

УДК 539.3

І.Г. Грабар, д.т.н., проф.

О.І. Грабар, к.т.н.

Житомирський державний технологічний університет

О.І. Грабар, студ.

Харківський національний університет імені Ярослава Мудрого

МОДЕЛЮВАННЯ КІНЕТИКИ ХАОТИЗАЦІЇ АТТРАКТОРА ФЕЙГЕНБАУМА І ДИНАМІКА НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Запропоновано модель хаотизації аттрактора Фейгенбаума для задач нелінійної динаміки та встановлено кількісні закономірності руху притягувальної траєкторії по даному аттрактору, а також обчислено відносно висоту хаосу цього руху.

Вступ. Постановка проблеми. Відкриття і вивчення детермінованого хаосу [1–5] стало одним із найцікавіших досягнень динаміки нелінійних систем останньої чверті 20-го століття.

Особливе місце в цих роботах посідають результати М.Фейгенбаума в моделюванні кінетики каскаду біфуркацій на відображеннях Пуанкаре невеликої розмірності:

В цих результатах вражає поєднання властивостей, що важко поєднуються:

- простота моделей;
- вражаюча образність;
- доступність;
- строгість та глибина результатів.

За останні 20 років написано тисячі публікацій, присвячених вивченню та застосуванню сценарію Фейгенбаума в теоретичній і прикладній науці, а тема до сьогоднішнього дня видається ще більш невичерпною, як це здавалось на початку 80 років 20 століття.

За останні два десятиліття тільки зріс інтерес до експериментальних робіт, де була виявлена скейлінгова кінетика росту: втомні тріщини, характеристики короткочасної, втомної і тривалої міцності від часу і температури, нелінійні генератори, гідродинамічні системи та багато інших [4–10].

Багатообіцяючим є застосування теорії хаотиків в кібернетиці та кібернетичній лінгвістиці [11].

Раніше [7] досліджувався порядок відвідування граничною траєкторією гілок біфуркаційної діаграми Фейгенбаума одномірною відображення Пуанкаре:

$$x_{i+1} = \alpha - x_i^2, \quad (1)$$

після j -ої біфуркації.

Постановка задачі. Пронумеруємо для заданого $j \in [0; 1; 2; \dots]$ гілки біфуркаційної діаграми (притягувальної точки аттрактора) знизу вгору (рис. 1).

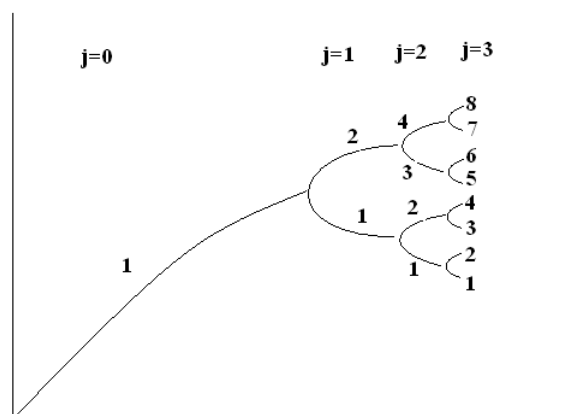


Рис. 1. Біфуркаційна діаграма Фейгенбаума

Як видно з рисунку 1, для $j = 0$ маємо одну гілку, для $j = 1$ – 2 гілки, для $j = 2$ – 4 гілки, після j біфуркації – 2^{j-2} гілок.

Необхідно встановити закономірності руху притягувальної траєкторії по аттрактору Фейгенбаума та кількісно виміряти відносну висоту хаосу цього руху. Як слідує з рисунку 1, аттрактор Фейгенбаума має самоподібну фрактальну структуру.

Історична довідка. У 1883 році Георг КАНТОР описав множину, що тепер носить його ім'я (множина Кантора). Множина Кантора (рис. 2) має потужність континуума, але метрична міра (довжина) дорівнює нулю. При цьому кожен елемент множини Кантора подібний до цілої множини.

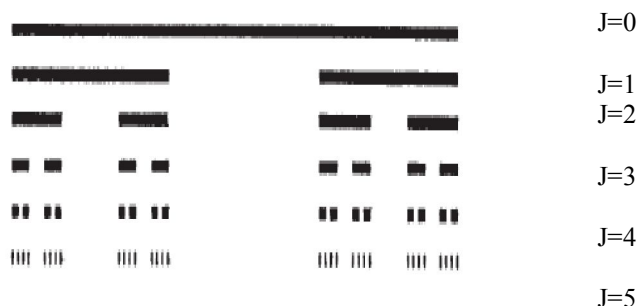


Рис. 2. Множина КАНТОРА (перші 5 поколінь)

У 1904 році Хелге фон КОХ запропонував приклад нерозривної кривої, яка ніде не має дотичної. Це дає можливість побудувати сніжинку, або острів КОХА, якщо за множину нульового покоління взяти рівносторонній трикутник (рис. 3).

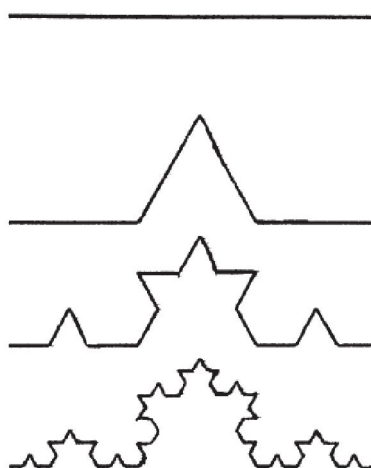


Рис. 3. Фрактальна крива Коха

Для цих випадків метрику одиничної множини можна записати загальною формулою:

$$1 = N \cdot L^D, \tag{2}$$

де D – розмірність простору (самоподібності). З формули (2) найпростіше зрозуміти, що таке фрактальна розмірність і, прологарифмувавши (2), отримати формулу для фрактальної розмірності (D -розмірності самоподібності):

$$D = -\frac{\ln N}{\ln L}. \tag{3}$$

Наприклад, щоб побудувати множину КАНТОРА, необхідно взяти два відрізки довжиною по $\frac{1}{3}$. Тоді:

$$D = -\frac{\ln 2}{\ln \frac{1}{3}} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309.$$

Для кривої КОХА маємо 4 відрізки довжиною $\frac{1}{3}$, звідки фрактальна розмірність:

$$D = -\frac{\ln 4}{\ln \frac{1}{3}} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618...$$

Легко бачити спільні властивості аттрактора Фейгенбаума, множини Кантора та кривої Коха.

Викладення основного матеріалу. Моделювання процесу хаотизації аттрактора Фейгенбаума.

На рисунку 4 зображено схематично порядок відвідування граничної траєкторією гілок біфуркаційної діаграми для перших чотирьох біфуркацій.

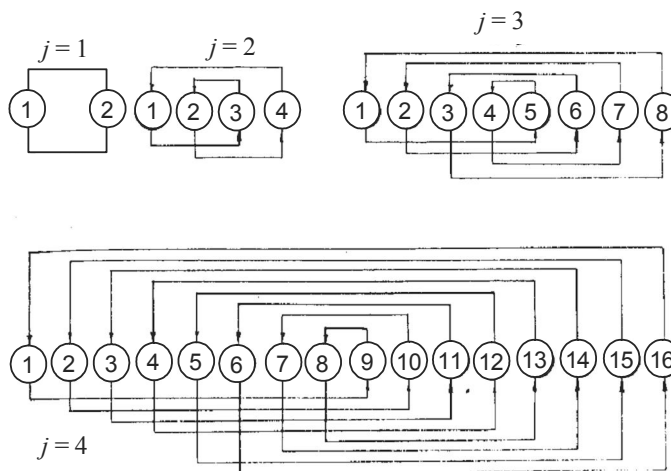


Рис. 4. Порядок відвідування граничною траєкторією гілок біфуркаційної діаграми після j -ої біфуркації

Як було показано раніше [7], для аналізу сценаріїв рисунка 4 доцільно ввести N - R -операції (рис. 5).

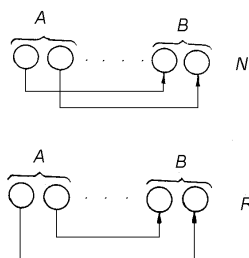


Рис. 5. N - та R -операції

Легко побачити, що на рисунку 4 всі траєкторії повернення (верхні лінії) є R -операціями, а траєкторії віддалення можна навести у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

До загальної формули траєкторій віддалення аттрактора Фейгенбаума

| | | |
|-------|---|---|
| $J=2$ | : | N_2 |
| $J=3$ | : | N_2R_2 |
| $J=4$ | : | $N_4R_2N_2$ |
| $J=5$ | : | $N_8R_4N_2R_2$ |
| | | |
| $J=n$ | : | $N_{2^{n-2}} N_{2^{n-3}} \dots R_2 N_2(N_2R_2)$ |

З нашої точки зору, саме траєкторії віддалення є першопричиною хаотизації (виникнення детермінованого хаосу) відображення (1), оскільки чергування N - та R -операцій призводить до взаємоперетину фазової траєкторії, що в кінцевому результаті при $J \rightarrow \infty$ призводить до непередбачуваності $X_{t \rightarrow \infty}$ в детермінованому відображенні (1).

Розглянемо детальніше кінетику утворення точок самоперетину граничної траєкторії.

Як показує числовий експеримент, результати можуть бути зведено у таблиці 2.

Таблиця 2

Обчислення точок взаємоперетинів аттрактора Фейгенбаума

| | | | | | | | |
|-------------------------------|---------|---|---|---|----|----|-----|
| Порядок біфуркацій | $j = 0$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Кількість гілок $n = 2^j$ | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
| Кількість взаємоперетинів K | 0 | 0 | 1 | 5 | 23 | 97 | 395 |

Як видно з таблиці 2, кількість гілок біфуркаційної діаграми $n = 2^j$, а кількість точок взаємоперетину K_j :

$$\hat{E}_j \sim 4^j.$$

Для обчислення кількості точок взаємоперетину траєкторії нами запропоновано ітераційне співвідношення:

$$\hat{E}_{j+1} = 4K_j + 2^j - 3. \tag{4}$$

Перехід в ітераційній формулі (4) до початку відліку дає:

$$\hat{E}_j = 4^{j-2} + 1 \cdot 4^{j-3} + 3 \cdot 4^{j-4} + 5 \cdot 4^{j-5} + 7 \cdot 4^{j-6} + \dots = 4^{j-2} + \sum_{i=1}^{i=j-2} (2i-1) 4^{j-i-2}, \tag{5}$$

(5) зводиться до спрощеного вигляду:

$$K_j = G \cdot 4^j, \tag{6}$$

де множник G може бути обчислений за формулою:

$$G = \frac{1}{16} \left(1 + \sum_{i=1}^{i=j-2} \frac{2i-1}{4i} \right). \tag{7}$$

Згортка в (7) може в загальному вигляді бути записана, як:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=j-2} \dots &= \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_0 + d}{b_0 q} + \frac{a_0 + 2d}{b_0 q^2} + \frac{a_0 + 3d}{b_0 q^3} + \dots = \\ &= \frac{a_0}{b_0} \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots \right) + \frac{d}{b_0 q} \left(1 + \frac{2}{q} + \frac{3}{q^2} + \frac{4}{q^3} + \dots \right) = \\ &= \frac{a_0}{b_0} \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots \right) + \frac{d}{b_0 q} \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots \right) + \\ &\quad + \frac{d}{b_0 q^2} \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots \right) + \frac{d}{b_0 q^3} \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots \right) + \dots \end{aligned} \tag{8}$$

Для $q > 1$ і $j \rightarrow \infty$ може бути значно спрощено:

$$\sum_{i=1}^{i=j-2} (\dots) = \frac{q}{bd(q-1)} \left[a_0 + \frac{d}{q-1} \right]. \tag{9}$$

Так для випадку (7) маємо $a_0 = 1, d = 2, b_0 = q = 4$. Звідки з (9) можемо отримати:

$$\sum_{i=1}^{i=j-2} \dots = \left(\frac{4}{4(4-1)} \right) \left[1 + \frac{2}{4-1} \right] = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} \right) = \frac{5}{9}. \tag{10}$$

Тоді число точок взаємоперетину граничної траєкторії відображення Пуанкаре (1) після j -ї біфуркації може бути обчислене, з врахуванням (6)–(10):

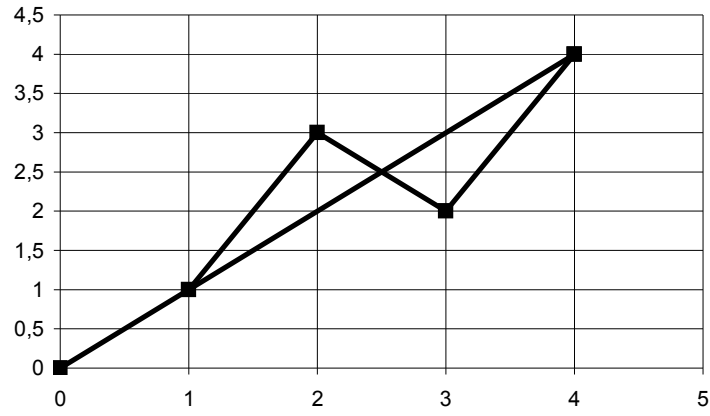
$$\lim_{j \rightarrow \infty} K_j = \frac{1}{16} \left(1 + \frac{5}{9} \right) \cdot 4^j = \frac{14}{9} \cdot 4^{j-2}. \tag{11}$$

Для значень $j < \infty$ обчислювати кількість точок взаємоперетину граничної траєкторії можна користуватись наближенням:

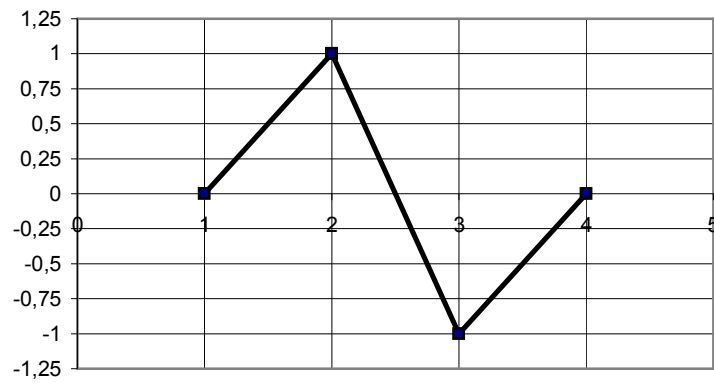
$$\hat{E}_j \approx 0,1 \cdot 4^j, \tag{12}$$

яке для $j \geq 5$ дає похибку не більше 5 %.

На рисунках 6–9 наведено графіки кінетики руху по аттрактору Фейгенбаума після 2, 3, 4 та 5-ї біфуркацій.

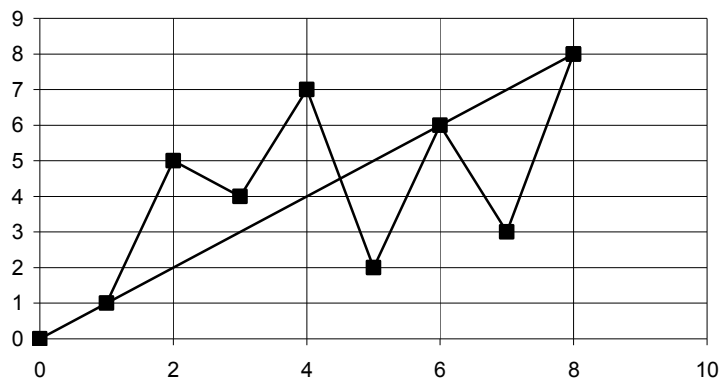


a)

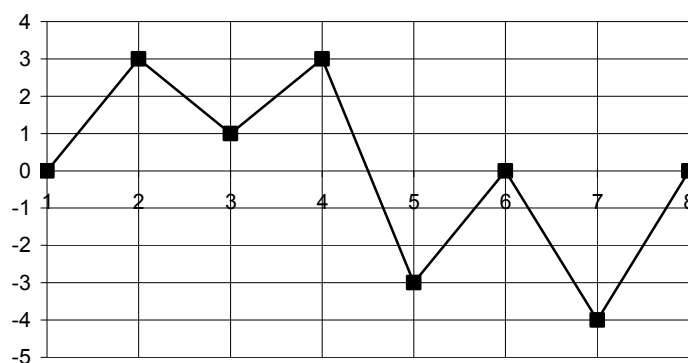


б)

Рис. 6. Порядок відвідування граничною траєкторією гілок біфуркаційної діаграми після $j = 2$ біфуркації (а – порядок включення гілки притягувальної множини, б – хаотизація)

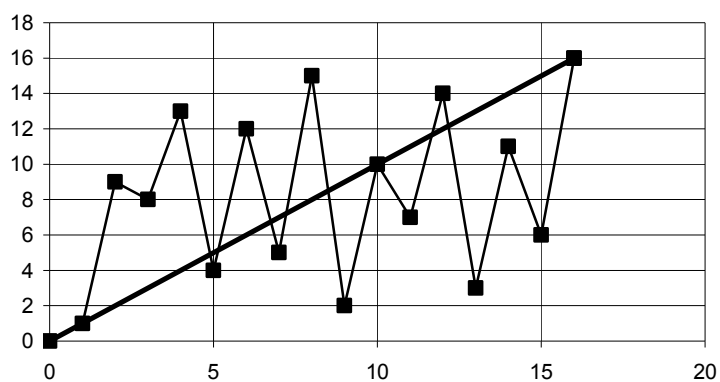


a)

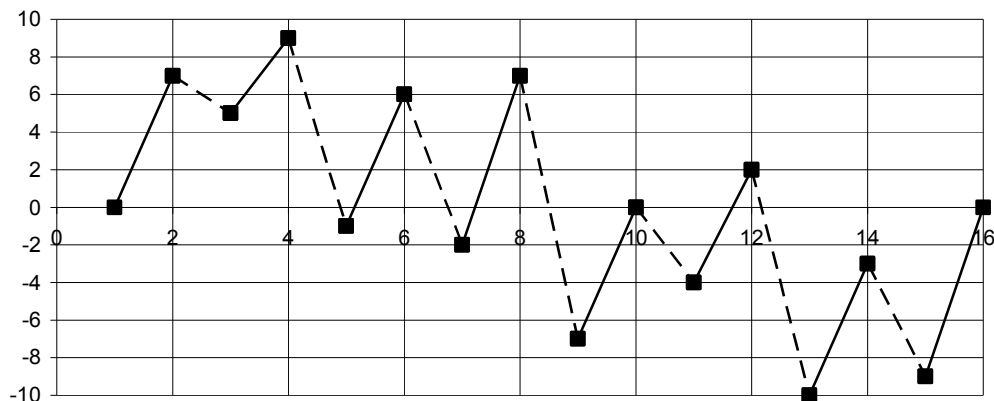


б)

Рис. 7. Порядок відвідування граничної траєкторією гілок біфуркаційної діаграми після $j = 3$ біфуркації (а – порядок включення гілки притягувальної множини, б – хаотизація)



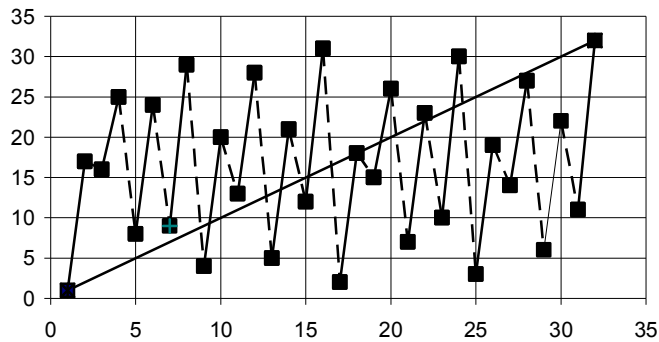
а)



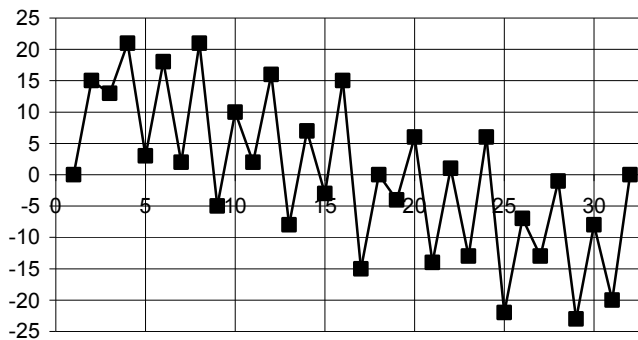
б)

Рис. 8. Порядок відвідування граничної траєкторією гілок біфуркаційної діаграми після $j = 4$ біфуркації (а – порядок включення гілки притягувальної множини, б – хаотизація)

б – хаотизація)



a)



б)

Рис. 9. Порядок відвідування граничною траєкторією гілок біфуркаційної діаграми після $j = 5$ біфуркації (а – порядок включення гілки притягувальної множини, б – хаотизація)

Обчислення висоти хаосу (міри безпорядку) в аттракторі Фейгенбаума методом Грони.

Використовуючи ітераційний алгоритм Грони [11] для оцінки висоти хаосу λ в одномірних стохастичних масивах:

$$\lambda(n+1) = n \cdot \lambda(n) + (n-i), \tag{13}$$

показано, що кожна із перестановок групи із $\{n\}$ елементів має своє, тільки їй притаманне, значення λ , що знаходиться в діапазоні $[0 \dots n!-1]$. Таким чином, нами вперше показано, що масив перестановок $n!$ можна строго ранжувати за скалярною мірою – показником висоти хаосу (ВХ) λ . Наприклад, група із $n = 4$ елементів має $4! = 24$ перестановки. За величиною ВХ, обчисленою за ітераційною формулою (13), їх можна розмістити по ранжиру в порядку зростання λ :

Таблиця 3

Результати обчислення висоти хаосу в повній групі перестановок $4!$

| Перестановка | λ | Перестановка | λ | Перестановка | λ |
|--------------|-----------|--------------|-----------|--------------|-----------|
| 1234 | 0 | 3124 | 8 | 2314 | 16 |
| 1243 | 1 | 3142 | 9 | 2341 | 17 |
| 1423 | 2 | 3412 | 10 | 2431 | 18 |
| 4123 | 3 | 4312 | 11 | 4231 | 19 |
| 1324 | 4 | 2134 | 12 | 3214 | 20 |
| 1342 | 5 | 2143 | 13 | 3241 | 21 |

| | | | | | |
|------|---|------|----|------|----|
| 1432 | 6 | 2413 | 14 | 3421 | 22 |
| 4132 | 7 | 4213 | 15 | 4321 | 23 |

Легко побачити, що перенормування

$$\Lambda = \frac{\lambda}{n!}, \tag{14}$$

дозволяє отримати відносну висоту хаосу (ВВХ) в перестановці, що буде змінюватись в діапазоні [1...0].

Значно складніше провести ранжування на векторних чи тензорних масивах, коли одночасно кожен елемент групи має кілька ознак. Але саме такі задачі мають найбільший інтерес у сучасних дослідженнях багатовимірних величин, коли потрібно порівнювати (ранжувати) елементи багатовимірних масивів – механічні напруги в задачах міцності, ознаки деталей машин в автоматизованих складальних виробництвах, порівняння будь-яких елементів множин за двома чи більше ознаками одночасно, в тому числі – в сучасних комп’ютеризованих експертних системах, наприклад, – встановлення авторства в творах літератури та мистецтва.

Нами проведено повне статистичне моделювання виміру висоти перестановок для груп невеликої потужності ($n \leq 5$) для розмірностей $m \in (1; 2; 3)$. Показано принципова можливість застосування комбінованого методу Грони для впорядкованості багатовимірних векторних чи тензорних масивів. Ідея комбінованого методу Грони полягає в розділеному вимірі висоти хаосу по кожному з індексів λ_{ij} багатовимірної змінної з подальшим їх додаванням:

$$\lambda_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}, \tag{15}$$

наприклад, для $n = 4, m = 2$ побудовано λ_{Σ} для всіх $(4!) \cdot (4!) = 576$ перестановок і встановлено, що із 24 сценаріїв можливих комбінацій індексів елементів є вісім пар “близнюків”. Кожна із можливих комбінацій перестановок 4-х двовимірних елементів має висоту хаосу в діапазоні [0...46].

Проведені дослідження дозволяють запропонувати, крім методології ранжування багатовимірних масивів, нові підходи до розробки психологічних тестів, генерування задач на встановлення закономірностей, а також загальну методологію приведення багатовимірних величин до скалярної міри – висоти хаосу.

Використовуючи ітераційну формулу Грони (13), а також послідовність відвідування граничної траєкторією гілок біфуркаційної діаграми Фейгенбаума після j -ої біфуркації (рис. 1, 6–9), нами обчислено характеристики висоти хаосу для кожного з цих випадків (табл. 4).

Таблиця 4

Визначення висоти хаосу в аттракторі Фейгенбаума

| | Перестановка (рис. 1) | Висота хаосу λ | Відносна висота хаосу Λ |
|-------|---|---|---------------------------------|
| J = 1 | 1 2 | 0 | 0 |
| J = 2 | 1 3 2 4 | 4 | 0,16666 |
| J = 3 | 1 5 4 7 2 6 3 8 | 4448 | 0,110317460... |
| J = 4 | 1 9 8 13 4 12 5 15 2 10 7 14 3 11 6 16 | 2104116955072 | 0,1005657929... |
| J = 5 | 1 17 16 25 8 24 9 29 4 20 13 28 5 21 12 31 2 18 15 26 7 23 10 30 3 19 14 27 6 22 11 32 | 26461156440061215694704511145162624 | 0,100562734297574... |
| J = 6 | 1 33 32 49 16 48 17 57 8 40 25 56 9 41 24 61 4 36 29 52 13 45 20 60 5 37 28 53 12 44 21 63 2 34 31 50 15 47 18 58 7 39 26 55 10 42 23 62 3 35 30 51 14 46 19 59 6 38 27 54 11 43 22 64 | 12760096847242944399085696871907252 5489984145420191266970962650502824 85338776834091450112 | 0,100562734297571... |

Враховуючи, що факторіали:

$2! = 2$

$4! = 24$

$8! = 40320$

$16! = 20922789888000$

$32! = 263130836933693530167218012160000000$

64!=

=126886932185884164103433389335161480802865516174545192198801894375214704230400000000000000,

сучасними комп'ютерними засобами легко обчислюються, можемо обрахувати відносну висоту хаосу (останній стовпчик табл. 4). На рисунку 10 зображено графік залежності $\Lambda_{\min}(J)$. Це дозволило встановити, що Λ_{\min} асимптотично наближається до граничного мінімального значення $\Lambda_{\min}(J)_{\lim} = 0,100562734297571\dots$. Автори пропонують гіпотезу, що дане значення $\Lambda_{\min}(J)_{\lim}$ є новою, невідомою раніше, самостійною математичною константою. Якщо це так, тоді аттрактор Фейгенбаума [2] ошасливить нас ще однією – третьою! – новою константою! В подальших наших публікаціях ми будемо намагатись дати більш строге доведення цього.

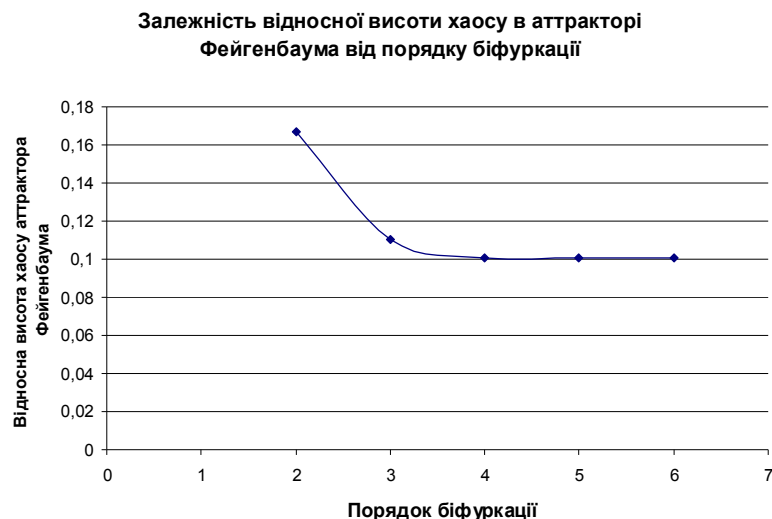


Рис. 10

Висновки:

1. Запропоновано загальну модель кінетики процесу хаотизації аттрактора Фейгенбаума та досліджено кількісні характеристики взаємоперетину його граничної траєкторії після j -ої біфуркації.

2. Показано, що точки взаємоперетину виникають на траєкторіях віддалення, як результат взаємодії N та R відображень, і отримана загальна формула побудови траєкторій віддалення.

3. Показано, що після j -ої біфуркації для $j \geq 5$ число точок взаємоперетину траєкторій віддалення може бути з похибкою, не більше 5 %, обчислене за наближеним співвідношенням. $K_j \approx 0,1 \cdot 4^j$. Для $j < \infty$ отримано гранична точка значення $K_{j \rightarrow \infty} = \frac{14}{144} \cdot 4^j$.

4. Для аттрактора Фейгенбаума обчислена висота і відносна висота хаосу та показано, що після j -ої біфуркації при $j \rightarrow \infty$ Λ прямує до граничного значення відносної висоти хаосу $\Lambda_{\lim} = 0,100562734297571\dots$

5. Автори запропонували гіпотезу, що отримане ними значення $\Lambda_{\lim} = 0,100562734297571\dots$ є новою, невідомою раніше, самостійною математичною константою, вже третьою константою для аттрактора Фейгенбаума.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Г.Хакен. – М. : Мир, 1985. – 411 с.
2. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем / М.Фейгенбаум. – УФН, 1983. – Т. 141, № 2. – С. 343–374.
3. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение / Г.Шустер. – М. : Мир, 1988. – 240 с.
4. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах / В.С. Анищенко. – М. : Наука, 1990. – 312 с.
5. Мун Ф. Хаотические колебания / Ф.Мун. – М. : Мир, 1990.
6. Шанявский А.А. Самоорганизация кинетики усталостных трещин / А.А. Шанявский // Синергетика и усталостное разрушение металлов. – М. : Наука, 1989. – С. 57–76.
7. Грабар І.Г. Термоактивационний аналіз та синергетика руйнування / І.Г. Грабар. – Житомир : ЖІТІ, 2002. – 312 с.

8. *Иванова В.С.* Разрушение металлов / *В.С. Иванова.* – М. : Металлургия, 1979. – 167 с.
9. *Баланкин А.С.* Самоорганизующиеся и диссипативные структуры в деформируемом теле / *А.С. Баланкин* // Письма в ЖТФ. – 1989. – Т. 15, № 19.
10. Уровни прочности и релаксационные явления в полимерах // *Б.Цой, С.Н. Каримов, В.К. Князев и др.* // ВМС. – 1985. – Т. 27, № 3. – С. 132–176.
11. *Грони В.* Основи математичної кібернетики / *В.Грони.* – Житомир : ЖДТУ, 2004 – 428 с.

ГРАБАР Іван Григорович – доктор технічних наук, професор, проректор з наукової роботи Житомирського національного агроєкологічного університету.

Наукові інтереси:

- синергетика;
- нелінійні явища;
- процеси мікрорезонансної біоактивації в живій і неживій природі;
- кількісні міри хаосу.

ГРАБАР Ольга Іванівна – кандидат технічних наук, викладач Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

- комп'ютерне моделювання;
- нелінійна динаміка;
- синергетика.

ГРАБАР Олена Іванівна – студентка Харківського національного юридичного університету імені Ярослава Мудрого.

Наукові інтереси:

- синергетика;
- хаотики та їх застосування в експертизі авторства творів мистецтва.

Подано 18.05.2011