

УДК 51:330.115

І.В. Гаращенко, к.т.н., доц.

Житомирський державний технологічний університет

## ПРО ЗАДАЧУ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ГРАФАХ

*Описано задачу оптимізації комунікаційних мереж на прикладі транспортної мережі, що представлена графом зі зваженими ребрами і вершинами. Запропоновано процедуру виділення постійної складової розв'язку.*

**Вступ.** Оптимізаційні задачі на графах зі зваженими ребрами й ваговими характеристиками вершин утворюють клас, що включає узагальнення класичної задачі знаходження кістяка мінімальної ваги (КМВ). Простором розв'язків кожної задачі класу є множина кістяків  $\{I_v\}$  графа  $H = (V, U)$  з певними властивостями. Один із них представлений обмеженням на кількість висячих вершин у припустимому розв'язку  $I_v$ . При цьому вершина  $i \in V$ , яка виявилася висячою в кістяку  $I_v$ , набуває вагу, що відрізняється від її числового параметра в графі  $H = (V, U)$ . У цьому випадку вартість припустимого розв'язку задачі залежить від суми двох доданків: суми ваг ребер і суми ваг висячих вершин.

До розглянутого класу задач відноситься задача побудови КМВ графа  $H$  з мінімальним числом висячих вершин.

Умови задачі побудови в графі  $H = (V, U)$  кістяка мінімальної вартості описуються, наприклад, транспортною мережею, де кожному пункту зпівставлена вершина  $i \in V$  із двома числовими параметрами  $d_i$  і  $d'_i$ ,  $|V| = n$ , а кожному ребру  $\{i, j\} \in U$  відповідає відрізок дорожнього полотна між парою сусідніх пунктів  $i, j$  та вартість його реконструкції  $d_{ij}$ .

**Обґрунтування та опис алгоритму.** Назвемо пункт  $i$  транспортної мережі тупиковим, якщо відповідна йому вершина  $i$  в графі  $H$  має ступінь  $\delta_i = 1$ , і транзитним у протилежному випадку. Кожний пункт представимо як термінал, що підлягає реконструкції. Вартість реконструкції  $i$ -го терміналу  $d(i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , залежить від того, яким є пункт  $i$ : тупиковим або транзитним:

$$d(i) = \begin{cases} d_i, & \text{якщо } \delta_i > 1, \\ d'_i & \text{інакше,} \end{cases}$$

причому, як правило,  $d'_i > d_i$ . Для реконструкції транспортної мережі, включаючи всі її термінали, потрібні інвестиції в обсязі, рівному константі

$$\sum_{\{i,j\} \in U} d_{ij} + \sum_{\delta_i > 1} d_i + \sum_{\delta_i = 1} d'_i.$$

Зазвичай заплановані капіталовкладення на розвиток транспортної інфраструктури істотно менші зазначеного обсягу.

Прикладний характер побудованої моделі стає очевидним з формулювання наступної задачі оптимального планування: необхідно знайти таку частину транспортної мережі  $H = (V, U)$ , що зв'язує всі її пункти, реконструкція якої вимагає мінімуму витрат на дорожнє полотно і термінали.

У загальному випадку шуканий розв'язок поставленої задачі належить множині всіх кістяків графа  $H = (V, U)$ . При припущенні про співвідношення вартостей реконструкції кожної пари  $\{i, j\} \in U$   $d'_i - d_i \leq \min_{i,j} d_{ij}$ , очевидно, шукана частина є кістяком графа  $H$ , а простір розв'язків задачі – множиною всіх кістяків  $\{I_v\}$  графа  $H = (V, U)$ , зпівставленого транспортній мережі.

Припустимо, що мережа складається тільки з транзитних пунктів, і, отже, граф  $H$ , що відповідає їй, не містить висячих вершин. Кістяк  $I_v$  графа  $H$  характеризується числом висячих вершин  $n(I_v)$  і вартістю

$$D(I_v) = \sum_{\{i,j\} \in I_v} d_{ij} + \sum_{i=1}^n d(i), \quad (1)$$

де кожна величина  $d(i)$  набуває одне із двох значення:  $d_i$  або  $d'_i$ . У цьому випадку задача

оптимального планування реконструкції транспортної мережі полягає в знаходженні кістяка  $I^*$  вартістю

$$D(I^*) = \min_{\{I_v\}} D(I_v).$$

Очевидно, якщо  $d'_i - d_i = \text{const}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , то задача зводиться до знаходження в графі  $H = (V, U)$  КМВ  $I^*$  із мінімальним числом висячих вершин  $n(I^*)$ .

У загальному випадку транспортна мережа містить як транзитні, так і тупикові пункти, тобто моделюється графом  $H = (V, U)$ , що включає вершини одиничного ступеня. Покажемо, що при такій умові поставлена задача полягає в мінімізації функціонала (1) на деякому підграфі графа  $H$ , який не містить висячих вершин.

У будь-якому розв'язку задачі, представленому кістяком графа  $H$ , кожна висяча вершина  $j$  одержує вагу  $d(j) = d'_j$ . У графі  $H$  множина всіх висячих вершин утворює підграф  $H'$  у вигляді лісу. Кожному дереву лісу однозначно відповідає коренева вершина, що зв'язує його із частиною графа  $H$ , що не є лісом. Оскільки всі ребра  $H'$  містяться в будь-якому кістяку графа  $H$ , то ступені корневих вершин у припустимому розв'язку більше 1, а ступені інших вершин лісу не міняють своїх значень.

Позначимо  $V'$  множину всіх вершин лісу,  $K$  – множину його корневих вершин. Для підмножини вершин  $S = V - V' \cup K$  розглянемо породжений підграф  $\langle S \rangle$  графа  $H$  і множину його кістяків  $\{I_\xi\}$  [1]. Вартість будь-якого розв'язку задачі містить константу  $D(H')$ , рівну сумі ваг всіх вершин і всіх ребер лісу  $H'$ , і залежить від величини

$$D(I_\xi) = \sum_{\{i,j\} \in I_\xi} d_{ij} + \sum_{i \in V - V'} d(i).$$

Поклавши в  $\langle S \rangle$  для кожної кореневої вершини  $k \in K$ ,  $d(k) = 0$ , одержимо функціонал, що мінімізується, який збігається з точністю до позначень із функціоналом (1):

$$D(I_\xi) = \sum_{\{i,j\} \in I_\xi} d_{ij} + \sum_{i \in V - V' \cup K} d(i).$$

Постійну складову вартості будь-якого розв'язку задачі, включаючи оптимальний, можна визначити після виконання наступної процедури знаходження в графі  $H$  лісу  $H'$ .

S0. У графі  $H = (V, U)$  кожна вершина  $k \in V$  характеризується ступенем  $\text{deg}(k)$ ,  $k = \overline{1, n}$ , а кожне ребро – парю  $\{k, l\} \in U$ ;  $H' = \emptyset$ .

S1.  $i = 1$ .

S2. Якщо  $\text{deg}(i) > 1$ , то  $i = i + 1$ ; перейти до кроку S4.

S3.  $H' = H' \cup \{i, j\}$ ;  $\text{deg}(j) = \text{deg}(j) - 1$ ;  $V = V \setminus \{i\}$ ;  $n = n - 1$ ; перейти до кроку S1.

S4. Якщо  $i > n$ , то кінець: ліс  $H'$  містить підмножину корневих вершин  $K$ , інакше перейти до кроку S2.

Вартість лісу  $H'$  визначається як

$$D(H') = \sum_{i \in V''} d'_i + \sum_{i \in V' - V''} d_i + \sum_{\{i,j\} \in H'} d_{ij},$$

де  $V''$  – множина висячих вершин графа  $H = (V, U)$ .

У процедурі побудови лісу  $H'$  домінуючий час витрачається на послідовний пошук кожного ребра  $\{i, j\}$ , для якого поточне значення ступеня вершини  $i$  дорівнює 1. Тому часова складність знаходження  $H'$  обмежена величиною  $O(n^2)$ .

Доречно відзначити, що процедура може бути використана як проміжна при розв'язку задач з різних застосувань. Наприклад, вона визначає, чи є вихідний граф  $H = (V, U)$  деревом.

Задача мінімізації (1) NP-трудна при будь-яких значеннях  $d_{ij}$ ,  $d_i$ ,  $d'_i \in R_0^+$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $i \neq j$ .

Дійсно, розглянемо окремий випадок задачі мінімізації (1).

У зв'язному графі  $A = (Y, W)$ , де  $Y$  – множина вершин,  $W \subset Y \times Y$  – множина ребер, потрібно

побудувати кістяк  $F$  з мінімальним числом висячих вершин  $n(F)$ .

Задача побудови дерева  $F$   $NP$ -трудна, тому що при  $n(F) = 2$  вона є класичною задачею знаходження в графі гамільтонового ланцюга.

До класу графових задач знаходження кістяка, що задовольняє певні умови, відноситься відома задача, для розв'язку якої в [2] Габов побудував ефективний алгоритм. Вона формулюється в такий спосіб.

Задано зважений граф  $H = (V, U)$ , де  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  – множина пронумерованих вершин,  $U \subseteq V \times V$  – множина ребер. Кожному ребру  $\{i, j\}$  зпівставлене дійсне невід'ємне число  $d_{ij}$ , яке називається вагою.

Задача Габова полягає у побудові в графі  $H$  кістяка найменшої вартості ( $SST$ -дерева) з обмеженням на ступінь однієї з вершин.

Очевидно, не для кожної вершини графа  $H$  задача Габова розв'язна. Якщо граф  $H$  містить вершини одиничного ступеня, то задача не має розв'язку для будь-якої вершини підмножини  $V' - K$  лісу  $H'$ . Вона не має розв'язку для кожної вершини з підмножини  $K$  з обмеженням  $t = 1$ . Отже, якщо побудовано  $SST$ -дерево з обмеженням  $t > 1$  на ступінь вершини  $r$ , то ця вершина належить підмножині  $V - V' \cup K$ .

Алгоритм Габова не містить дій із розпізнавання вершин підмножини  $V' - K$ . Разом з тим у моделях оптимізації комунікаційних мереж основна увага приділяється підмножині тих вершин з  $V$ , для яких поставлена задача має розв'язок. Ця підмножина містить вершини множини  $V - V' \cup K$ , яка встановлюється процедурою побудови лісу  $H'$ . Якщо в результаті виконання алгоритму Габова для графа  $H = (V, U)$  побудоване  $SST$ -дерево з обмеженням  $t$  на ступінь вершини  $r \in S = V - V' \cup K$ , то в його вартість входить постійна складова

$$D(H') = \sum_{\{i,j\} \in H'} d_{ij}$$

і вартість

$$D(I(r,t)) = \sum_{\{i,j\} \in I(r,t)} d_{ij} \tag{2}$$

$SST$ -дерева  $I(r, t)$ , побудованого на породженому підграфі  $\langle S \rangle$  графа  $H$ . Для графа  $H$ , що не містить висячих вершин, задача Габова полягає у знаходженні (2) у результаті побудови дерева  $I(r, t)$  поліноміальним алгоритмом, викладеним у [2].

Варіант задачі Габова, в якому потрібно побудувати  $SST$ -дерево з обмеженням на ступені всіх вершин, є  $NP$ -трудним.  $NP$ -трудність впливає з розгляду зваженого графа  $H = (V, U)$ , де ступінь кожної вершини не менший 2. Якщо обмежити ступінь фіксованих вершин  $i$  і  $j$  значенням  $t = 1$ , а ступені інших вершин значенням  $p = 2$ , то одержимо відому  $NP$ -трудну задачу побудови в графі  $H$  гамільтонового ланцюга мінімальної вартості між двома вершинами [3].

Розв'язок кожної із сформульованих тут задач належить множині кістяків зв'язного графа, вершини якого позначені числами  $1, 2, \dots, n$ . Визначимо потужність цієї множини для графа  $H = (V, U)$ , що містить вершини одиничного ступеня.

Очевидно, число всіх кістяків графа  $H$  дорівнює числу кістяків у породженому підграфі  $\langle S \rangle$ . Це число визначається в результаті застосування матричної теореми про дерева в такий спосіб [7]. Формуються  $[a_{ij}]_{|S|}$  – матриця суміжності породженого під графа  $\langle S \rangle$   $|S| = |V - V' \cup K|$  і матриця  $M$  шляхом заміни в  $[-a_{ij}]_{|S|}$   $i$ -го елемента головної діагоналі на ступінь  $i$ -ї вершини в  $\langle S \rangle$ . Потужність множини всіх кістяків графа  $H$  дорівнює будь-якому алгебраїчному доповненню матриці  $M$ .

Відзначимо, по-перше, що широко відома задача знаходження в графі КМВ породжує клас задач, тісно пов'язаних з практикою проектування і оптимізації комунікаційних мереж. Параметрами, що варіюються, таких задач можуть бути ваги комунікацій, ваги і ступені вершин, що відповідають вузлам мережі, а припустимими розв'язками – кістякові підграфи, які містяться в ній. Якщо в якості кістякового підграфа фігурує його окремий випадок – цикл або ланцюг, то задача відноситься до класу задач типу комівояжера [4].

По-друге, у своїй більшості задачі оптимізації на мережах комунікацій мають статус  $NP$ -повних. Тому комбінаторні труднощі виділеного класу задач порівнянні з тими, з якими зіштовхуються при дослідженні проблеми комівояжера. Відзначимо, що оптимізаційні задачі побудови у зв'язному графі  $H$  кістяків завжди розв'язні. Звідси впливає можливість знаходження їх наближених, прийнятних по точності розв'язків за допомогою ефективних розумних евристик. Для побудови мінімальних кістяків

застосовні генетичні алгоритми в комбінації з методом гілок та меж [5].

По-третє, у деяких випадках розмірності задач цього класу можна понизити, виконавши ефективні процедури знаходження тих компонентів мережі, які утворюють постійну складову вартості розв'язку.

Приклад. Для графа  $H = (V, U)$ , представленого на рис. 1, а, визначимо  $H'$  – породжений підграф  $\langle S \rangle$ . Розглянемо в довільному порядку ступені його вершин:  $deg(5) = 3, deg(4) = 4, deg(8) = 1, deg(6) = 3, deg(2) = 3, deg(3) = 4, deg(9) = 2, deg(7) = 1, deg(1) = 1$ .

Виконавши процедуру знаходження в графі  $H$  лісу  $H'$ , одержимо  $H' = \{\{1, 3\}, \{7, 6\}, \{8, 6\}, \{6, 5\}\}$ ,  $V' = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$  і підмножина  $V'$  кореневих вершин  $K = \{3, 5\}$ . Множиною вершин породженого підграфа  $\langle S \rangle \in S = V - V' \cup K = \{2, 4, 3, 5, 9\}$ . Породжений підграф  $\langle S \rangle$  зображений на рис. 1, б.

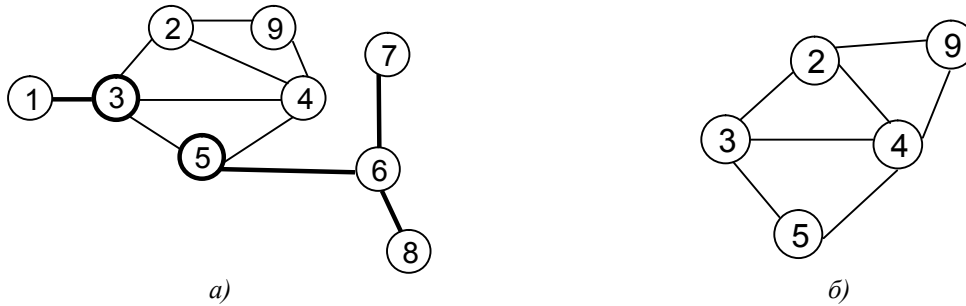


Рис. 1. Побудова лісу  $H'$  для прикладу: а) ребра й кореневі вершини лісу  $H'$  графа  $H$  виділені потовщеними лініями; б) породжений підграф  $\langle S \rangle$  графа  $H$

Щоб визначити число всіх кістяків графа  $H$ , утворимо для породженого підграфа  $\langle S \rangle$  матрицю  $M$  і обчислимо алгебраїчне доповнення будь-якого її елемента, наприклад,  $\Delta_{22}$ .

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$\Delta_{22} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Кожне кістякове дерево графа  $H$  містить ліс  $H'$  (рис. 2). □

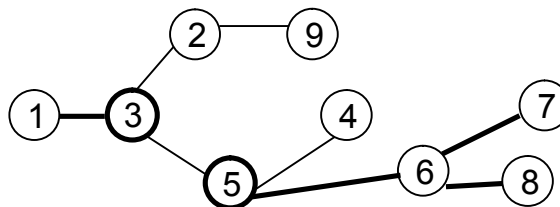


Рис. 2. Кістяк графа  $H$  з обмеженням  $t = 3$  на ступінь вершини 3

**ЛІТЕРАТУРА:**

1. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
2. Hopcroft J.E. Algorithm 447: Efficient Algorithms for Graph Manipulation // Comm. ACM. – 1973. – 16. – Р. 372–378.
3. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. –

- 416 с.
4. *Пападимитриу Х., Стайглиц К.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 510 с.
  5. Генетические алгоритмы в комбинации с методом ветвей и границ для решения задач о перестановках / А.М. Данильченко, С.А. Ибрагим, А.В. Панишев // Материалы междунар. науч. конф. «Интеллектуальные системы принятия решений и прикладные аспекты информационных технологий». – Евпатория, 2006. – Т. 2. – С. 34–37.

ГАРАЩЕНКО Ірина Володимирівна – кандидат технічних наук, доцент Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

- комп'ютерно-інформаційні технології;
- комбінаторна оптимізація.

Подано 17.08.2009

**Гарашенко І.В.** Про задачу оптимізації на графах  
**Гарашенко И.В.** Про задачу оптимизации на графах  
**Garashchenko I.V.** About task of optimization on graphs

УДК 51:330.115

**О задаче оптимизации на графах / И.В. Гарашенко**

Описана задача оптимизации коммуникационных сетей на примере транспортной сети, представленной графом со взвешенными ребрами и вершинами. Предложена процедура выделения постоянной составляющей решения.

УДК 51:330.115

**About task of optimization on graphs / I.V. Garashchenko**

The optimization problem of communication networks on the example of a transport network that is represented graph with weighted edges and vertices there is described. A selection constant component solution procedure is proposed