ІНФОРМАТИКА

УДК 681.3

А.Ю. Левченко, асист.
Житомирський державний технологічний університет

ДЕКОМПОЗИЦІЯ ЗАГАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА ТА НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД ЇЇ РОЗВ'ЯЗКУ

(Представлено д.т.н., проф. Панішевим А.В.)

Запропоновано підхід до декомпозиції загальної задачі комівояжера (ЗЗК) на задачі меншої розмірності, що дозволяє суттєво прискорити процедуру пошуку розв'язку. Крім того, пропонується швидкодіючий наближений метод розв'язку ЗЗК, який полягає у послідовному виконанні двох відомих алгоритмів комбінаторної оптимізації. Спочатку ЗЗК зводиться до метричної симетричної задачі комівояжера (СЗК) поліноміальним перетворенням вихідного зваженого графа в повний метричний граф. Потім знаходиться наближене рішення метричної СЗК, що дозволяє визначити шуканий маршрут.

Вступ. Загальна задача комівояжера (ЗЗК) формулюється таким чином. Заданий неорієнтований граф $H=\left(V,U\right)$ з n вершинами та функція ваг його ребер $d:U\to Z_0^+$, Z_0^+ – множина цілих невід'ємних чисел. Потрібно знайти найкоротший замкнений маршрут, який пов'язує всі вершини V. Очевидно, у будь-якому зв'язному графі ЗЗК завжди має розв'язок [1].

Єдиний відомий на даний час автору алгоритм точного розв'язку ЗЗК розглядається в [2]. Він виконується в дві стадії. Перша стадія базується на поліноміальному зведенні ЗЗК до симетричної задачі комівояжера (СЗК) за допомогою алгоритму пошуку найкоротшого багатополюсного шляху, наприклад, за допомогою алгоритму Флойда-Уоршала. На другій стадії виконується класичний метод Літла, який характеризується великою трудомісткістю і є непридатним для графів із цікавою з точки зору практики розмірністю.

Деякі графи підлягають декомпозиції, що дозволяє розбити ЗЗК на підзадачі меншої розмірності, суттєво прискоривши процес пошуку точного розв'язку.

Крім того, на другій стадії алгоритму можна використати поліноміальний наближений алгоритм СЗК, отримавши при цьому наближений розв'язок ЗЗК.

Декомпозиція графа. Якщо структурні характеристики графа, для якого розв'язується ЗЗК, дозволяють представити його розбиттям на компоненти зв'язності, то час роботи методу можна істотно зменшити. З цією метою процес побудови маршруту комівояжера слід розглядати як послідовність з трьох етапів: ефективної процедури визначення компонент зв'язності H_r графа H; розв'язку ЗЗК для кожної його компоненти H_r; об'єднання всіх отриманих розв'язків у замкнений маршрут. Будемо говорити, що ЗЗК піддається декомпозиції на підзадачі, якщо час її розв'язку методом, застосованим до вихідного графа H, більше, ніж час виконання перерахованих етапів.

Викладення основного матеріалу. Граф реальної транспортної мережі містить інформацію, що дозволяє оцінити, наскільки він зв'язний. Виділимо три складові графа, що характеризують його зв'язність та вказують на можливість декомпозиції ЗЗК: точку з'єднання; міст та підмножина висячих або кінцевих вершин.

Вершина, видалення якої перетворює зв'язний граф у незв'язний, називається точкою зчленування, а ребро з такою ж властивістю – мостом. Зв'язний, непустий, підграф графа H, який не має точок зчленування, зветься блоком. Точка зчленування є загальною вершиною двох та більше блоків [3].

Всі точки зчленування та мости в графі H можна встановити за час $O\left(\left|V\right|+\left|U\right|\right)$ процедурою, яка запропонована в [4].

Непуста підмножина висячих вершин графа H створює підграф H' у вигляді лісу. Кожному дереву лісу відповідає коренева вершина, що зв'язує його з тією частиною графа H, яка не включає ребра та решту вершин дерева. Очевидно, коренева вершина кожного дерева є точкою зчленування, отже, кожне дерево лісу є компонентою зв'язності графа H, де всі вершини, крім висячих – точки зчленування.

Алгоритм розв'язку ЗЗК для графа, який містить дерева та мости, припускає вдосконалення, механізм якого побудований на очевидному факті.

Твердження 1. Будь-яке рішення ЗЗК для дерева має вартість, рівну подвоєній сумі ваг ребер.

Нехай граф H містить дерева та мости. Виділимо спочатку в H всі дерева. Для кожного з них побудуємо, починаючи з кореневої вершини, замкнений маршрут, який проходить по всім вершинам і двічі по будь-якому ребру. У кожному побудованому маршруті помітимо кореневу вершину. Потім виділимо в графі H всі мости та відмітимо точки зчленування кожного моста. Очевидно, вартість замкненого маршруту по мосту дорівнює подвоєній вазі ребра, яке представляє міст. Сума вартостей маршрутів, які побудовані для виділених об'єктів, є постійною складовою вартості будь-якого розв'язку ЗЗК в графі H.

Для виділення дерев лісу H' застосуємо варіант алгоритму, запропонованого в [4]. Позначимо V' і U' множини вершин і ребер лісу H', K – множина кореневих вершин, $K \subset V'$.

Наступний алгоритм будує всі дерева лісу H' в графі H і визначає множину кореневих вершин K.

S0. $H = (V, U)$ – зв'язний граф, де V – множина вершин, U – множина ребер $u = \{v_i, v_j\}$, $|V| = n$; вершини графа H впорядковані за зростанням їх ступенів: $deg\ v_1 \le deg\ v_2 \le ... \le deg\ v_n$; $K = \varnothing$, $V' = \varnothing$, $U' = \varnothing$.

S1. Якщо $deg\ v_1 > 1$, то кінець: граф H не містить лісу H', інакше $i = 1$.

S2. Для ребра $u = \{v_i, v_j\}$ положити $deg\ v_i = 1$, $deg\ v_j = deg\ v_j - 1$, $V = V - \{v_i\}$, $V' = V' \cup \{v_i, v_j\}$, $U' = U' \cup \{u\}$; $i = i + 1$.

S3. Якщо $i = n - 1$, то $V' = V$, $U' = U$, кінець: граф H – дерево.

S4. Якщо $deg\ v_i = 1$, то перейти до кроку S2.

S5. $K = V' \cap V$, побудувати для кожної кореневої вершини з K дерево лісу H'.

Час роботи алгоритму, очевидно, порівняний з часом упорядкування ступенів графа H, який оцінюється, як відомо, величиною $O(n \log n)$.

Кожне ребро $\{v, w\}$ дерева H'_k, $k = \overline{1, |K|}$, взагалі кажучи, є мостом, видалення якого призводить до остовного незв'язного підграфу графа H, який не містить $\{v, w\}$.

Розглянемо підграф $\langle S \rangle$ графа H, який породжений підмножиною вершин $S = (V - V') \cup K$. Для знаходження і виділення всіх мостів у підграфі $\langle S \rangle$ скористаємося алгоритмом пошуку в глибину, який визначає на множині вершин S всі точки зчленування за час $O(|S| + |V| - |V'|)$ [4]. Якщо пара точок зчленування з'єднана ребром, видалення якого збільшує число компонент зв'язності підграфа S, то вона створює міст M_m. Множина з s мостів породжує $s+1$ компонент зв'язності H''_l підграфа $\langle S \rangle$. Замкнений маршрут, який проходить по всім вершинам компоненти H''_l, $l = \overline{1, s+1}$, є частиною шуканого маршруту комівояжера у графі H.

Звернемося до підграфа, який отримано в результаті видалення всіх мостів. Компоненти зв'язності підграфа в сукупності містять всі відмічені вершини. Компонента може бути точкою зчленування, блоком або підграфом, який розділяється, тобто підграфом, який містить точки зчленування, відмінні від відмічених [5]. Побудуємо для кожної компоненти маршрут комівояжера, який починається та закінчується у відміченій вершині, інцидентної до моста. Розв'язок ЗЗК для графа H є результатом об'єднання всіх послідовних маршрутів у відмічених вершинах.

Покажемо, як об'єднуються у розв'язок ЗЗК τ маршрути τ'_k, e_m, τ''_l, що побудовані відповідно для дерев H'_k лісу H', $k = \overline{1, |K|}$, мостів M_m, $m = \overline{1, s}$, і компонент зв'язності H''_l підграфа $\langle S \rangle$, $l = \overline{1, s+1}$.

Зазначимо, що серед всіх компонент H''_l завжди існує така, що містить в точності одну вершину V_1 одного моста. Визначимо її як першу в сукупності компонент H''_l, $l = \overline{1, s+1}$. Вершину V_1 приймемо за початкову та кінцеву точку шуканого маршруту комівояжера.

Якщо $s > 2$, то частина компонент H''_l, $l = \overline{2, s+1}$, пов'язана між собою декількома мостами. У таких компонентах лежить одна вершина кожного моста.

Нехай $\tau''_l = (w, ..., a, ..., b, ..., w)$ – маршрут, побудований для H''_l, $l = \overline{1, s+1}$, де w – вершина моста; $w = v_1$ при $l = 1$. Припустимо, що в ньому містяться вершини з множини кореневих вершин K. Тоді виконаємо в τ''_l заміну кожної вершини $a \in K$ на маршрут $(a, ..., a)$ для дерева H'_k з кореневою вершиною a. В кожному маршруті τ''_l відмічені всі вершини, інцидентні мостам.

Побудуємо граф (L, M), в якому вершині $l \in L$, $l = \overline{1, s+1}$, поставлений у відповідність маршрут τ''_l, а ребру $\{i, j\} \in M$ – міст M_m, $m = \overline{1, s}$. В графе (L, M) пара вершин i та j створює ребро $\{i, j\}$, якщо вершини $p \in \tau''_i$ и $q \in \tau''_j$ з'єднані мостом $\{p, q\}$, $i \ne j$.

Граф (L, M) – дерево, оскільки за будовою він зв'язний, і $|L| = |M| - 1$.

Вершину дерева (L, M), яка відповідає τ'', будемо вважати кореневою. Розв'язком ЗЗК є будь-який обхід всіх вершин дерева, який починається та закінчується у вершині $v_1 \in \tau''$ і двічі проходить по кожному ребру множини M.

Всі деталі з'єднання в шуканий маршрут комівояжера множини маршрутів $\left\{\tau_l'' \middle| \, l = \overline{1, s+1}\right\}$, з'єднаних мостами M_m, $m = \overline{1, s}$, можна викласти, виходячи з рисунка 1.

Спочатку розв'язок ЗЗК містить маршрут $\tau_1'' = (v_1, ..., v_1)$ і міст $\{v, w\}$, який з'єднує τ_1'' з маршрутом $\tau_2'' = (w, ..., x, ..., y, ..., w)$. Оскільки x і y – відмічені вершини, тобто вершини мостів $\{x, a\}$ і $\{y, b\}$, то τ проходить по частині $(w, ..., x)$ маршруту τ_2'', ребру $\{x, a\}$, маршруту $\tau_3'' = \{a, ..., a\}$ і ребру $\{a, x\}$. Далі він включає частину $(x, ..., y)$ маршруту τ_2'', ребро $\{y, b\}$, маршрут $\tau_4'' = (b, ..., b)$, ребро $\{b, y\}$, ще одну частину $(y, ..., w)$ маршруту τ_2'' та ребро $\{w, v_1\}$. Таким чином, побудований маршрут $\tau = (v_1, ..., v_1, w, ..., x, a, ..., a, x, ..., y, b, ..., b, y, ..., w, v_1)$. Очевидно, час об'єднання всіх виділених підграфів графа H обмежений величиною $O(|L| + |M|)$.

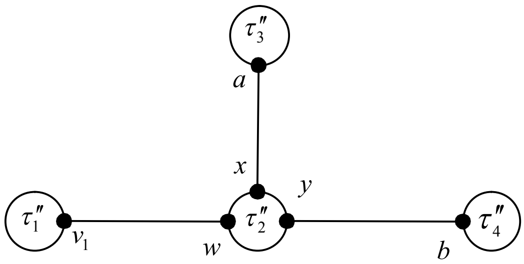


Рис. 1. Дерево (L, M) з зазначеними вершинами

Вартість маршруту комівояжера τ дорівнює:

$$C(\pi) = \sum_{k=1}^{|K|} C(\tau_k') + 2\sum_{m=1}^{s} C(M_m) + \sum_{l=1}^{s+1} C(\tau_l''),$$

де два перших доданки є константами для заданого графа H. Вартість компоненти підграфа $\langle S \rangle$, яка представлена однією вершиною, дорівнює 0.

Метод розв'язку ЗЗК, який включає викладений спосіб декомпозиції, виконується в такій послідовності дій.

S0. $H = (V, U)$ – зв'язний зважений граф, де V – множина вершин, $|V| = n$, U – множина ребер, $\left[d_{ij}\right]_n$ – матриця ваг ребер графа H, в якій $d_{ij} \in R_0^+$, якщо вершини i і j зв'язані ребром в H, і $d_{ij} = \infty$ інакше, $i, j = \overline{1, n}$.

S1. Якщо ступені всіх вершин графа H більше 1, то перейти до кроку S3.

S2. Виконати процедуру виділення дерев лісу $H' = (V', U')$ і множини K кореневих вершин; відмітити кореневу вершину для кожного дерева H_k' лісу H', $k = \overline{1, K}$ й, починаючи з неї, побудувати замкнений маршрут τ_k'; визначити підграф $\langle S \rangle$ графа H, породжений множиною $S = (V - V') \cup K$, виділити в ньому вершини множини K.

S3. У підграфі графа H, який не містить вершин ступеню 1, знайти всі мости M_m, $m = \overline{1, S}$; якщо підграф не містить мостів, то перейти до кроку S7.

S4. Кожному мосту M_m поставити у відповідність замкнений маршрут e_m; визначити компоненти підграфа H_l'', $l = \overline{1, S+1}$, видаленням з нього всіх мостів, відмітити в кожній компоненті вершини, які інцидентні мостам, знайти компоненту H_1'', яка містить єдину вершину v_1 моста; v_1 – початкова вершина шуканого маршруту комівояжера.

S5. Для кожної компоненти H_l'', $l=\overline{1, S+1}$, розв'язати ЗЗК, тобто побудувати маршрут τ_l'' і відмітити в ньому вершини, інцидентні мостам; якщо в побудованому маршруті містяться вершини $a \in K$, то τ_l'' – маршрут, в якому кожна вершина a замінена на маршрут $\tau_k' = (a, ..., a)$ для дерева H_k' з коренем a.

S6. Побудувати дерево (L, M), де вершині $l \in L$ відповідає маршрут τ_l'', $l=\overline{1, S+1}$, а ребру $\{i, j\} \in M$ – міст M_m, $m=\overline{1, S}$, який з'єднує вершини $p \in \tau_i''$ і $q = \tau_j''$; виконати обхід всіх вершин дерева (L, M), який починається і закінчується у вершині $v_1 \in \tau_1''$, з'єднуючи маршрути τ_l'', $l=\overline{1, S+1}$, і e_m, $m=\overline{1, S}$, в єдиний замкнений маршрут; перейти до кроку S8.

S7. Побудувати маршрут комівояжера.

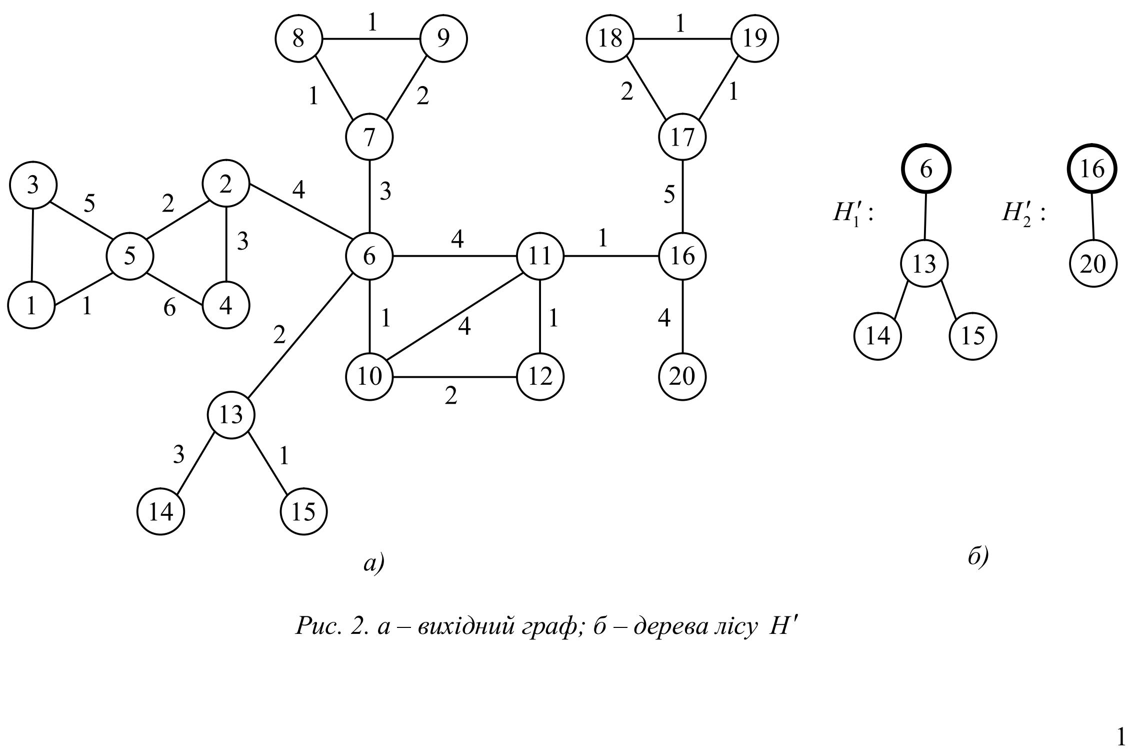
S8. Побудований маршрут є розв'язком ЗЗК.

Трудомісткість методу залежить від кількості компонент H_l'', які виділяються в результаті декомпозиції, і від часу розв'язку ЗЗК на кроці S5 для компоненти з найбільшим об'ємом вхідних даних серед всіх інших компонент. Тому тривалість побудови шуканого маршруту варіюється в широкому діапазоні, обмеженому знизу поліномом від n не вище другого ступеню, а зверху – часовою складністю алгоритму, який виконується на кроці S5. Зазначимо, що час побудови маршруту τ_l'' для компоненти H_l, $l \in \{1, 2, ..., S+1\}$, яка містить точки зчленування, можна зменшити розбиттям її на блоки і розв'язком ЗЗК для кожного блока. В цьому випадку маршрут τ_l'' є результатом очевидної процедури об'єднання отриманих розв'язків.

Приклад 1. На рисунку 2 зображений зв'язний зважений граф H. Для графа H потрібно побудувати маршрут комівояжера мінімальної вартості.

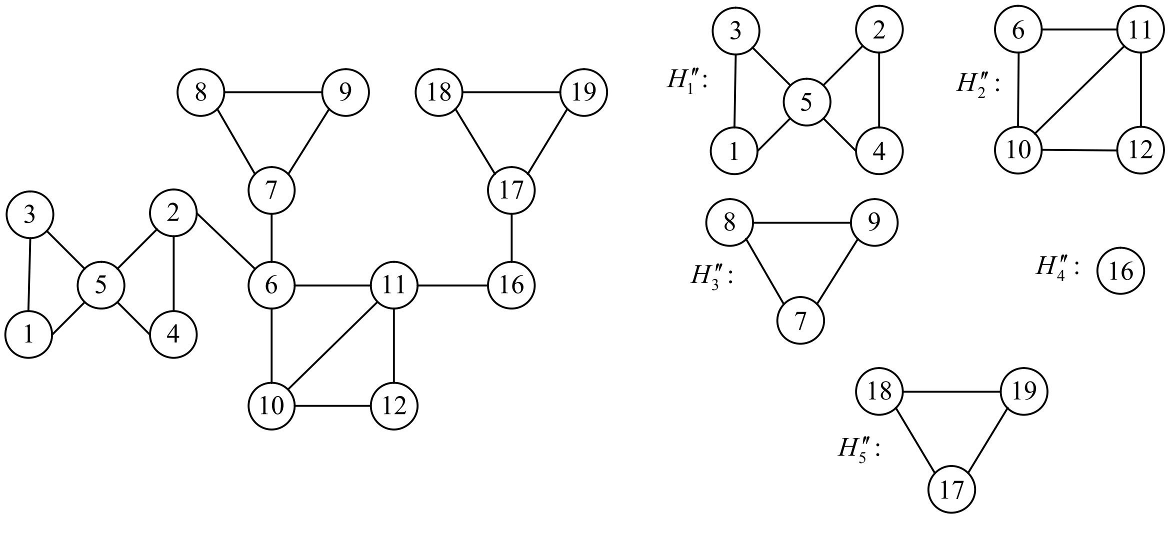
Спочатку виконується алгоритм побудови лісу H', який складається з двох етапів. На першому етапі він впорядковує всі вершини графа H за зростанням їх ступенів: *deg* 14 = 1, *deg* 15 = 1, *deg* 20 = 1, *deg* 1 = 2, *deg* 3 = 2, *deg* 4 = 2, *deg* 8 = 2, *deg* 9 = 2, *deg* 12 = 2, *deg* 18 = 2, *deg* 19 = 2, *deg* 2 = 3, *deg* 13 = 3, *deg* 7 = 3, *deg* 10 = 3, *deg* 16 = 3, *deg* 17 = 3, *deg* 5 = 4, *deg* 11 = 4, *deg* 6 = 5. На другому етапі алгоритм знаходить множину вершин лісу V' = {14, 15, 13, 6, 20, 16}, підмножину кореневих вершин K = {6, 16} і будує дерева H_1', H_2' (рис. 2, *б*). Кореневі вершини дерев на рисунку 2, *б* представлено потовщеними лініями кіл.

Підграф $\langle S \rangle$, який породжений множиною S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 16, 17, 18, 19}, представлено на рисунку 3, *а*.



а) *б)*

Рис. 2. а – вихідний граф; б – дерева лісу H'



а) *б)*

Рис. 3. а – породжений підграф $\langle S \rangle$ *; б – компоненти зв'язності підграфа* $\langle S \rangle$

Алгоритм знаходження точок зчленування встановлює, що в $\langle S \rangle$ лежить 7 таких точок: 2, 5, 6, 7, 11, 16, 17. З них вершини 2, 6, 7, 11, 16, 17 утворюють мости $M_1 = \{2, 6\}$, $M_2 = \{6, 7\}$, $M_3 = \{11, 16\}$, $M_4 = \{16, 17\}$. Видалення мостів призводить до п'яти компонент зв'язності підграфа $\langle S \rangle$ H''_1, H''_2, H''_3, H''_4, H''_5 (рис. 3, *б*).

Для кожного дерева H'_k, $k = \overline{1, 2}$ і кожної компоненти H''_l, $l = \overline{1, 5}$, побудуємо замкнені маршрути комівояжера, які починаються та закінчуються у відмічених вершинах: τ'_1 = (6, 13, 14, 13, 15, 13, 6), τ'_2 = (16, 20, 16), τ''_1 = (2, 4, 2, 5, 3, 1, 5, 2), τ''_2 = (6, 10, 12, 11, 6), τ''_3 = (7, 8, 9, 7), τ''_4 = (16), τ''_5 = (17, 18, 19, 17). У результаті об'єднання маршруту τ'_1 з маршрутом τ''_2 отримаємо маршрут τ''_2 = (6, 13, 14, 13, 15, 13, 6, 10, 12, 11, 6). Об'єднання τ'_2 з τ''_4 дає маршрут τ''_4 = (16, 20, 16).

Дерево (L, M) підграфа $\langle S \rangle$ графа H, представлено на рисунку 4. Для побудови обходу по дереву (L, M) можна обрати як вихідну вершину будь-яку з трьох вершин, які відповідають τ''_1, τ''_3, τ''_5. Визначимо обхід, який починається та закінчується у вершині, яка відповідає τ''_1. Тоді $v_1 = 2$ в маршруті τ''_1.

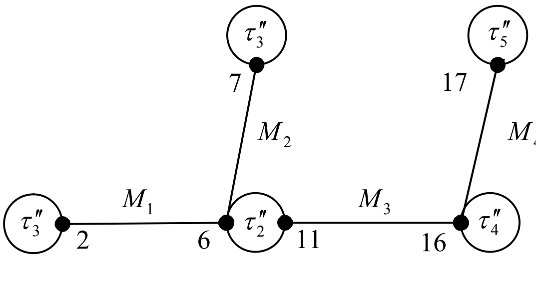


Рис. 4. Дерево (L, M)*, яке відповідає підграфу* $\langle S \rangle$ *графа* H

Побудуємо обхід (1, 2, 3, 2, 4, 5, 4, 2, 1) і відповідний йому маршрут комівояжера для графа H : (2, 4, 2, 5, 3, 1, 5, **2**, **6**, 13, 14, 13, 15, 13, **6**, **7**, 8, 9, **7**, **6**, **11**, **16**, 20, **16**, **17**, 18, 19, **17**, **16**, **11**, 12, 10, **6**, **2**). В отриманій послідовності вершин напівжирним шрифтом відмічені вершини мостів. Маршрут τ''_2 представлений двома частинами (**6**, **11**) и (**11**, 12, 10, **6**), які не слідують безпосередньо одна за одною. Вартість такого розв'язку ЗЗК для графа H :

$$C(\tau)=\sum_{k=1}^{2}C(\tau'_k)+2\sum_{m=1}^{4}C(M_m)+\sum_{l=1}^{5}C(\tau_l)=$$
$$=(2+3+3+1+1+2)+(4+4)+2(4+3+1+5)+(3+3+2+1+4+5+2)+(1+2+1)+(2+2+1)=75 \ \square$$

Прийнявши до уваги точку зчленування 5 компоненти H_1'', отримаємо два блока цієї компоненти H_{11}'' і H_{12}'' (рис. 5).

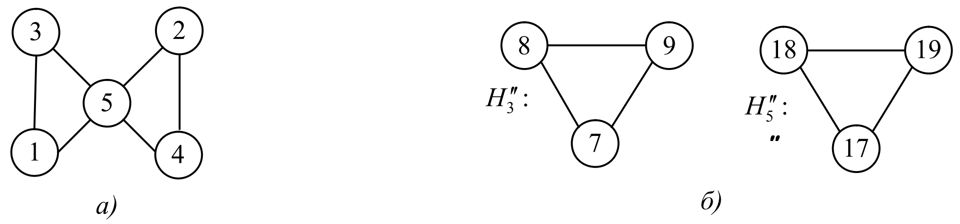


Рис. 5. а – компонента H_1''; б – блоки компоненти H_1''

Маршрут τ_1'' можна побудувати в результаті знаходження розв'язку ЗЗК й об'єднання їх в точці зчленування: $\tau_{11}''=(5, 1, 3, 5)$, $\tau_{13}''=(5, 2, 4, 2, 5)$, $\tau_1''=(5, 1, 3, 5, 2, 4, 2, 5)$. □

Наближений метод розв'язку ЗЗК. Час точного розв'язку ЗЗК експоненціально залежить від порядку її матриці вартостей, якщо механізм декомпозиції встановлює, що граф H транспортної мережі – блок. При досягненні відповідного числа вершин у блоці трудомісткість побудови оптимального маршруту комівояжера стає неприйнятно великою та малопридатною для практичних цілей. Для блоків з об'ємами вхідних даних, які потрібні на практиці, виникає необхідність використання наближених методів розв'язку ЗЗК, що виконуються за поліноміальний час.

Викладений у [2] точний метод розв'язку ЗЗК стає наближеним шляхом заміни на кроці S2 точного алгоритму розв'язку ЗК для повного графа H_α на наближений алгоритм. Властність, якою алгоритм Флойда-Уоршалла наділяє граф H_α, звужує численний список ефективних процедур побудови маршрутів комівояжера до класу поліноміальних методів розв'язку метричної СЗК [1]. Відомі представники цього класу характеризуються аналітично вираженими оцінками точності, які не залежать від розміру вхідних даних задачі. Неперевершеними за точністю залишаються алгоритм Кристофидеса (ММ) і алгоритм А.І. Сердюкова. Для метричної СЗК з матрицею вартостей порядку n вони гарантують за час $O(n^4)$ розв'язок, вартість якого не перевищує $3/2$ вартості оптимального розв'язку. До менш відомих, але більш швидких наближених алгоритмів відносяться процедури MST і NT, які будують для цієї задачі за час $O(n^2)$ розв'язок з похибкою, обмеженою вартістю оптимального розв'язку [3].

Виходячи з аналітично виражених показників точності та швидкодії алгоритму A, обраного для ефективної побудови обходу в повному графі H_α, неважко оцінити час і верхню границю вартості наближеного розв'язку T_A ЗЗК. Нехай граф H представлений блоком. Тоді час побудови T_A при будь-якому обраному алгоритмі A не може бути меншим за час роботи алгоритму Флойда-Уоршалла, трудомісткість якого, як відомо, оцінюється величиною $O(n^3)$. Отже, час наближеного розв'язку ЗЗК визначається трудомісткістю алгоритму A, коли вона перевищує $O(n^3)$.

Якщо в такому графі H_α, який відповідає блоку H, алгоритмом A побудований обхід Π_A, то його вартість $D(\Pi_A)$ і вартість $C(\mathrm{T}_A)$ наближеного розв'язку ЗЗК T_A зв'язані нерівністю:

$$C(\mathrm{T}_A)\le D(\Pi_A), \tag{1}$$

оскільки такою ж нерівністю зв'язані вартості оптимального розв'язку Π і T. Але:

$$D(\Pi_A)\le f_A, \tag{2}$$

де f_A – верхня межа вартості обходу, який побудований у графі H_α алгоритмом A.

З (1) і (2) випливає, що для вхідних даних ЗЗК, які представлені блоком H, справедлива нерівність:

$$C(T_A)\le f_A. \tag{3}$$

Його права частина залежно від алгоритму, який обраний на кроці S2 наближеного методу розв'язку ЗЗК, може приймати значення $f_{MM}=3/2\,D(\Pi)$, $f_{NT}=2D(\Pi)-\min\{D(\alpha_{ij}), i,j=\overline{1,n}\}$, де α_{ij} –

найкоротший ланцюг, який з'єднує вершини i та j в графі H, або ребро $\{i, j\}$ в повному графі H_α; $D(\alpha_{ij})$ – сума ваг ребер, які входять у ланцюг α_{ij} графа H, або вага ребра $\{i, j\}$ в графі H_α.

У загальному випадку граф $H=(V,U)$, $|V|=n$, може містити R блоків, $R>1$. Тоді ЗЗК розбивається на R підзадач. Входом r-ої підзадачі, $r=\overline{1,R}$, є підграф H_r графа H, який містить n_r вершин, серед яких немає точок зчленування. Для кожного підграфа H_r виконаємо наближений метод розв'язку ЗЗК із обраним на кроці S2 ефективним алгоритмом A і об'єднаємо отримані розв'язки τ_r у маршрут комівояжера τ_A^0 графа H. Оцінимо час побудови маршруту τ_A^0 та порівняємо його з часом знаходження розв'язку τ_A алгоритмом A для того ж графа, розглядаючи його як блок.

Якщо граф H складається з блоків та мостів, які їх зв'язують, то:

$$\sum_{r=1}^{R} n_r = n,\ \min\left\{n_r \,\middle|\, r=\overline{1,R}\right\} \geq 3,\ n \geq 6. \tag{4}$$

Максимальна сума вершин в R блоках, які входять в граф H, досягається тоді, коли він не містить мостів та лісу (рис. 5):

$$\sum_{r=1}^{R} n_r = n+R-1,\ \min\left\{n_r \,\middle|\, r=\overline{1,R}\right\} \geq 3,\ n \geq 5. \tag{5}$$

Очевидно, найбільший час на побудову маршруту τ_A^0 потрібний при розбитті $H=(V,U)$ на два блоки $H_1=(V_1,U_1)$, $H_2=(V_2,U_2)$, $|V_1|=n_1$, $|V_2|=n_2$, $V=V_1\cup V_2$.

Припустимо, що часова складність алгоритму A характеризується поліномом другого ступеня від порядку матриці вартостей ЗК. Тоді при $R=2$ справедлива нерівність $n_1^2+n_2^2<n^2$ у випадку (4), де $n_2=n-n_1$, так і у випадку $n_2=n-n_1+1$. Очевидно, відмінність тривалостей побудови τ_A і τ_A^0 при обиранні найбільш трудомісткого наближеного алгоритму A може тільки збільшуватись. Таким чином, блочна структура графа H дозволяє значно прискорити розв'язок ЗЗК.

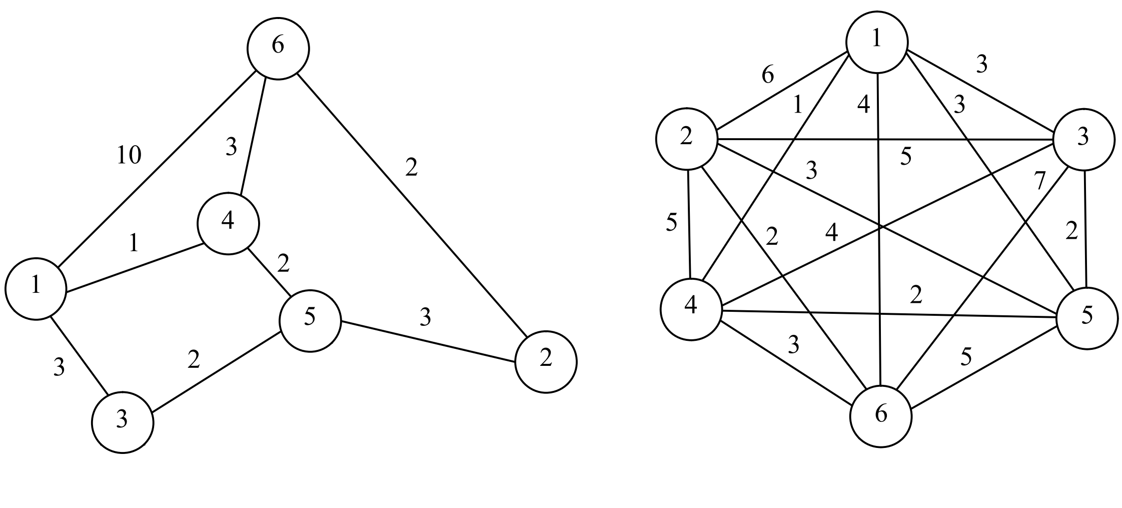
Оцінкою точності розв'язку ЗЗК τ_A^0 ЗЗК є величина f_A, якщо вона не залежить від розміру вхідних даних обраного алгоритму A. Тому:

$$C(\tau) \leq D\left(\tau_A^0\right) \leq f_a,$$

де τ – оптимальний маршрут комівояжера в графі H.

Зрозуміло, що при обиранні наближеного алгоритму A розв'язку метричної СЗК перевагу має той, трудомісткість якого менша за трудомісткість попереднього йому алгоритму Флойда-Уоршалла, а точність вища, ніж точність будь-якої відомої процедури з часом роботи $O(n^2)$, де n – порядок матриці вартостей на вході алгоритму A. Перерахованими властивостями володіє наближений алгоритм розв'язку метричної СЗК, побудований на ідеї швидкого перетворення остовного *i*-дерева повного графа в обхід. Під *i*-деревом розуміють дерево, яке стягує множину вершин $V\setminus\{i\}$ графа $H=\{V,U\}$ і два ребра, які з'єднані з вершиною i [6].

Приклад 2. У блоці $H=(V,U)$ (рис. 6, *а*) побудувати маршрут комівояжера наближеним алгоритмом розв'язку метричної СЗК, який викладено в [6].



а) *б)*

Рис. 6. а – блок $H = (V, U)$; б – повний граф H_α блока H

Матриці маршрутизації:

$\left[\alpha_{ij}\right]_6 =$

	1	2	3	4	5	6
1	∞	(1, 4, 5, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 4, 5)	(1, 4, 6)
2	(2, 5, 4, 1)	∞	(2, 5, 3)	(2, 5, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 5, 2)	∞	(3, 5, 4)	(3, 5)	(3, 5, 2, 6)
4	(4, 1)	(4, 5, 2)	(4, 5, 3)	∞	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 4, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	∞	(5, 4, 6)
6	(6, 2)	(6, 2)	(6, 2, 5, 3)	(6, 4)	(6, 4, 5)	∞

відповідає повний граф H_α з вагами ребер $D\left(\alpha_{ij}\right),\ i, j = \overline{1, 6}$.

Кожна вершина i графа H_α утворює у ньому сімейство i-дерев, включаючи дерево T_i мінімальної вартості, $i = \overline{1, 6}$. Сума ваг ребер T_i є нижньою границею вартості оптимального обходу Π в графі H_α. Щоб побудувати дерево T_i і знайти його вагу $D(T_i)$, потрібно побудувати в повному підграфі графа H_α, визначеному на множині вершин $V \setminus \{i\}$, мінімальне остовне дерево і добавити до нього два ребра з найменшими вагами, інцидентні вершині i. Оскільки $D(T_i) \le D(\Pi)$, $i = \overline{1, 6}$, то довільно оберемо вершину $i = 6$ і побудуємо дерево T_6 (рис. 7, *а*)

Для перетворення дерева T_6 в обхід графа H_α достатньо замінити ребро $\{5, 4\} \in T_6$ на ребро $\{6, 3\} \notin T_6$ в H_α, або ребро $\{6, 4\}$ на ребро $\{6, 3\}$, отримавши в результаті два маршрути (рис. 7, *б*). Оскільки $D(\alpha_{53}) - D(\alpha_{54}) = 2 - 2 = 0$, $D(\alpha_{63}) - D(\alpha_{64}) = 7 - 3 = 4$, то приймемо за наближений розв'язок ЗК для графа H_α маршрут (6, 2, 5, 3, 1, 4, 6), вартість якого, дорівнюючи 14, менша за вартість маршруту (6, 2, 5, 4, 1, 3, 6). Після заміни ребер $\{i, j\}$, які утворюють обраний маршрут, на ланцюги α_{ij} графа H отримаємо наближений розв'язок ЗЗК. Він співпадає із обраним маршрутом і має вартість, яка дорівнює вартості дерева T_6. Тому наближений розв'язок (6, 2, 5, 3, 1, 4, 6) є одночасно оптимальним маршрутом комівояжера у графі *H*.

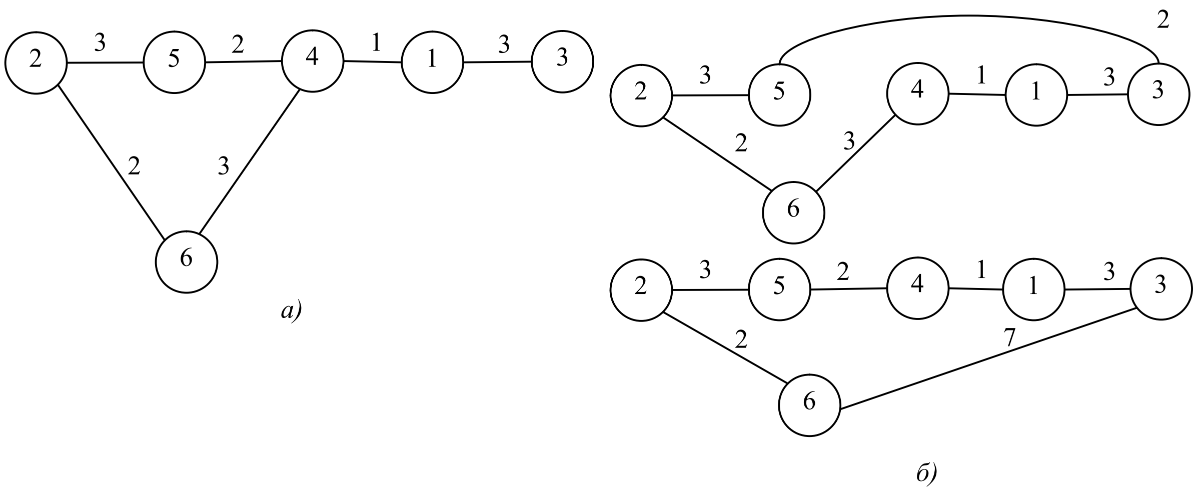


Рис. 7: а – дерево T_6 графа H_α; б – маршрути комівояжера у графі H_α

Висновки. Інколи ЗЗК можуть бути піддані декомпозиції на задачі меншої розмірності, що може суттєво прискорити пошук розв'язку. Запропоновано наближений алгоритм ЗЗК, у складі якого використано наближений алгоритм розв'язку СЗК з відомою оцінкою відхилення від оптимуму, яка не залежить від розміру входу задачі.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Бондаренко М.Ф.* Компьютерная дискретная математика / *М.Ф. Бондаренко, Н.В. Белоус, А.Г. Руткас*. – Харьков : «Компания СМИТ», 2004. – 476 с.

2. *Левченко А.Ю.* Точный алгоритм решения общей задачи коммивояжера / *А.Ю. Левченко, А.В. Панишев* // Вісник Житомирського державного технологічного університету. – 2009. – № 3 (50). – С. 138–143.
3. *Панишев А.В.* Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера / *А.В. Панишев, Д.Д. Плечистый*. – Житомир : ЖГТУ, 2006. – 300 с.
4. *Кормен Т.* Алгоритмы: построение и анализ / *Т.Кормен, Ч.Лейзерсон, Р.Ривест.* – М. : МЦНМО, 2000. – 960 с.
5. *Харари Ф.* Теория графов / *Ф.Харари.* – М. : Мир, 1973. – 300 с.
6. *Гаращенко И.В.* Об одном классе задач построения остовного дерева в неориентированном взвешенном графе / *И.В. Гаращенко, А.В. Панишев* // Искусственный интеллект. – Донецк, 2007. – Вып. 3. – С. 486–493.
7. *Левченко А.Ю.* Приближенное решение общей задачи коммивояжера / *А.Ю. Левченко* // Інформатика та системні науки (ІСН–2011) : матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. – Полтава, 2011. – С. 160–163.
8. *Levchenko A.* / Information Models of Knowledge, ITHEA, Kiev-Sopfia 2010 (KDS 2010) // *A.Levchenko, A.Panishev //* Cycle routes optimization for not full graph. – Pp. 435–441.

ЛЕВЧЕНКО Антон Юрійович – аспірант Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
- комп’ютерно-інформаційні технології;
- комбінаторна оптимізація.

Подано 27.09.2011