про побудову двоїстої задачі до варіаційної S-границі (3). Для цього розглянемо два інших банахових простори Y та Y^*, що знаходяться в двоїстості відносно білінійної форми $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$. Виділимо в Y довільну підмножину M, що містить нульовий елемент, і яку будемо називати множиною збурень для кожної із задач P_α. Покладемо $Z_\alpha = X_\alpha M$ і розглянемо функцію $\Phi^\alpha : Z_\alpha \to \overline{R}$ таку, що

$$\Phi^\alpha(x,0) = F^\alpha(x),\ \forall x \in X_\alpha,\ \forall \alpha \in A. \tag{4}$$

Кожному значенню $p \in M$ поставимо у відповідність направленість збурених задач

$$\left\{\left\langle \inf_{x \in X_\alpha} \Phi^\alpha(x,p) \right\rangle, \alpha \in A\right\} \quad \left(P_{\alpha,p}\right). \tag{5}$$

Ясно, що при $p = 0$, сукупність задач (5) в точності співпадає з (1). Разом з тим, в загальному випадку має місце такий результат.

Твердження 1. Нехай $\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha \in A}$ – направленість підмножин банахового простору X, для якої $\tau - Li\, X_\alpha \neq \varnothing$. Нехай Y – банаховий простір з виділеною в ньому замкнутою підмножиною M, що містить нульовий елемент. Тоді для направленості задач умовної мінімізації (1) та відповідної направленості збурених задач (4) будуть виконуватися співвідношення:

$$\inf_{x \in \tau - LiX_\alpha} \tau - ls_s F^\alpha(x) \le \inf_{x \in \tau - LiX_\alpha} \left(\tau \times \mu - ls_s \Phi^\alpha\right)(x,0), \tag{6}$$

$$\inf_{x \in \tau - LsX_\alpha} \tau - li_s F^\alpha(x) \le \inf_{x \in \tau - LsX_\alpha} \left(\tau \times \mu - li_s \Phi^\alpha\right)(x,0), \tag{7}$$

де через τ та μ позначено локально опуклі топології на X і Y, які узгоджені з двоїстістю.

Доведення наведемо лише для нерівності (6), оскільки перевірка співвідношення (7) буде аналогічною. Згідно означенню верхньої S-границі $\tau \times \mu - ls_s\Phi^\alpha$ для направленості $\left\{\Phi^\alpha : X_\alpha \times M \to \overline{R}\right\}_{\alpha \in A}$ [1], областю її існування служить множина $\tau \times \mu - Li\left(X_\alpha \times M\right)$. Оскільки $\tau \times \mu - Li\left(X_\alpha \times M\right) \supseteq \left(\tau - Li\, X_\alpha\right) \times M$, то $(x,0) \in \tau \times \mu - Li\left(X_\alpha \times M\right)$ при всіх $x \in \tau - Li\, X_\alpha$. Отже, для кожної пари відкритих околів $\left(V \in N_\tau(x)\right) \times \left(W \in N_\mu(0)\right)$, де $x \in \tau - Li\, X_\alpha$, можемо записати

$$\inf_{\substack{y \in V \cap X_\alpha \\ p \in W \cap M}} \Phi^\alpha(y,p) \le \inf_{y \in V \cap X_\alpha} \Phi^\alpha(y,0) = \inf_{y \in V \cap X_\alpha} F^\alpha(y),$$

звідки знаходимо

$$\limsup_{\alpha \in A} \inf_{(y,p) \in (V \times W) \cap \left(X_\alpha \cap M\right)} \Phi^\alpha(y,p) \le \limsup_{\alpha \in A} \inf_{\substack{y \in V \cap X_\alpha \\ p \in W \cap M}} \Phi^\alpha(y,p) \le \limsup_{\alpha \in A} \inf_{y \in V \cap X_\alpha} F^\alpha(y).$$

Оскільки вибір даних околів є довільним, то

$$\left(\tau \times \mu - ls_s \Phi^\alpha\right)(x,0) \le \tau - ls_s F^\alpha(x),\ \forall x \in \tau - Li\, X_\alpha$$

Таким чином, нерівність (6) встановлена. Отже, виконання співвідношень (4) при всіх $\alpha \in A$ ще не гарантує рівності відповідних S-границь для вихідної та збуреної направленості функцій.

Твердження 2. Нехай в доповнення до умов твердження 1 виконуються рівності

$$\inf_{p\in M\cap W} \Phi^{\alpha}(x,p)=\Phi^{\alpha}(x,0), \forall x\in X_{\alpha}, \forall W\in N_{\mu}(0). \tag{8}$$

Тоді для варіаційних S-границь направленості задач (1) будуть справедливі формули:

$$\left\langle \inf_{x\in\tau-Li\,X_{\alpha}} \tau\text{-}ls_{s}\,F^{\alpha}(x)\right\rangle=\left\langle \inf_{x\in\tau-Li\,X_{\alpha}} \left(\tau\times\mu\text{-}ls_{s}\,\Phi^{\alpha}\right)(x,0)\right\rangle,$$

$$\left\langle \inf_{x\in\tau-Ls\,X_{\alpha}} \tau-li_{s}\,F^{\alpha}(x)\right\rangle=\left\langle \inf_{x\in\tau-Ls\,X_{\alpha}} \left(\tau\times\mu-li_{s}\,\Phi^{\alpha}\right)(x,0)\right\rangle.$$

Доведення безпосередньо випливає із співвідношень (8) та визначення варіаційних S-границь.

Зауваження 1. Як випливає з логіки доведення твердження 1, умову (8) можна замінити наступною: $\Phi^{\alpha}(x,p)=F^{\alpha}(x)+\Lambda^{\alpha}(p)$, де $\left\{\Lambda^{\alpha}: M\to R\right\}_{\alpha\in A}$ – неперервно збіжна при $p=0$ направленість. Зокрема, $\Lambda^{\alpha}(p)=\Lambda\cdot p$, де $\Lambda: M\to R$ лінійний неперервний функціонал.

Означення 1. M-полярою функції $F:E\to\overline{R}$ на опуклій множині E будемо називати функцію $F_{E}^{*}: X^{*}\to\overline{R}$, що задається правилом $F_{E}^{*}(x^{*})=\sup_{x\in E}\left(\langle x^{*},x\rangle_{X}-F(x)\right)$.

Зауважимо, що при $E\equiv X$, одержимо класичне означення спряженої по Фенхелю функції $F^{*}: X^{*}\to\overline{R}$ [6]. Разом з тим, в загальному випадку, $(E\subset X)$ буде справедливою нерівність

$$F_{E}^{*}(x^{*})\leq F^{*}(x^{*}),\ \forall x^{*}\in X^{*}.$$

Нехай $(\Phi^{\alpha})_{Z_{\alpha}}^{*}: X^{*}\times Y^{*}\to\overline{R}$ є M-поляра по множині $Z_{\alpha}=X_{\alpha}\times M$ функції $\Phi^{\alpha}: Z_{\alpha}\to\overline{R}$. Тоді, по аналогії з [6], задачі $\left\langle \sup_{p^{*}\in Y^{*}} -(\Phi^{\alpha})_{Z_{\alpha}}^{*}(0,p^{*})\right\rangle, \alpha\in A$ $\left(P_{\alpha}\right)_{Z_{\alpha}}^{*}$ будемо називати M-двоїстими до P_{α} відносно заданого збурення. Верхні грані в задачах $\left(P_{\alpha}\right)_{Z_{\alpha}}^{*}$ позначимо як $\sup\left(P_{\alpha}\right)_{Z_{\alpha}}^{*}$. Згідно відомих результатів опуклого аналізу, буде справедливим таке твердження.

Лема 1. Якщо задача P_{α} нетривіальна, то $\sup\left(P_{\alpha}\right)_{Z_{\alpha}}^{*}\leq\inf P_{\alpha}<+\infty$. Якщо нетривіальною є задача $\left(P_{\alpha}\right)_{Z_{\alpha}}^{*}$, то $-\infty<\sup\left(P_{\alpha}\right)_{Z_{\alpha}}^{*}\leq\inf P_{\alpha}$. Якщо нетривіальні P_{α} та $\left(P_{\alpha}\right)_{Z_{\alpha}}^{*}$, то $\inf P_{\alpha}$ і $\sup\left(P_{\alpha}\right)_{Z_{\alpha}}^{*}$ скінченні і $-\infty<\sup\left(P_{\alpha}\right)_{Z_{\alpha}}^{*}\leq\inf P_{\alpha}<+\infty$. Якщо функції $\Phi^{\alpha}: Z_{\alpha}\to\overline{R}$ допускають продовження на всю множину $X\times Y$, то

$$\sup\left(P_{\alpha}\right)_{Z_{\alpha}}^{*}\geq\sup P_{\alpha}^{*}, \tag{9}$$

де $P_{\alpha}^{*}:\left\langle \sup_{p^{*}\in Y^{*}} -(\Phi^{\alpha})^{*}(0,p^{*})\right\rangle$, а $(\Phi^{\alpha})^{*}: X^{*}\times Y^{*}\to\overline{R}$ – спряжена з $\Phi^{\alpha}: X\times Y\to\overline{R}$ по Фенхелю функція.

Зауважимо, що нерівність (9) є прямим наслідком таких перетворень:

$$(\Phi^{\alpha})_{Z_{\alpha}}^{*}(0,p^{*})=\sup_{\substack{x\in X_{\alpha}\\ p\in M}}\left\{\langle p^{*},p\rangle_{Y}-\Phi^{\alpha}(x,p)\right\}\leq\sup_{\substack{x\in X\\ p\in Y}}\left\{\langle p^{*},p\rangle_{Y}-\Phi^{\alpha}(x,p)\right\}\equiv(\Phi^{\alpha})^{*}(0,p^{*}).$$

Оскільки

$$\sup_{p^{*}\in Y^{*}}\left(-(\Phi^{\alpha})_{Z_{\alpha}}^{*}(0,p^{*})\right)=-\inf_{p^{*}\in Y^{*}}\left((\Phi^{\alpha})_{Z_{\alpha}}^{*}(0,p^{*})\right),$$

то з M-спряженими задачами $\left(P_\alpha\right)^*_{Z_\alpha}$ можна пов'язати їх збурення

$$\left\{\left\langle \sup_{p^*\in Y^*}\left(-\left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}\left(x^*,p^*\right)\right)\right\rangle, \alpha\in A\right\}, x^*\in X^*,$$

а значить, можна визначити задачі, двоїсті до $\left(P_\alpha\right)^*_{Z_\alpha}$. Множину задач умовної мінімізації

$$\left\{\left\langle \inf_{x\in cl_\tau X_\alpha}\left(\Phi^\alpha\right)^{**}_{Z_\alpha}(x,0)\right\rangle, \alpha\in A\right\} \qquad \left(P_\alpha\right)^{**}_{Z_\alpha} \tag{10}$$

будемо називати направленістю M-бідвоїстих задач до (1), де через $cl_\tau X_\alpha$ позначено замикання множини X_α в топології τ. Тут $\left(\Phi^\alpha\right)^{**}_{Z_\alpha}$ – спряжена до $\left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}$ функція, а значить, $\left(\Phi^\alpha\right)^{**}_{Z_\alpha}$ є Γ-регуляризацією Φ^α на множині $X_\alpha\times M$ [6].

Якщо функції збурень $\Phi^\alpha\colon Z_\alpha\to\overline{R}$ задовольняють умову $\Phi^\alpha\in\Gamma_0\left(X\times Y, Z_\alpha\right)$, де $Z_\alpha = X_\alpha\times M$ – опуклі замкнуті множини, то $\left(\Phi^\alpha\right)^{**}_{Z_\alpha}=\Phi^\alpha$ на $X_\alpha\times M$ і задачі $\left(P_\alpha\right)^{**}_{Z_\alpha}$ будуть співпадати з P_α.

Для довільного $p\in M$ покладемо $h^*(p)=\inf\limits_{x\in X_\alpha}\Phi^\alpha(x,p)$. Тоді, в повній аналогії з [6], можна встановити, що як тільки $\Phi^\alpha\in\Gamma_0\left(X\times Y,Z_\alpha\right)$ при всіх $\alpha\in A$, то

$$\left(h^\alpha\right)^*_M\left(p^*\right)=\left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}\left(0,p^*\right),\ \forall p^*\in Y^* \text{ і } \sup\left(P_\alpha\right)^*_{Z_\alpha}=\sup_{p^*\in Y^*}\left[-\left(h^\alpha\right)^*_M\left(p^*\right)\right]=\left(h^\alpha\right)^{**}_M(0).$$

Означення 2. Сукупність задач $\left(P_\alpha\right)$ будемо називати рівномірно нормальною, якщо при кожному значенні $\alpha\in A$ функції $h^\alpha\colon M\to\overline{R}$ скінченні і напівнеперервні знизу (нп. зн.) в нулі $(0\in M)$.

Лема 2. Нехай $\Phi^\alpha\in\Gamma_0\left(X\times Y,Z_\alpha\right)$ при всіх $\alpha\in A$. Тоді будуть еквівалентними такі умови: а) направленість задач $\left(P_\alpha\right)$ рівномірно нормальна; б) направленість M-спряжених задач $\left(P_\alpha\right)^*_{Z_\alpha}$ рівномірно нормальна; в) $\inf P_\alpha=\sup\left(P_\alpha\right)^*_{Z_\alpha}$ при всіх $\alpha\in A$ і ці значення скінченні.

Нехай тепер (X, Y) – пара банахових просторів, що є топологічно спряженими до сепарабельних банахових просторів V та W відповідно. Будемо вважати, що X наділено $\sigma\left(V^*,V\right)$-топологією, а $Y-\sigma\left(W^*,W\right)$-топологією. Розлянемо в X довільну направленість опуклих $\tau\left(X_{w^*}\right)$-замкнутих підмножин $\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$, для якої в $*$-топології на X існує нижня за Хаусдорфом границя $H\left(X_{w^*}\right)-Li\,X_\alpha$ [1].

Нехай $\left\{F^\alpha\colon X_\alpha\to(-\infty,+\infty]\right\}_{\alpha\in A}$ – узгоджена з $\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ направленість опуклих $\tau\left(X_{w^*}\right)$ – нп. зн. функцій. Виділимо в Y опуклу $\tau\left(Y_{w^*}\right)$-замкнуту підмножину M, внутрішність якої містить нульовий елемент. Поставимо у відповідність кожній функції $F^\alpha\colon X_\alpha\to(-\infty,+\infty]$ її збурення $\Phi^\alpha\colon X_\alpha\times M\to(-\infty,+\infty]$, для якого виконуються умови (4). Будемо вважати, що при кожному значенні $x\in X_\alpha$ і $\alpha\in A$ відображення $p\mapsto\Phi^\alpha(x,p)$ задовольняють умову $\Phi^\alpha(x,p)\ge\Phi^\alpha(x,0)$. Отже, буде справедливим співвідношення (8).

Розглянемо дві направленості задач

$$\left\{\left\langle \inf_{x \in X_\alpha} \Phi^\alpha(x,0)\right\rangle,\ \alpha \in A\right\}, \tag{11}$$

$$\left\{\left\langle \sup_{p^* \in Y^*}\left(-\left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}(0,p^*)\right)\right\rangle,\ \alpha \in A\right\}, \tag{12}$$

де $Z_\alpha = X_\alpha \times M$.

Згідно наведеному вище, множина (12) являє собою направленість задач, що є M-двоїстими до (11). Розглянемо питання про співвідношення між варіаційними S-границями для кожної з направленостей (11)–(12). Для цього введемо такі позначення: $Z = X \times Y$; $\tau\left(Z_{w^*}\right)$ – добуток $\sigma\left(V^*,V\right)$-топології на X та $\sigma\left(W^*,W\right)$-топології на Y; $\tau\left(Z^*_s\right)$ – топологія на $Z^* = X^* \times Y^*$, як результат добутку сильних топологій (топологій норми) на X^* і Y^*;

$$seq\left(Z_{w^*}\right) - li_s\, \Phi^\alpha : H\left(Z_{w^*}\right) - Ls\, Z_\alpha \to \overline{R},$$

$$seq\left(Z_{w^*}\right) - ls_s\, \Phi^\alpha : H\left(Z_{w^*}\right) - Li\, Z_\alpha \to \overline{R},$$

$$seq\left(Z_{w^*}\right) - lm^a_s\, \Phi^\alpha : H\left(Z_{w^*}\right) - Lm\, Z_\alpha \to \overline{R} -$$

відповідно нижня, верхня та абсолютна секвенційні S-границі направленості збурених функцій $\left\{\Phi^\alpha : Z_\alpha \to \overline{R}\right\}_{\alpha \in A}$ в $\tau\left(Z_{w^*}\right)$-топології [1].

Теорема 1. Нехай V, W – пара банахових просторів, що є топологічно спряженими до сепарабельних банахових просторів V та W відповідно. Будемо вважати виконаними такі умови:

а) в X задана еквіобмежена направленість опуклих $\tau\left(X_{w^*}\right)$-замкнутих підмножин $\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha \in A}$;

б) в Y задана опукла $\tau\left(Y_{w^*}\right)$-замкнута обмежена підмножина M, внутрішність якої містить нульовий елемент;

в) задана направленість рівномірно власних опуклих $\tau\left(X_{w^*}\right)$-нп. зн. функцій [1]

$$\left\{F^\alpha : X_\alpha \to (-\infty,+\infty]\right\}_{\alpha \in A}.$$

Тоді, у відповідності до правила (4), можна побудувати направленість опуклих рівномірно власних $\tau\left(Z_{w^*}\right)$-нп. зн. функцій

$$\left\{\Phi^\alpha : X_\alpha \times M \to (-\infty,+\infty]\right\}_{\alpha \in A} \tag{13}$$

таких, що $\Phi^\alpha(x,p) \geq \Phi^\alpha(x,0)$, $\forall x \in X_\alpha$, $\forall p \in M$, $\forall \alpha \in A$ і наступні твердження будуть еквівалентними:

(i) задача умовної мінімізації

$$\left\langle \inf_{x \in H\left(X_{w^*}\right) - Lm\, X_\alpha} F(x,0)\right\rangle \equiv \left\langle \inf_{x \in H\left(X_{w^*}\right) - Lm\, X_\alpha}\left(seq\left(Z_{w^*}\right) - lm^a_s\, \Phi^\alpha\right)(x,0)\right\rangle \tag{14}$$

є абсолютною секвенційною варіаційною S-границею в $\tau\left(X_{w^*}\right)$-топології для направленості задач (1);

(ii) для направленості M-двоїстих задач (12) існує абсолютна варіаційна S-границя в топології норми на Y^*, для якої справедливо зображення

$$\left\langle \sup_{y^* \in Y^*} \left(-F^*_{H\left(Z_{w^*}\right)}\left(0, y^*\right) \right) \right\rangle \equiv \left\langle \sup_{y^* \in Y^*} \left(-\left[\tau\left(Z_s^*\right) - lm_s^a \left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha} \right]\left(0, y^*\right) \right) \right\rangle, \tag{15}$$

де $F: H\left(X_{w} \cdot\right) - Lm\, Z_\alpha \to (-\infty, +\infty]$ – опукла власна $\tau\left(Z_{w^*}\right)$-нп. зн. функція.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$. Позначимо $Z_s = H\left(Z_w \cdot\right) - Lm\, Z_\alpha$, $X_s = H\left(X_w \cdot\right) - Lm\, X_\alpha$, вважаючи, що наведені границі за Хаусдорфом існують. Нехай для абсолютної секвенційної S-границі направленості (1) справедливо зображення (14), де вибір функцій Φ^α підпорядкований вище наведеним умовам. Тоді

$$F(x,0) = seq\left(X_w \cdot\right) - lm_s^a\, F^\alpha(x), \ \ \forall x \in X_s. \tag{16}$$

Разом з тим, по аналогії з [1], можна показати, що для M-поляри функції $F: Z_s \to (-\infty, +\infty]$ по множині Z_S має місце тотожність

$$F^*_{Z_s} = \tau\left(Z_s^*\right) - lm_s^a \left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}, \tag{17}$$

тобто $F^*_{Z_s}$ співпадає з абсолютною S-границею в сильній топології на $Z^* = X^* \times Y^*$ для направленості M-поляр $\left\{\left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha} : Z^* \to (-\infty, +\infty]\right\}_{\alpha \in A}$.

Покажемо, що звуження функції (17) на множину Y^* в точності співпадає з абсолютною S-гранцею в $\tau\left(Y_S^*\right)$-топології наступної направленості

$$\left\{\left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}(0,\cdot) : Y^* \to (-\infty, +\infty]\right\}_{\alpha \in A}. \tag{18}$$

Оскільки $\tau\left(Z_S^*\right)$-топологія на $Z^* = X^* \times Y^*$ задовольняє першій аксіомі зчисленності, то для функції (17), як абсолютної S-границі, будуть справедливі такі твердження:

(a) $F^*_{Z_s}\left(x^*, y^*\right) \le \liminf\limits_{\alpha \in A} \left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}\left(x^*_\alpha, y^*_\alpha\right), \ \ \forall \left\{\left(x^*_\alpha, y^*_\alpha\right)\right\} \xrightarrow{\tau\left(Z_S^*\right)} \left(x^*, y^*\right)$;

(b) для всякої пари $\left(x^*, y^*\right) \in Z^*$ існує направленість $\left\{\left(\bar{x}_\alpha^*, \bar{y}_\alpha^*\right)\right\}$, яка сильно збігається до неї і така, що $F^*_{Z_s}\left(x^*, y^*\right) \le \limsup\limits_{\alpha \in A} \left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}\left(\bar{x}_\alpha^*, \bar{y}_\alpha^*\right)$.

Тоді із умови (a) знаходимо, що для всякої направленості $\left\{y^*_\alpha\right\}_{\alpha \in A}$, яка сильно збігається в Y^* до деякого елементу $y^* \in Y^*$, буде справедливою нерівність

$$F^*_{Z_s}\left(0, y^*\right) \le \liminf_{\alpha \in A} \left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}\left(0, y_\alpha^*\right). \tag{19}$$

Нехай $y^* \in Y^*$ - довільний елемент. Покажемо існування направленості точок $\left\{\bar{y}_\alpha^*\right\}_{\alpha \in A}$ такої, що $\bar{y}_\alpha^* \xrightarrow{\tau\left(Y_S^*\right)} y^*$ і при цьому

$$F^*_{Z_s}\left(0, y^*\right) \le \limsup_{\alpha \in A} \left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}\left(0, \bar{y}_\alpha^*\right). \tag{20}$$

Будемо вважати, що $F^*_{Z_s}\left(0, y^*\right) < +\infty$ (інакше нерівність (20) буде справедливою для будь-якої направленості, що сильно збігається до y^*). Тоді із умови (b) випливає існування в Y^* направленості точок $\left\{\bar{y}_\alpha^*\right\}_{\alpha \in A}$ такої, що $\bar{y}_\alpha^* \to y^*$ сильно в Y^* і $\limsup\limits_{\alpha \in A} \left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}\left(0, \bar{y}_\alpha^*\right) < +\infty$.

Враховуючи початкові умови, множині задач

$$\left\{\left\langle \sup_{(x,p)\in X_\alpha\times M}\left(\left\langle \bar{y}_\alpha^{\,*},p\right\rangle_Y-\Phi^\alpha(x,p)\right)\right\rangle,\ \alpha\in A\right\}$$

можна поставити у відповідність множину їх максимізантів $\left\{\left(x_\alpha^0,p_\alpha^0\right)\in Z_\alpha\subset X\times Y\right\}_{\alpha\in A}$. Оскільки направленість множин $\left\{Z_\alpha=X_\alpha\times M\right\}_{\alpha\in A}$ – еквіобмежена і кожна з підмножин $Z_\alpha=X_\alpha\times M$ є $\tau\left(Z_{w^*}\right)$-замкнутою, то згідно теореми Банаха-Алаоглу, направленості $\left\{x_\alpha^0\right\}_{\alpha\in A}$ і $\left\{p_\alpha^0\right\}_{\alpha\in A}$ будуть компактні в топологіях $\sigma\left(V^*,V\right)$ та $\sigma\left(W^*,W\right)$ відповідно. Тоді можемо вважати, що існують елементи $x^0\in H\left(X_{w^*}\right)-Lm\,X_\alpha$ та $p^0\in M$, для яких виконуються умови:

$$x_\alpha^0\xrightarrow{\tau\left(X_{w^*}\right)}x^0,\qquad p_\alpha^0\xrightarrow{\tau\left(Y_{w^*}\right)}p^0.$$

Враховуючи, що при кожному значенні $\alpha\in A$ справедливі рівності

$$\left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}\left(0,\bar{y}_\alpha^{\,*}\right)=\sup_{(x,p)\in X_\alpha\times M}\left\{\left\langle\bar{y}_\alpha^{\,*},p\right\rangle_Y-\Phi^\alpha(x,p)\right\}=\left\langle\bar{y}_\alpha^{\,*},p_\alpha^0\right\rangle_Y-\Phi^\alpha\left(x_\alpha^0,p_\alpha^0\right),$$

одержимо

$$\limsup_{\alpha\in A}\left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}\left(0,\bar{y}_\alpha^{\,*}\right)\le\limsup_{\alpha\in A}\left\langle\bar{y}_\alpha^{\,*},p_\alpha^0\right\rangle_Y-\liminf_{\alpha\in A}\Phi^\alpha\left(x_\alpha^0,p_\alpha^0\right)=$$
$$=\left\langle y^*,p^0\right\rangle_Y-\liminf_{\alpha\in A}\Phi^\alpha\left(x_\alpha^0,p_\alpha^0\right).$$

Разом з тим, $\liminf_{\alpha\in A}\Phi^\alpha\left(x_\alpha^0,p_\alpha^0\right)\ge seq\left(Z_{w^*}\right)-lm_s^a\,\Phi^\alpha\left(x^0,p^0\right)$ (за означенням секвенційних S-границь). Тому

$$\limsup_{\alpha\in A}\left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}\left(0,\bar{y}_\alpha^{\,*}\right)\le\left\langle y^*,p^0\right\rangle_Y-\left[seq\left(Z_{w^*}\right)-lm_s^a\,\Phi^\alpha\left(x^0,p^0\right)\right]\le$$
$$\le\sup_{(x,p)\in Z_S}\left\{\left\langle y^*,p\right\rangle_Y-\left[seq\left(Z_{w^*}\right)-lm_s^a\,\Phi^\alpha\left(x^0,p^0\right)\right]\right\}=F^*_{Z_s}\left(0,y^*\right).$$

Отже, співвідношення (20) встановлено. Таким чином, приймаючи до уваги нерівності (19)–(20), одержимо: функція $F^*_{Z_s}(0,\cdot)$ є абсолютною S-границею в топології норми на Y^* для направленості (18). Тому, для направленості M-двоїстих задач (12) існує абсолютна варіаційна S-границя в $\tau\left(Y_s^*\right)$-топології, для якої буде справедлива формула (15).

$(ii)\Rightarrow(i)$. Нехай має місце формула (15), тобто функція $F^*_{Z_s}(0,\cdot):Y^*\to(-\infty,+\infty]$ є абсолютною S-границею в топології норми на Y^* для направленості функцій (18). Покажемо, що в цьому випадку буде виконуватися твердження (і). Оскільки для функції $F^*_{Z_S}$ справедлива формула (17), то можемо записати [1] $F(x,p)=seq\left(Z_{w^*}\right)-lm_s^a\,\Phi^\alpha(x,p),\ \forall(x,p)\in Z_s$. Разом з тим, дане співвідношення еквівалентно тому, що на множині Z_S виконується нерівність

$$seq\left(Z_{w^*}\right)-ls_s\,\Phi^\alpha(x,p)\le F(x,p)\le seq\left(Z_{w^*}\right)-li_s\,\Phi^\alpha(x,p).\qquad(21)$$

Покажемо, що для всіх $x\in H\left(X_{w^*}\right)-Lm\,X_\alpha$ справедливе співвідношення

$$seq\left(Z_{w^*}\right)-ls_S\,F^\alpha(x)\le F(x,0)\le seq\left(Z_{w^*}\right)-li_s\,F^\alpha(x).\qquad(22)$$

Згідно з означенням 1, можемо записати

$$F(x,0) \le \left(seq\left(Z_{w^*}\right) - li_s\ \Phi^{\alpha}\right)(x,0) = inf\left\{ \liminf_{\alpha \in A} \Phi^{\alpha}\left(x^{\alpha}, p^{\alpha}\right) \middle| \begin{array}{l} x^{\alpha} \xrightarrow{\tau\left(X_{w^*}\right)} x \\ p^{\alpha} \xrightarrow{\tau\left(Y_{w^*}\right)} 0 \end{array} \right\} \le$$

$$\le inf\left\{ \liminf_{\alpha \in A} \Phi^{\alpha}\left(x^{\alpha},0\right) \middle| x^{\alpha} \xrightarrow{\tau\left(X_{w^*}\right)} x \right\} \equiv seq\left(Z_{w^*}\right) - li_s\ F^{\alpha}(x), \tag{23}$$

$$\forall x \in H\left(X_{w^*}\right) - Lm\, X_{\alpha}$$

Таким чином, права частина нерівності (22) доведена.

Для перевірки лівої частини співвідношення (22) зауважимо, що

$$\Phi^{\alpha}\left(x_{\alpha}, p_{\alpha}\right) \ge \Phi^{\alpha}\left(x_{\alpha},0\right),\ \forall \alpha \in A .$$

Отже $\limsup_{\alpha \in A} \Phi^{\alpha}\left(x_{\alpha}, p_{\alpha}\right) \ge \limsup_{\alpha \in A} \Phi^{\alpha}\left(x_{\alpha},0\right)$, при всіх $x_{\alpha} \xrightarrow{\tau\left(X_{w^*}\right)} x$ і $p_{\alpha} \xrightarrow{\tau\left(Y_{w^*}\right)} 0$. Тоді

$$F(x,0) \ge \left(seq\left(Z_{w^*}\right) - ls_s\ \Phi^{\alpha}\right)(x,0) = inf\left\{ \limsup_{\alpha \in A} \Phi^{\alpha}\left(x^{\alpha}, p^{\alpha}\right) \middle| \begin{array}{l} x^{\alpha} \xrightarrow{\tau\left(X_{w^*}\right)} x \\ p^{\alpha} \xrightarrow{Y_{w^*}} 0 \end{array} \right\} \ge$$

$$\ge inf\left\{ \limsup_{\alpha \in A} F^{\alpha}\left(x^{\alpha}\right) \middle| x^{\alpha} \xrightarrow{\tau\left(X_{w^*}\right)} x \right\} \equiv seq\left(X_{w^*}\right) - ls_s F^{\alpha}(x) \tag{24}$$

для всіх $x \in H\left(X_{w^*}\right) - Lm\, X_{\alpha}$.

Таким чином, поєднуючи (23) з (24), одержимо нерівність (22). Отже

$$F(x,0) = seq\left(X_{w^*}\right) - lm_s^a\ F^{\alpha}(x),\ \forall x \in H\left(X_{w^*}\right) - Lm\, X_{\alpha} .$$

і задача (14) є абсолютною секвенційною варіаційною S-границею в $\tau\left(X_{w^*}\right)$-топології направле-ності задач (1).

Наслідок. Нехай виконуються початкові припущення теореми 1. Тоді задача

$$\left\langle \sup_{p^* \in Y^*} \left(-\left[\tau\left(Z_S^*\right) - lm_s^a \left(\Phi^{\alpha}\right)^*_{Z_{\alpha}} \right]\left(0, p^*\right) \right) \right\rangle \tag{25}$$

буде *М*-двоїстою до S-граничної задачі умовної мінімізації

$$\left\langle \inf_{x \in H\left(X_{w^*}\right) - Lm\, X_{\alpha}} \left(seq\left(X_{w^*}\right) - lm_s^a\ F^{\alpha}\right)(x) \right\rangle . \tag{27}$$

Згідно леми 1, для кажної пари *М*-спряжених задач P_{α} і $\left(P_{\alpha}\right)^*_{Z_{\alpha}}$ виконується співвідношення $sup\left(P_{\alpha}\right)^*_{Z_{\alpha}} \le inf\ P_{\alpha}, \forall \alpha \in A$. Покажемо, що наведена нерівність залишиться справедливою і для S-граничних задач (25)–(26), що знаходяться у відношенні *М*-двоїстості.

Твердження 3. Нехай виконуються початкові припущення теореми 1. Тоді

$$-\left(\tau\left(Z_S^*\right) - lm_s^a \left(\Phi^{\alpha}\right)^*_{X_{\alpha} \times M} \right)\left(0, p^*\right) \le seq\left(X_{w^*}\right) - lm_s^a\ F^{\alpha}(x) \tag{27}$$

для всіх $x \in H\left(X_{w^*}\right) - Lm\, X_{\alpha}$ і $p^* \in Y^*$, отже

$$\sup_{p^*\in Y^*}\left\{-\left(\tau\left(Z_s^*\right)-lm_s^a\left(\Phi^\alpha\right)^*_{X_{\alpha\times M}}\right)\left(0,p^*\right)\right\}\le \inf_{x\in H\left(X_{w^*}\right)-Lm X_\alpha}\left(seq\left(X_{w^*}\right)-lm_s^a\ F^\alpha\right)(x).\ (28)$$

Доведення. Введемо такі позначення: $X_0 = H\left(X_{w^*}\right)-Lm X_\alpha$;

$$\Phi^*\left(0,p^*\right)=\tau\left(Z_s^*\right)-lm_s^a\left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}\left(\left(0,p^*\right)\right);$$

$$F(x)=seq\left(X_{w^*}\right)-lm_s^a\ F^\alpha(x)$$

Нехай $x^0\in X_0,\ p^0\in Y^*$ – довільні фіксовані елементи. Тоді за означенням топологічної границі за Хаусдорфом, з умови $x^0\in X_0$ випливає факт існування направленості точок $\left\{x_\alpha^0\right\}_{\alpha\in A}$ такої, що $x_\alpha^0\in X_\alpha,\ \forall\alpha\in A$ і $x_\alpha^0\xrightarrow{\tau\left(X_{w^*}\right)}x^0$. З іншого боку, для функції $\Phi^*(0,\cdot): Y^*\to\overline{R}$ як S-границі в топології норми на Y^*, виконуються нерівності (19)–(20). Отже існує направленість точок $\left\{p_\alpha^0\right\}\subset Y^*$ така, що $p_\alpha^0\to p^0$ сильно в Y^* и при цьому

$$\Phi^*\left(0,p^*\right)\ge\limsup_{\alpha\in A}\left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}\left(0,p_\alpha^0\right). \qquad (29)$$

Разом з тим, для всякої пари M-спряжених функцій F^α і $\left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}(0,\cdot)$ виконується відома нерівність (див. [6]) $-\left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}\left(0,p^*\right)\le F^\alpha(x),\ \forall p^*\in Y^*,\ \forall x\in X_\alpha$. Отже

$$-\left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}\left(0,p_\alpha^0\right)\le F^\alpha\left(x_\alpha^0\right),\ \forall\alpha\in A.$$

Перейшовши в останньому співвідношенні до нижньої границі, одержимо $-\limsup_{\alpha\in A}\left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}\left(0,p_\alpha^0\right)\le\liminf_{\alpha\in A}F^\alpha\left(x_\alpha^0\right)$. Тоді, враховуючи (29), матимемо

$$-\limsup_{\alpha\in A}\left(\Phi^\alpha\right)^*_{Z_\alpha}\left(0,p_\alpha^0\right)\le\liminf_{\alpha\in A}F^\alpha\left(x_\alpha^0\right)$$

Оскільки, одержана нерівність справедлива для всіх *-слабо збіжних до x^0 направленостей $\left\{x_\alpha^0\in X_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$, то

$$-\Phi^*\left(0,p^0\right)\le\inf\left\{\liminf_{\alpha\in A}F^\alpha\left(x_\alpha^0\right)\,\middle|\,x_\alpha^0\xrightarrow{\tau\left(X_{w^*}\right)}x^0\right\}\equiv$$

$$\equiv seq\left(X_{w^*}\right)-li_s\ F^\alpha\left(x^0\right)\le seq\left(X_{w^*}\right)-lm_s^a\ F^\alpha\left(x^0\right)=F\left(x^0\right).$$

Таким чином, нерівність (27) виконується на парі елементів $\left(x^0,p^0\right)$. Оскільки вибір вказаних елементів був довільним, то співвідношення (27), а, значить, і (28), доведені.

Теорема 2. Нехай в доповнення до умов теореми 1 направленість задач (1) рівномірно нормальна. Тоді

$$\sup_{p^*\in Y^*}\left\{-\left(\tau\left(Z_s^*\right)-lm_s^a\left(\Phi^\alpha\right)^*_{X_\alpha\times M}\right)\left(0,p^*\right)\right\}=$$

$$=\inf_{x\in H\left(X_{w^*}\right)-Lm X_\alpha}\left(seq\left(X_{w^*}\right)-lm_s^a\ F^\alpha\right)(x)=\lim_{\alpha\in A}\inf_{x\in X_\alpha}F^\alpha(x). \qquad (30)$$

Доведення. Будемо користуватися позначеннями, що наведені в твердженні 3. Згідно ле ми 2 властивість рівномірної нормальності для направленості задач (1) еквівалентна тому, що

$$\sup_{p^*\in Y^*}\left(-\left(\Phi^{\alpha}\right)^*_{Z_\alpha}\left(0,p^*\right)\right)=\inf_{x\in X_\alpha}F^{\alpha}(x),\ \forall\alpha\in A. \tag{31}$$

Оскільки функція $\Phi^*(0,\cdot):Y^*\to\overline{R}$ є абсолютною S-границею в сильній топології на Y^* направленості M-поляр $\left\{\left(\Phi^{\alpha}\right)^*_{Z_\alpha}:Y^*\to\overline{R}\right\}_{\alpha\in A}$, то

$$\inf_{p^*\in Y^*}\Phi^*\left(0,p^*\right)=\lim_{\alpha\in A}\inf_{p^*\in Y^*}\left(\Phi^{\alpha}\right)^*_{Z_\alpha}\left(0,p^*\right).$$

Тоді, враховуючи рівності (31), останнє співвідношення можна переписати у вигляді

$$\sup_{p^*\in Y^*}\left(-\Phi^*\left(0,p^*\right)\right)=\lim_{\alpha\in A}\inf_{x\in X_\alpha}F^{\alpha}(x). \tag{32}$$

Покажемо, що $\lim\limits_{\alpha\in A}\inf\limits_{x\in X_\alpha}F^{\alpha}(x)=\inf\limits_{x\in X_0}F(x)$. Оскільки $F^{\alpha}:X_\alpha\to\overline{R}$ – $\tau\left(X_{w^*}\right)$-нп. зн., а множини їх визначення X_α обмежені і $\tau\left(X_{w^*}\right)$-замкнуті, то задачі умовної мінімізації (1) мають розв'язки. Нехай $\left\{x^0_\alpha\in X_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ – направленість мінімізантів для (1). Оскільки підмножини $\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ еквіобмежені, то існує константа $c>0$ така, що $\left\|x^0_\alpha\right\|_X\le c,\ \forall\alpha\in A$. Отже, згідно теореми Банаха-Алаоглу, знайдеться елемент $x^0\in X$ і піднаправленість мінімізантів $\left\{y^0_\beta\right\}_{\beta\in B}$ такі, що $y^0_\beta\to x^0$ *-слабо в X. Але $\left\{y^0_\beta\right\}_{\beta\in B}$ – еквіузгоджена з $\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$, тому існує функція $G:B\to A$ така, що $y^0_\beta\in X_{G(\beta)},\ \forall\beta\in B$. Таким чином, *-слабка границя x^0 направленості $\left\{y^0_\beta\right\}_{\beta\in B}$ буде належати верхній топологічній границі за Хаусдорфом $H\left(X_{w^*}\right)-Ls\,X_\alpha$. Враховуючи, що $H\left(X_{w^*}\right)-Ls\,X_\alpha=H\left(X_{w^*}\right)-Li\,X_\alpha=X_0$, одержимо $x^0\in X_0$. Тоді, приймаючи до уваги визначення абсолютної секвенційної S-границі в $\tau\left(X_{w^*}\right)$-топології, можемо записати:

$$F\left(x^0\right)\le\lim_{\beta\in B}F^{G(\beta)}\left(y^0_\beta\right)=\lim_{\beta\in B}\inf_{x\in X_{G(\beta)}}F^{G(\beta)}(x).$$

Разом з тим, числова направленість $\left\{\inf\limits_{x\in X_\alpha}F^{\alpha}(x)\right\}$ збігається (див. (32)). Отже будуть збігатися і всі її піднаправленості. Тому $F\left(x^0\right)\le\lim\limits_{\alpha\in A}\inf\limits_{x\in X_\alpha}F^{\alpha}(x)$. Співставляючи дане співвідношення з (32), одержимо $\inf\limits_{x\in X_0}F(x)\le F\left(x^0\right)\le\sup\limits_{p^*\in Y^*}\left(-\Phi^*\left(0,p^*\right)\right)=\lim\limits_{\alpha\in A}\inf\limits_{x\in X_\alpha}F^{\alpha}(x)$.
Тоді, приймаючи до уваги (28), запишемо

$$\inf_{x\in X_0}F(x)\le F\left(x^0\right)\le\sup_{p^*\in Y^*}\left(-\Phi^*\left(0,p^*\right)\right)=\lim_{\alpha\in A}\inf_{x\in X_\alpha}F^{\alpha}(x)\le\inf_{x\in X_0}F(x).$$

Таким чином, співвідношення (30) встановлено.

Наслідок. При виконанні умов даної теореми граничні точки x^0 направленості мінімізантів $\left\{x^0_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ для (1) будуть задовольняти включенню

$$x^0\in M\left(seq\left(X_{w^*}\right)-lm^a_s\,F^{\alpha};H\left(X_{w^*}\right)-Lm\,X_\alpha\right),$$

тобто x^0 є мінімізантом для S-граничної задачі (25).

Зауваження 3. Теореми 1–3 будуть справедливі і в тому випадку, коли замість наведеної вище умови на характер збурень, тобто $\Phi^{\alpha}(x,p) \geq \Phi^{\alpha}(x,0), \forall x \in X_{\alpha}, \forall p \in M, \forall \alpha \in A$, буде мати місце формула $\Phi^{\alpha}(x,p) = F^{\alpha}(x) + \Lambda^{\alpha}(p)$, де $\{\Lambda^{\alpha} : M \to \overline{R}\}_{\alpha \in A}$ – $\tau(Y_{w^*})$-неперервно збіжна направленість функціоналів. Дійсно, в цьому випадку направленість $\{p_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ в (24) можна вибрати так, щоб $p_{\alpha} \xrightarrow{\tau(Y_{w^*})} 0$, $p_{\alpha} \in M$ і $\Lambda(p_{\alpha}) \geq 0$, $\forall \alpha \in A$.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Attouch H.* Variational Convergence for Functions and Operatiors. – London, Pitman, 1984. – 423 p.
2. *Когут П.И.* Вариационная S-сходимость задач мимнимизации. Часть 1. Определение и основные свойства // Проблемы управления и информатики, 1996. – № 5. – С. 29–43.
3. *Когут П.И.* Вариационная S-сходимость задач минимизации. Часть II. Топологические свойства S-пределов // Проблемы управления и информатики, 1997. – № 3. – С. 78–90.
4. *Когут П.И.* S-сходимость задач условной минимизации и ее вариационные свойства // Проблемы управления и информатики, 1997. – № 4. – С. 64–79.
5. *Когут П.І.* Варіаційна S-збіжність задач мінімізації та її геометрична інтерпретація // Доп. НАН України, 1997. – № 6. – С. 89–93.
6. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 399 с.

КОГУТ Петро Ілліч – кандидат фізико-математичних наук, доцент Дніпропетровського державного університету залізничного транспорту.

Наукові інтереси:

– математична теорія керованих систем з розподіленими параметрами, проблеми усереднення.

СЕВЕРЕНЧУК Сергій Васильович – науковий співробітник Дніпропетровського державного університету.

Наукові інтереси:

– опуклий аналіз і варіаційні проблеми.