УДК 519.67

С.І. Яремчук, к.ф.-м.н., доц.
Ю.О. Шаповалов, к.т.н.
Житомирський державний технологічний університет

ОТРИМАННЯ ПОЧАТКОВОГО НАБЛИЖЕННЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗМІЩЕННЯ ОБ'ЄКТІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Наведено математичні постановки й використано штрафні функції, методи безумовної оптимізації та апарат лінійного програмування для генерації початкового розміщення об'єктів на заданій області.

Вступ. Задачі оптимізації розміщення геометричних об'єктів на обмеженій області мають велике практичне значення, та водночас розв'язання даних задач є складною проблемою. Слід зазначити, що задача пошуку початкового наближення для методів оптимізації розміщення також не є тривіальною. Її складність залежить не тільки від форми області, форми та кількості об'єктів, але й від їх розмірів. Іноді за допомогою методів, що застосовуються для пошуку початкового наближення, не вдається знайти жодного припустимого розміщення, але й складно перевірити, що задача дійсно не має розв'язків. Існують часткові випадки задач розміщення, що мають тільки один припустимий розв'язок, який і є оптимальним. Звичайно, чим ближче параметри задачі до вказаного часткового випадку, тим складніше розв'язати задачу пошуку початкового наближення. Зазвичай математичні постановки задач відшукання початкового наближення та методи їх розв'язання виходять за рамки наукових статей, присвячених методам розв'язання задач оптимального розміщення.

Постановка проблеми. В даному дослідженні розглядаються задачі пошуку початкового наближення для методів розв'язання задач оптимізації розміщення об'єктів, які можна розкласти на прямокутники (паралелепіпеди) на опуклій області, що деформована зонами заборони у вигляді прямокутників (паралелепіпедів).

Аналіз джерел дослідження. Для розв'язання задач оптимізації розміщення використовуються різноманітні методи. Деякі з них, наприклад [1], вільні від проблеми пошуку початкового наближення, оскільки не потребують припустимого початкового розв'язку. Але існує багато методів умовної оптимізації, що застосовуються для розв'язання задач розміщення, які потребують для своєї роботи початкового припустимого наближення (наприклад, методи, що використовуються в дослідженнях [2–4]).

Мета даного дослідження: навести математичні постановки задач відшукання початкового наближення та методи їх розв'язання.

Основна частина. Для спрощення розглянемо задачу оптимізації розміщення орієнтованих прямокутних об'єктів $D_1, D_2, ..., D_m$ на опуклій області Ω. Методи, що розглядаються у даному дослідженні, можна застосовувати для задач розміщення об'єктів, які можна розкласти на орієнтовані прямокутники, а також для задач більшої вимірності (розміщення паралелепіпедів та об'єктів, які можна розкласти на паралелепіпеди).

На розміщення накладено умови взаємного неперетину прямокутників та невиходу їх за межі області розміщення. Положення i-го об'єкта на області визначається координатами його геометричного центра $Z^i = (\xi_1^i, \xi_2^i)$. Кожному розміщенню відповідає вектор $Z = (Z^1, Z^2, ..., Z^m)$, де m – кількість об'єктів.

Маємо задачу оптимізації розміщення (рис. 1), яка в загальному випадку записується так:

$$\chi(Z) \to \min, \quad Z \in G, \qquad ()$$

де $Z(Z^1, Z^2, ..., Z^m)$ – параметр розміщення; $\chi(Z)$ – критерій якості; G – множина припустимих розв'язків задачі, яка визначається обмеженнями неперетину об'єктів та невиходу їх за межі заданої області.

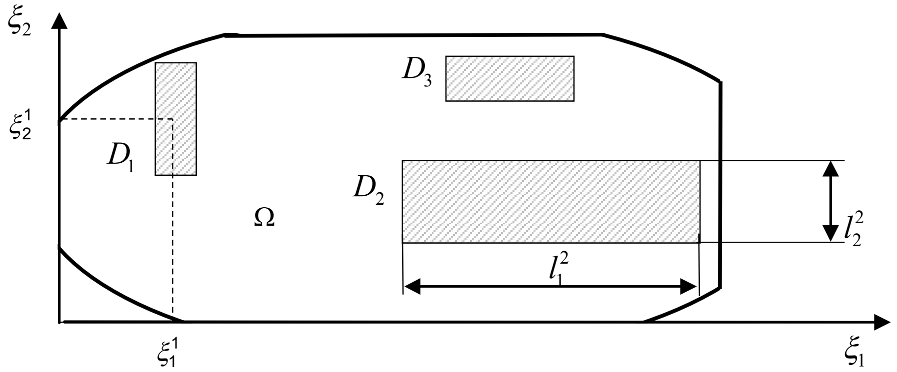

Рис. 1. Приклад припустимого розміщення

Вигляд умов невиходу об'єктів за межі області Ω залежить від форми цієї області. В загальному випадку ці обмеження записуються так:

$$\varphi_i(Z) \le 0,\ i = \overline{1,s}, \tag{}$$

де $\varphi_i(Z)$ − опуклі на опуклій множині $X \supset G$; s − кількість обмежень, яка залежить від форми області Ω , форми та кількості об'єктів.

Для забезпечення взаємного неперетинання прямокутних об'єктів достатньо, щоб для кожної пари прямокутників (D_j, D_k) виконувалася хоча б одна з умов:

$$\left|\xi_i^j - \xi_i^k\right| \ge \frac{l_i^j + l_i^k}{2},\ i = \overline{1,2},\ j = \overline{1,m},\ k = \overline{1,m},\ j \ne k. \tag{}$$

Навіть у випадку розміщення прямокутних об'єктів у прямокутній області система обмежень задачі () описує неопуклу, багатозв'язну, часто незв'язну множину припустимих розв'язків [4]. Для розв'язання задачі використовується декомпозиція множини G на опуклі підмножини:

$$G = \bigcup_{j=1}^{r} G_j,\ r = (2n)^{\frac{m(m-1)}{2}}, \tag{}$$

де n − вимірність простору $R^n \supset \Omega$; m − кількість прямокутників.

Розв'язання вихідної задачі замінюється розв'язанням сукупності таких підзадач:

$$\chi(Z) \to \min, Z \in G_j,\ j = \overline{1,r}. \tag{}$$

Зазвичай кількість підзадач () є дуже великою, тому вони обираються випадково або за деякими правилами їх вибору. Через особливості декомпозиції частина підмножин (4) є порожньою. При випадковому виборі підзадач маємо задачу пошуку початкового наближення

$$Z^0 \in G \tag{}$$

та задачу побудови системи обмежень відповідної підзадачі, якій належить початкове наближення $G_j \subset G$, $Z^0 \in G_j$. Для пошуку початкового наближення можна використати перехід до задачі безумовної оптимізації за допомогою штрафних функцій або різноманітні евристичні алгоритми.

Застосування функцій штрафу для пошуку припустимого розв'язку задачі

Обмеження, які накладено на розміщення об'єктів, полягають у їх взаємному неперетині та належності до області розміщення. Тому функцію штрафу будемо будувати як суму відповідних допоміжних штрафних функцій. Одна з них буде визначати штраф, що накладається на взаємне перетинання об'єктів, а друга − визначати штраф на вихід об'єктів за межі області розміщення [5].

Таким чином, маємо задачу безумовної оптимізації:

$$f(Z,C) = \mu(Z,C) + g(Z,C) \to \min, Z \in R^{nm}, \tag{}$$

де $g(Z,C)=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} g_{ij}\left(Z^i,Z^j,C\right)$ – функція, що визначає штраф на перетин прямокутників; $\mu(Z,C)=\sum_{i=1}^{m}\mu_i\left(Z^i,C\right)$ – функція, що визначає штраф на вихід прямокутників за межі області Ω; $C>1$ – параметр методу.

Можна запропонувати багато варіантів запису функцій $\mu(Z,C)$ та $g(Z,C)$. Наприклад, використовуючи ідею з [1], функцію штрафу на перетин прямокутників можна записати так:

$$g(Z,C)=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}\left[C\max\left\{0,\frac{\left(l_1^i+l_1^j\right)^2}{4}-\left(\xi_1^i-\xi_1^j\right)^2\right\}^2\times\max\left\{0,\frac{\left(l_2^i+l_2^j\right)^2}{4}-\left(\xi_2^i-\xi_2^j\right)^2\right\}^2\right],$$

де m – кількість прямокутників; $\xi^i\left(\xi_1^i,\xi_2^i\right)$ – координати полюса прямокутника.

Штраф на вихід за межі області розміщення можна накласти так:

$$\mu(Z,C)=\sum_{p=1}^{s}\left[C\max\left\{0,\varphi_p(Z)\right\}^2\right],$$

де $\varphi_p(Z)$ – функції з обмежень ().

Таким чином, функція штрафу для пошуку початкового наближення до розв'язку задачі розміщення прямокутників має вигляд:

$$f(Z,C)=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}\left[C\max\left\{0,\frac{\left(l_1^i+l_1^j\right)^2}{4}-\left(\xi_1^i-\xi_1^j\right)^2\right\}^2\times\right.$$
$$\left.\times\max\left\{0,\frac{\left(l_2^i+l_2^j\right)^2}{4}-\left(\xi_2^i-\xi_2^j\right)^2\right\}^2\right]+\sum_{p=1}^{s}\left[C\max\left\{0,\varphi_p(Z)\right\}^2\right].\qquad ()$$

Окрім функції (), для знаходження припустимого розміщення можна використовувати таку функцію штрафу:

$$f(Z,C)=C\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}\max\left\{0,\sqrt{\left(\frac{\left(l_1^i+l_1^j\right)^2}{4}-\left(\xi_1^i-\xi_1^j\right)^2\right)^2+\left(\frac{\left(l_2^i+l_2^j\right)^2}{4}-\left(\xi_2^i-\xi_2^j\right)^2\right)^2}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\left(l_1^i+l_1^j\right)^2}{4}-\left(\xi_1^i-\xi_1^j\right)^2\right)+\left(\frac{\left(l_2^i+l_2^j\right)^2}{4}-\left(\xi_2^i-\xi_2^j\right)^2\right)\right\}+C\sum_{p=1}^{s}\max\left\{0,\varphi_p(Z)\right\}.$$

Слід зазначити, що навіть у випадку диференційованості функції цілі задачі () застосування градієнтних методів є недоцільним, тому що функція цілі задачі () має яружний характер та багато локальних екстремумів. У результаті градієнтні методи безумовної оптимізації передчасно зупиняються без отримання припустимого розміщення. Тому для розв'язання задачі () використовується метод циклічного покоординатного спуску, який описано в [6]. Початкове наближення до розв'язку задачі () обирається випадково. Якщо в процесі розв'язання задачі отримуємо точку Z^k, для якої $f\left(Z^k,C\right)=0$, Z^k – припустиме розміщення. Якщо ж у результаті розв'язання задачі () отримаємо Z^k – розв'язок задачі, для якого $f\left(Z^k,C\right)>0$, Z^k – неприпустиме розміщення. Для знаходження припустимого розміщення випадково обирається нове початкове наближення, та процес повторюється. Якщо припустимого розміщення не існує, тоді для всіх спроб $f\left(Z^k,C\right)>0$. Слід зазначити: якщо для усіх проведених спроб $f\left(Z^k,C\right)>0$, це не гарантує того, що задача не має розв'язку.

Для задачі оптимізації розміщення паралелепіпедів або об'єктів, кожен з яких можливо розбити на паралелепіпеди, можна побудувати таку функцію штрафу:

$$f(Z,C)=\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}\left[C\max\left\{0,\frac{\left(l_1^i+l_1^j\right)^2}{4}-\left(\xi_1^i-\xi_1^j\right)^2\right\}^2\times\max\left\{0,\frac{\left(l_2^i+l_2^j\right)^2}{4}-\left(\xi_2^i-\xi_2^j\right)^2\right\}^2\times\right.$$

$$\left.\times\max\left\{0,\frac{\left(l_3^i+l_3^j\right)^2}{4}-\left(\xi_3^i-\xi_3^j\right)^2\right\}^2\right]+\sum_{p=1}^{s}\left[C\max\left\{0,\varphi_p(Z)\right\}^2\right].$$

Система обмежень підзадачі G_j складається з обмежень () та однієї з чотирьох нерівностей для кожної пари об'єктів $\left(D_j,D_k\right)$:

$$\xi_1^j-\xi_1^k\geq\frac{l_1^j+l_1^k}{2};\ \xi_1^k-\xi_1^j\geq\frac{l_1^j+l_1^k}{2};\ \xi_2^j-\xi_2^k\geq\frac{l_2^j+l_2^k}{2};\ \xi_2^k-\xi_2^j\geq\frac{l_2^j+l_2^k}{2},\qquad ()$$

$$j=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,m},\quad j\neq k.$$

При побудові системи обмежень, що відповідає підмножині G_j, яка містить знайдене початкове наближення $Z^0\in G_j\subset G$, для кожної пари прямокутників $\left(D_j,D_k\right)$ обирається та з нерівностей (), що задовольняє відповідні координати вектора Z^0.

Пошук припустимого розв'язку, який належить заданій підмножині

При розв'язанні підзадач () виникає необхідність пошуку початкового наближення, що належить вказаній підмножині $G_j\subset G$. У випадку, коли множина припустимих розв'язків підзадачі () описується лінійними нерівностями (має вигляд багатокутника або багатогранника), початкове розміщення можна знайти за допомогою симплекс-методу. Обмеження неперетину об'єктів мають вигляд:

$$\varphi_{ij}(Z)\geq b_{ij},\ i=\overline{1,m-1},\ j=\overline{i+1,m},\ b_{ij}>0.\qquad ()$$

Якщо область розміщення має вигляд прямокутника, обмеження невиходу мають вигляд:

$$\frac{l_i^j}{2}\leq\xi_i^j\leq a_i-\frac{l_i^j}{2},\ i=\overline{1,2},\ j=\overline{1,m},\qquad ()$$

де $a(a_1,a_2)$ – розміри області Ω; $L^j\left(l_1^j,l_2^j\right)$ – розміри j-го прямокутника, $j=\overline{1,m}$.

Для зведення системи обмежень ()–() до вигляду, зручного для застосування симплекс-методу, в усі обмеження вводяться додаткові змінні. Одне з обмежень буде містити штучну змінну.

Функція цілі задачі лінійного програмування містить лише штучну змінну з коефіцієнтом "1".

Після застосування симплекс-методу отримаємо припустиме розміщення або з'ясуємо, що множина припустимих розв'язків підзадачі () є порожньою.

У випадку, коли система обмежень підзадачі містить нелінійні обмеження, початкове розміщення можна отримати методом циклічного покоординатного спуску з використанням штрафних функцій.

Висновки. В результаті даного дослідження наведено методи отримання початкового розміщення об'єктів для довільної підмножини припустимих розв'язків з подальшим формуванням системи обмежень під задачі та способи отримання початкового наближення, що відповідає заданій підмножині. Звичайно, наведені методи мають свої недоліки. При застосуванні штрафних функцій не гарантовано отримання припустимого розв'язку, а застосування симплекс-методу обмежене випадком пошуку початкового розміщення для окремої підзадачі з лінійними обмеженнями.

Перспективою подальших досліджень є розробка більш ефективних методів пошуку початкового розміщення.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Orthogonal packing of rectangular items within arbitrary convex region by nonlinear optimization / *E.G. Birgin, J.M. Marinez, F.H. Nishihara, D.P. Ronconi* // Computers & Operations Research. – 2006. – № 33. – Pp. 3535–3548.
2. *Яремчук С.І.* Застосування методу G-проекції для оптимізації розміщення прямокутників в області складної форми / *С.І. Яремчук, Ю.О. Шаповалов, В.В. Охмак* // Вісник ЖДТУ. – 2008. – № 4(37). – С. 196–200.
3. *Яремчук С.И.* Минимаксная задача оптимизации размещения объектов специального вида на многосвязной области / *С.И. Яремчук, Ю.А. Шаповалов* // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 3. – С. 128–137.
4. *Яремчук С.І.* Модифікація методу умовного градієнта для розв'язання задач оптимального розміщення джерел фізичних полів / *С.І. Яремчук, Д.О. Жовновський, А.В. Співак* // Вісник ЖІТІ / Технічні науки. – 1999. – № 9. – С. 248–253.
5. *Жовновський Д.О.* Метод штрафних функцій оптимізації розміщення дискретних джерел фізичного поля / *Д.О. Жовновський*// Вісник ЖІТІ / Технічні науки. – 1998. – № 8. – С. 293–298.
6. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач / *Ф.П. Васильев*. – М. : Наука, 1980. – 518 с.

ßÐÅÌ×ÓÊ Ñâ³òëàíà ²âàí³âíà – êàíäèäàò ô³çèêî-ìàòåìàòè÷íèõ íàóê, äîöåíò êàôåäðè ïðîãðàìíîãî çàáåçïå÷åííÿ îá÷èñëþâàëüíî¿ òåõí³êè Æèòîìèðñüêîãî державного òåõíîëîã³÷íîãî університету.

Íàóêîâ³ ³íòåðåñè:

– åêñòðåìàëüí³ çàäà÷³;

– ìàòåìàòè÷íå ìîäåëþâàííÿ.

ШАПОВАЛОВ Юрій Îëåêñàíäðîâè÷ – êàíäèäàò технічних íàóê, äîöåíò êàôåäðè ïðîãðàìíîãî çàáåçïå÷åííÿ îá÷èñëþâàëüíî¿ òåõí³êè Æèòîìèðñüêîãî державного òåõíîëîã³÷íîãî університету.

Íàóêîâ³ ³íòåðåñè:

– мåòîäè îïòèì³çàö³¿;

– êîìï'þòåðíå ìîäåëþâàííÿ.

Подано 20.07.2010

Яремчук С.І., **Шаповалов Ю.О.** Отримання початкового наближення в задачах оптимізації розміщення об'єктів спеціального вигляду

Яремчук С.И., Шаповалов Ю.А. Получение начального приближения в задачах оптимизации размещения объектов специального вида

Yaremchuk S.I., Shapovalov Yu.A. Getting an initial approximation in problems of optimization the placement of objects with special shape

УДК 519.67

Получение начального приближения в задачах оптимизации размещения объектов специального вида / С.И. Яремчук, Ю.А. Шаповалов

Приведены математические постановки и использованы штрафные функции, методы безусловной оптимизации и аппарат линейного программирования для генерации начального размещения объектов на заданной области.

УДК 519.67

Getting an initial approximation in problems of optimization the placement of objects with special shape / S.I. Yaremchuk, Yu.A. Shapovalov

The problem of generating an initial placement of objects in a given area is discussed. the mathematical model is described. Penalty functions, methods of unconstrained optimization and linear programming are used for solving this problem.