УДК 336.767.2

Гречук Б.В., к.фіз.-мат.н., викладач,
Прикарпатський Юридичний Інститут ЛьвДУВС
Гречук Т.Л., аспірант, викладач,
Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника

ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ЕНТРОПІЇ ЯК ЗАСІБ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ РОЗПОДІЛУ ЦІНИ ПОРТФЕЛЯ

Досліджено метод для прогнозування розподілу майбутньої ціни фінансового портфеля, який базується на принципі максимуму ентропії. В задачі максимізації ентропії запропоновано обмежитись двома параметрами: математичним сподіванням ціни портфеля та її відхиленням від математичного сподівання. Метод проілюстровано на прикладі прогнозування розподілу ціни індексу "Української біржі"

Постановка проблеми. Однією з основних функцій фінансового ринку є можливість отримати додатковий прибуток як винагороду за ризик. Якщо інвестор вкладає гроші в деякий фінансовий портфель, його метою є отримати прибуток, більший за банківський відсоток. Вважається, що чим більший прибуток очікується від портфеля, тим більші ризики у ньому закладені. Проте, якщо прибуток є поняттям абсолютним, то поняття ризику є об'єктом дискусії вже багато десятиліть. Що ризикованіше – можливість втратити невелику частину вкладу з великою ймовірністю, чи хоча б невелика можливість втратити все? Такі та подібні запитання кожен інвестор повинен вирішувати для себе індивідуально, виходячи з власного відношення до ризику.

Багато різних моделей ризику та способів його обчислення можна знайти в літературі. Проте майже всі вони базуються на тому, що нам відома повна інформація про майбутню ціну потрфеля, яка моделюється випадковою величиною X. Припускається, що нам відомий точний розподіл цієї випадкової величини, тобто для будь-якого цінового порогу x нам відома імовірність $F_X(x) = P(X \le x)$ того, що ціна портфеля в деякий фіксований момент часу у майбутньому не перевищить x. Проблема полягає у тому, що точна функція розподілу портфеля $F_X(x)$ невідома на практиці, тобто нам невідома не лише майбутня ціна портфеля, але й ймовірнісний закон, якому вона підпорядкована. У даній статті пропонується метод оцінки цієї функції розподілу.

Стан вивчення проблеми. Найбільш прямим методом для наближеної оцінки функції розподілу $F_X(x)$ є метод гістограми, або історичних даних. Для цього береться ціна портфеля, наприклад, кожного тижня за останні 3-5 років, і на основі цих даних будується функція розподілу для майбутньої ціни цього портфеля. Проте такий метод на практиці вважається неточним і має той суттєвий недолік, що емпіричний розподіл є дискретним, що часто дуже ускладнює оптимізацію. Також такий метод не дозволяє застосувати додаткову інформацію, якою може володіти інвестор, але яка ніяк не відображена в історичних даних. З іншого боку, історичні дані можуть бути застосовані для оцінки окремих параметрів розподілу.

Одним з найбільш поширених альтернативних методів для оцінки функції розподілу $F_X(x)$ є принцип максимуму ентропії. Щоб використати цей метод, інвестор повинен спочатку якомога точніше оцінити деякі параметри розподілу, наприклад його математичне сподівання, дисперсію, тощо. Для оцінки цих параметрів вже можна використовувати історичні дані (якщо ціна портфеля щороку зростала у середньому на 20%, то можна сподіватися, що приблизно таке ж зростання очікується і наступного року), а можна враховувати і додаткову інформацію, не відображену в історичних даних. Після оцінки цих параметрів у моделі припускається, що ці дані відображають всю наявну інформацію про портфель, і про його майбутню ціну більше нічого не відомо. Отже, з усіх можливих розподілів портфеля з даними параметрами необхідно вибрати той, який несе в собі найменше інформації, або найбільше невизначеності. Одним з основних способів виміру невизначеності, закладеної в випадковій величині X, є ентропія Шенона [8].

У цій статті ми будемо припускати, що випадкова величина X є неперервною, тобто, що майбутня ціна портфеля може приймати довільне значення. Це означає, що існує щільність розподілу $f_X(x)$, яка дорівнює похідній від функції розподілу. Ентропія Шенона від такої величини X є числовою оцінкою невизначеності, закладеної в випадковій величині, і обчислюється за формулою:

$$S(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \cdot \ln f_X(x) \cdot dx \qquad (1)$$

Припустимо, що ми обчислили n параметрів величини X: $f_1(x) = a_1, f_2(x) = a_2, ..., f_n(x) = a_n$.

Тоді оцінкою для розподілу величини X є розв'язок наступної оптимізаційної задачі:

$$\max S(X) \text{ при умові, що}$$
$$f_1(x) = a_1, f_2(x) = a_2, ..., f_n(x) = a_n \qquad (2)$$

Мета дослідження. Метою даного дослідження є визначити, які саме параметри величини X потрібно обчислити попередньо перед використанням принципу максимальної ентропії . Чим більше параметрів буде обчислено, тим точніше буде прогнозовано щільність розподілу $f_X(x)$. Проте на практиці інформація про портфель часто дуже обмежена і недостатня для того, щоб з необхідною точністю оцінити параметри розподілу. Суттєві помилки при обчисленні параметрів призведуть до цілком невірного прогнозування. Тому у більшості випадків ми пропонуємо обмежитись мінімальною кількістю параметрів, а саме двома. Найбільш важливою характеристикою портфеля є його очікуваний прибуток – це математичне сподівання $M(X)$ величини X. Другий параметр повинен відповідати за *відхилення* величини X від її математичного сподівання.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Фінансовий ринок широко досліджується у працях як вітчизняних, так і зарубіжних вчених. Серед вітчизняних та російських дослідників ринок цінних паперів аналізують Калина А.В., Корнієв В.В., Кощеєв А.А., Бердникова Т.Б., Килячков А.А., Чалдаева Л.А. Рубцов Б.Б., та багато інших. Проте аналіз методів обчислення відхилення майбутньої ціни портфеля від її математичного сподівання не був у достатній мірі висвітлений у вітчизняній літературі. Такий аналіз був недавно проведений у США у працях Рокафеллара, Урясева, Забаранкіна, та інших науковців.

Викладення основного матеріалу. Найбільш поширеним способом обчислення відхилення випадкової величини від її математичного сподівання є *стандартне відхилення* величини X, що обчислюється за формулою:

$$\sigma(X) = \sqrt{M(X^2) - M(X)^2} \qquad (3)$$

Модель вибору фінансового портфеля, що базується лише на його математичному сподіванні та стандартному відхиленні була запропонована Марковіцем [6] ще у 1952 році і стала класичною. Якщо припустити, що нам відомі математичне сподівання $M(X) = m_0$ і стандартне відхилення $\sigma(X) = \sigma_0$ портфеля X, та застосувати принцип максимуму ентропії для оцінки розподілу портфеля, то розв'язком задачі (2) буде нормальний розподіл з параметрами m_0 та σ_0. Припущення про те, що розподіл майбутньої ціни фінансових портфелів є нормальним розподілом, також є класичним припущенням, що суттєво спрощує обчислення. Проте відомо, що розподіли портфелів на практиці є далекими від нормальних. Відомо також, що стандартне відхилення $\sigma(X)$ є далеко не ідеальною мірою відхилення портфеля від його математичного сподівання. Наприклад, $\sigma(X)$ є функціоналом симетричним, який однаково враховує відхилення в обидві сторони. Для інвестора ж набагато важливішим є випадок, коли ціна портфеля буде меншою за його математичне сподівання. Таким чином можливий випадок, коли два портфелі мають однакове математичне сподівання та стандартне відхилення, але один з них набагато привабливіший за інший для більшості інвесторів.

Виникає логічне запитання, які ще існують міри відхилення випадкової величини від її математичного сподівання і які з них доцільно використовувати для фінансового портфеля. Загальна теорія мір відхилення була недавно розроблена американським професором Рокафелларом та іншими авторами [7]. Мірою відхилення випадкової величини X називається будь-який функціонал $D(X)$, який задовольняє наступним аксіомам:

(D1) $D(X) = 0$ якщо X константа, інакше $D(X) > 0$;

(D2) $D(\lambda X) = \lambda \cdot D(X)$ при всіх X та всіх $\lambda > 0$;

(D3) $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ при всіх X та Y;

(D4) Множина $\{X \mid D(X) \le c\}$ є замкнутою при всіх $c < \infty$.

Зазначимо, що стандартне відхилення $\sigma(X)$ задовольняє всім аксіомам, а отже є мірою відхилення. Рокафеллар та ін. [7] приводять приклади багатьох інших мір відхилення, наприклад:

$$\sigma_-(X) = \sqrt{M[X - M(X)]_-^2}, \text{ де } [X]_- = \max\{0, -X\}$$

$$\sigma_+(X) = \sqrt{M[X - M(X)]_+^2}, \text{ де } [X]_+ = \max\{0, X\}$$

$$MAD(X) = M(|X - M(X)|)$$

Кожна з цих мір відхилення може бути використана замість $\sigma(X)$ для оцінки відхилення майбутньої ціни портфеля від її математичного сподівання. Наприклад, функціонал $\sigma_-(X)$ є цікавою асиметричною мірою відхилення, що враховує саме випадок, коли ціна портфеля буде меншою, ніж очікується. Інша міра відхилення, що останнім часом набула популярності у фінансах, це $CVaR_\alpha^\Delta(X)$, яка для неперервних випадкових величин може бути обчислена за формулою:

$$CVaR_\alpha^\Delta(X) = M(X) - M(X \mid X \le q_X(\alpha)), \quad \text{де } q_X(\alpha) = \inf\{x \mid F_X(x) > \alpha\} \tag{3}$$

В формулі (3) $M(X \mid X \le q_X(\alpha))$ означає умовне математичне сподівання, тобто середню очікувану ціну портфеля при умові, що реалізуються $100 \cdot \alpha \%$ найбільш песимістичних випадків. Функціонал $CVaR_\alpha^\Delta(X)$ є мірою відхилення, що показує різницю між середньоочікуваною ціною портфеля взагалі та середньоочікуваною ціною портфеля при реалізації найбільш песимістичних сценаріїв розвитку подій. Параметр α може приймати значення між 0 та 1 і показує, наскільки обережно налаштований інвестор.

Приклади інших мір відхилення можна знайти у працях Рокафеллара та ін. [7]. Вибір конкретної міри відхилення залежить від уподобань інвестора.

Ми пропонуємо наступну схему для оцінки щільності розподілу портфеля.

1. Вибрати міру відхилення $D(X)$, що відповідає даній конкретній ситуації та уподобанням інвестора, його відношенням до ризику. Якщо немає інших уподобань, у загальному можна рекомендувати $\sigma_-(X)$ або $CVaR_\alpha^\Delta(X)$ з $\alpha = 0{,}05$, що вважаються розумним вибором. Як варіант, можна зупинити вибір на тій мірі відхилення, яка є більш стабільною, тобто не дуже сильно змінювалась для даного портфеля у минулому.

2. Оцінити значення математичного сподівання $M(X)$ та міри відхилення $D(X)$ для даного портфеля, базуючись на гістограмі зміни ціни портфеля у попередні роки, а також будь-якій іншій інформації, якщо вона доступна інвестору. Нехай ми отримали значення $M(X) = m_0$ та $D(X) = d_0$.

3. За оцінку щільності розподілу портфеля взяти функцію $f_X(x)$, яка є розв'язком наступної задачі максимізації ентропії:

$$\max S(X) \quad \text{при умові, що} \quad M(x) = m_0,\ D(X) = d_0 \tag{4}$$

Задача (4) є математичною задачею оптимізації. Ця задача є нетривіальною, але вона була недавно розв'язана у працях Б. Гречука, А. Молибоги та М. Забаранкіна [5], де автори привели алгоритм, як обчислити $f_X(x)$ для довільної міри відхилення. Наприклад, для випадку $D(X) = CVaR_\alpha^\Delta(X)$ при $m_0 = 0$ та $d_0 = 1$ розв'язком задачі (4) є наступна щільність розподілу:

$$f_X(x) = \begin{cases} (1-\alpha)\exp\left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\left(x - \dfrac{2\alpha-1}{1-\alpha}\right)\right), & x \le \dfrac{2\alpha-1}{1-\alpha} \\ (1-\alpha)\exp\left(-\left(x - \dfrac{2\alpha-1}{1-\alpha}\right)\right), & x \ge \dfrac{2\alpha-1}{1-\alpha} \end{cases} \tag{5}$$

При довільних параметрах m_0 та d_0 маємо $X = d_0 Y + m_0$, де Y - випадкова величина зі щільністю розподілу (5).

Для випадку $D(X) = \sigma_{-}(X)$ розв'язок задачі (4) має вигляд:

$$f_X(x) = c \cdot \exp\left(a \cdot x + b[x - m_0]_{-}\right), \qquad (6)$$

де a, b, c – константи, що залежать від m_0 та d_0. Наприклад, при $m_0 = 0$ та $d_0 = 1$ маємо $c \approx 0{,}260713$, $a \approx -0{,}638833$, $b = -0{,}5$ (див. [5]).

Маючи оцінку для щільності розподілу портфеля ми можемо обчислити будь-які інші числові характеристики портфеля. Наприклад, для будь-якого цінового порогу x ми зможемо оцінити ймовірність того, що ціна портфеля не перевищить x за формулою:

$$P(X \le x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Володіючи цією інформацією, інвестору легше прийняти рішення про доцільність вкладання коштів у даний фінансовий портфель.

Наприклад, розглянемо ситуацію, у якій за прогнозами спеціалістів деяка акція, що зараз коштує 100 грн., буде через рік коштувати 130 грн., стандартне відхилення для такого прогнозу оцінюється як 40 грн., а будь-яка інша інформація про акцію відсутня. Припустимо, що інвестор бажає купити акцію що принесе йому очікуваний прибуток 30% , але таку, щоб ймовірність втратити більше 10% була не більшою як 0,2. Дослідимо, чи варто інвестору вкладати гроші в дану акцію.

Якщо X – випадкова величина, що означає ціну акції через рік, то $M(X) = 130$, $\sigma(X) = 40$. Згідно принципу максимуму ентропії, величина X має нормальний розподіл з параметрами 130 та 40, тобто $X = 40Y + 130$, де Y – стандартна нормальна випадкова величина. Використовуючи таблицю для стандартного нормального розподілу, маємо

$$P(X \le 100 - 10) = P(40Y + 130 \le 90) = P(Y \le -1) \approx 0{,}16 < 0{,}2,$$

отже, ризик є у межах допустимого, і інвестору варто купувати дану акцію.

Тепер розглянемо іншу ситуацію. Припустимо, що на основі аналізу історичних даних встановлено, що ціна деякого фінансового портфеля зростає у середньому на 20% щороку. Ймовірність того, що ціна впаде оцінюється як 0,05, і у такому випадку її очікуване падіння становить 30%. Припустивши, що будь-яка інша інформація відсутня, оцінимо щільність розподілу ціни портфеля через рік.

Якщо X – випадкова величина, що означає ціну портфеля через рік, а поточну ціну портфеля прийняти за одиницю, то за умовою $M(X) = 1{,}2$, а $CVaR_{\alpha}^{\Delta}(X) = 1{,}2 - 0{,}7 = 0{,}5$ при $\alpha = 0{,}05$. Згідно принципу максимуму ентропії , величина $X = 0{,}5Y + 1{,}2$, де Y – випадкова величина зі щільністю розподілу (5) при $\alpha = 0{,}05$, тобто

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0{,}95\exp\left(19\left(x + \frac{18}{19}\right)\right), & x \le -\frac{18}{19} \\ 0{,}95\exp\left(-\left(x + \frac{18}{19}\right)\right), & x \ge -\frac{18}{19} \end{cases}$$

У наведених вище прикладах прогноз для математичного сподівання майбутньої ціни портфеля був заданий. На практиці для такого прогнозу найчастіше застосовують історичні дані про ціну портфеля. Для цього переважно розглядають не саму ціну, а темп приросту ціни за одиницю часу, який обчислюють за формулою:

$$r = \frac{X}{p},$$

де *p* – ціна портфеля у даний момент часу, а *X*– ціна у майбутньому, що є випадковою величиною.

Для прикладу розглянемо індекс "Української біржі" (Ukrainian Equities Index) у період з 6 квітня по 16 листопада 2009 року [9]. Динаміка зміни його ціни вказана на рисунку 1. Базуючись на цих історичних даних, спрогнозуємо розподіл ціни індексу на наступний після заданого періоду тиждень.

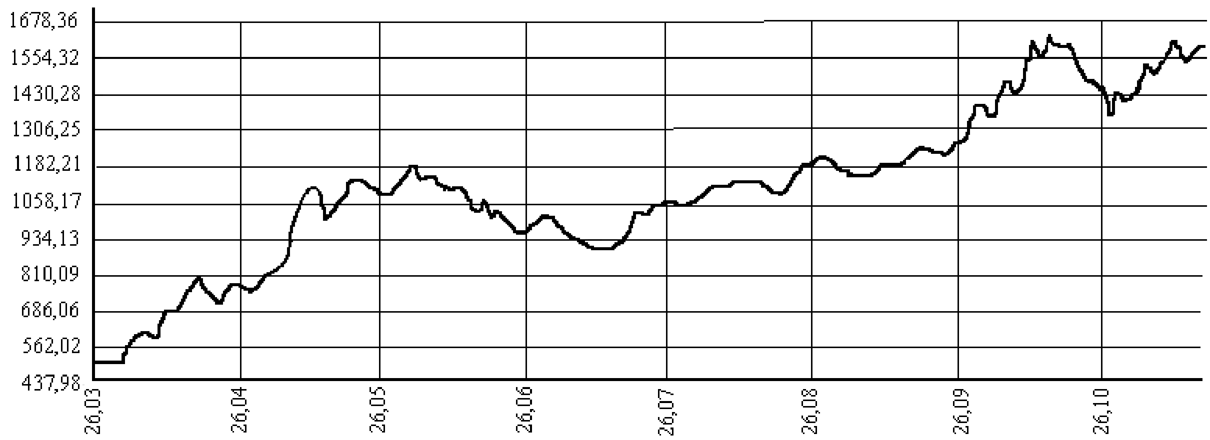

Рис. 1. Динаміка зміни індексу "Української біржі" (Ukrainian Equities Index)

У таблиці 1 приведена ціна індексу на початок кожного тижня даного періоду, та обчислений темп приросту ціни за кожний тиждень. Тоді математичне сподівання $M(r)$ темпу приросту ціни індексу за наступний тиждень можна оцінити як середнє значення третьої колонки таблиці. Отримаємо $M(r) = 1{,}0328$, що означає, що математичне сподівання ціни індексу за наступний тиждень дорівнює:

$$M(X) = p \cdot M(r) = 1644{,}86 \text{ грн.}$$

Таблиця 1. Щотижнева динаміка зміни індексу "Української біржі" (Ukrainian Equities Index)

Дата	*Ціна індексу, грн.*	*Темп приросту* r	$[r-M(r)]_{-}$
06.04.09	618,17		
13.04.09	698,72	1,1303	0
21.04.09	715,38	1,02384	0,008969036
27.04.09	774,92	1,08323	0
05.05.09	849,05	1,09566	0
12.05.09	1105,5	1,30204	0
18.05.09	1055,9	0,95513	0,077679212
25.05.09	1120,54	1,06122	0
01.06.09	1158,41	1,0338	0
09.06.09	1108,07	0,95654	0,076268752
15.06.09	1039,65	0,93825	0,094559637
22.06.09	977,64	0,94035	0,092457709
30.06.09	1006,62	1,02964	0,003169822
06.07.09	940,04	0,93386	0,098954775
13.07.09	901,36	0,95885	0,073959821
20.07.09	1026,3	1,13861	0
27.07.09	1060,21	1,03304	0
03.08.09	1091,48	1,02949	0,003318479
10.08.09	1119,32	1,02551	0,007305984
17.08.09	1091,4	0,97506	0,057756352
25.08.09	1197,43	1,09715	0
31.08.09	1174,12	0,98053	0,052279327
07.09.09	1161,49	0,98924	0,043569628
14.09.09	1182,35	1,01796	0,014852946
21.09.09	1216,75	1,02909	0,003718036
28.09.09	1302,89	1,0708	0
05.10.09	1400,66	1,07504	0
12.10.09	1592,14	1,13671	0
19.10.09	1587,59	0,99714	0,035670425
26.10.09	1468,51	0,92499	0,107819407
02.11.09	1416,01	0,96425	0,068563158
09.11.09	1561,02	1,10241	0
16.11.09	1592,62	1,02024	0,012569461
		$M(r)=1{,}0328$	$\sigma_{-}(r)=0{,}047$

Щоб оцінити розподіл випадкової величини r, потрібно вибрати міру відхилення, оцінити її значення, базуючись на історичних даних, та застосувати принцип максимуму ентропії. Припустимо, що ми вибрали міру відхилення $\sigma_{-}(r)$. Щоб оцінити її значення, обчислимо величину $[r-M(r)]_{-}$ для кожного тижня (див. четверту колонку таблиці 1), і тоді корінь із суми їх квадратів можна взяти за оцінку $\sigma_{-}(r)$. Отже, $\sigma_{-}(r)=0{,}047$, та

$$\sigma_{-}(X)=p\cdot\sigma_{-}(r)=74{,}85$$

Згідно принципу максимуму ентропії , величина $r=0{,}047\cdot Y+1{,}0328$, де Y – випадкова величина зі щільністю розподілу (6). Щільність розподілу $f(r)$ випадкової величини r показана на рисунку 2.

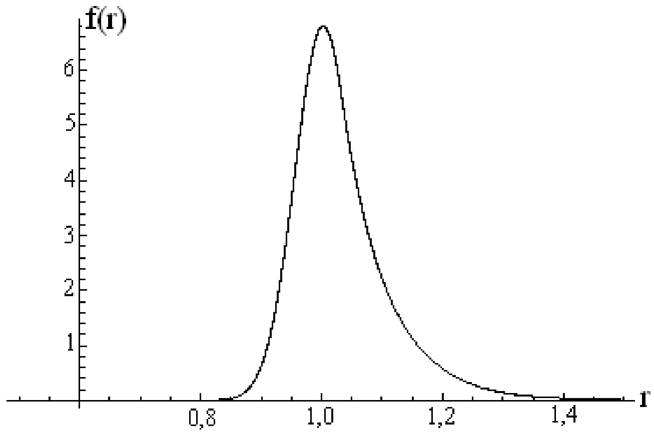

Рис. 2. Графік щільності розподілу для темпу приросту ціни індексу "Української біржі" за тиждень

Висновки та перспективи подальших досліджень. В даній статті ми розглянули проблему прогнозування розподілу майбутньої ціни фінансового портфеля. Для оцінки цього розподілу ми запропонували використовувати принцип максимуму ентропії з двома параметрами: перший відповідає за математичне сподівання ціни портфеля, а другий - за її *відхилення* від математичного сподівання. Як приклад, ми використали запропонований метод для прогнозування розподілу ціни індексу "Української біржі" (Ukrainian Equities Index).

Одним з центральних питань для подальшого дослідження є вибір конкретної міри відхилення ціни портфеля від її математичного сподівання. У статті ми зазначили, що стандартне відхилення є не найкращим вибором, і розглянули декілька альтернативних мір відхилення. Проте проблема вибору найбільш відповідної з них залишається відкритим запитанням.

Список використаної літератури:

1. *Бердникова Т.Б.* Рынок ценных бумаг / Т.Б. Бердникова. – М.: ИНФРА–М, 2000. 2. *Калина А.В.* Рынок ценных бумаг */ А.В. Калина , В.В. Корнеев, А.А. Кощеев.* – К.: МАУП, 1998. 3. *Килячков А.А.* Рынок ценных бумаг и биржевое дело */ А.А. Килячков, Л.А. Чалдаева*. – М.: Юрист, 2001. 4. *Рубцов Б.Б.* Мировые рынки ценных бумаг / *Б.Б. Рубцов*. – М.: Экзамен, 2002. 5. *Grechuk, B., Molyboha, A., Zabarankin, M.* Maximum Entropy Principle with General Deviation Measures // Mathematics of Operations Research. – 2009. – 34(2). – pp 445-467. 6. *Markowitz, H.M.* Portfolio selection. // J. Finance. – , 1952. – 7(1). – pp 77-91. 7. *Rockafellar, R.T., S. Uryasev, M. Zabarankin.* Generalized deviations in risk analysis // Finance Stochastics. – 2006. – 10(1). – pp 51-74. 8. *Shannon, C.E.* A mathematical theory of communication // Bell System Tech. J. – 1948. – 27. – pp 379–423, 623–656. 9. *[*Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://charts.finance.ua/ ru/stock/indices/~/1/ux/36.

ГРЕЧУК Богдан Васильович – кандидат фізико-математичних наук, викладач Прикарпатського юридичного інституту ЛьвДУВС

Наукові інтереси:
– міри відхилення та їх використання в економіці

ГРЕЧУК Тетяна Любомирівна – аспірант, викладач, Прикарпатського національного університету ім. В. Стефаника

Наукові інтереси:
– економіка підприємств харчової промисловості