МОДЕЛЮВАННЯ ТА АВТОМАТИЗОВАНЕ ПРОЕКТУВАННЯ РАДІОЕЛЕКТРОННИХ ПРИЛАДІВ І СИСТЕМ

УДК 621.372.061

В.Л. Баранов, д.т.н., проф.
Р.М. Костюченко, к.т.н.
К.В. Молодецька, аспір.
Житомирський військовий інститут ім. С.П. Корольова
Національного авіаційного університету

ОЦІНКА ПОХИБКИ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПОЛІВ І ПРОЦЕСІВ СИСТЕМОЮ ПРЯМИХ І ЗВОРОТНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СПЕКТРІВ

Запропонована оцінка похибки моделювання двовимірних фізичних полів і процесів системою прямих і зворотних диференціальних спектрів порівняно з одномірними диференціальними перетвореннями.

Постановка проблеми. Моделювання фізичних процесів і полів пов'язане із розв'язанням крайових задач на ЕОМ. Відомо, що чисельні методи розв'язку крайових задач на ЕОМ потребують значного об'єму обчислень [1–3]. З метою зниження об'єму обчислень запропоновані наближені аналітичні та чисельно-аналітичні методи комп'ютерного моделювання [4–10], але відсутні оцінки їх похибок.

Аналіз останніх досліджень і публікацій [5–10] показав, що ряд аналітичних і чисельно-аналітичних методів розв'язання крайових задач ґрунтується на диференціальних перетвореннях математичних моделей фізичних процесів та полів. В області диференціальних зображень фізичний процес представляється у вигляді диференціального спектра, від кількості дискрет якого залежить похибка моделювання фізичного процесу в області оригіналів [5–10]. Складність аналітичного опису дискрет диференціального спектра зростає із збільшенням номера дискрети. Тому для комп'ютерного моделювання використовується декілька початкових дискрет диференціального спектра, що вносить похибку моделювання фізичного процесу в області оригіналів.

У даний час методи оцінки похибки моделювання фізичних полів і процесів на обмеженій кількості дискрет диференціального спектра недостатньо розвинені та вимагають подальших досліджень.

Мета статті полягає у розробці оцінки похибки моделювання двовимірних фізичних полів і процесів системою прямих і зворотних диференціальних спектрів в порівнянні з одномірними диференціальними перетвореннями.

Розглянемо фізичні поля, які описуються аналітичною функцією $u(x_1, x_2)$ в області, що визначена обмеженнями:

$$0 \le |x_1| \le H_1,\ 0 \le |x_2| \le H_2, \text{ де } H_1,\ H_2 \text{ – задані додатні сталі.} \tag{1}$$

У випадку моделювання фізичних процесів $u(t, x)$ вводимо нові змінні $x_1 = t$, $x_2 = x$ і переходимо до моделювання фізичних полів $u(x_1, x_2)$ в області (1).

Вважаємо, що функція $u(x_1, x_2)$ аналітична по змінній x_1, а змінну x_2 розглядаємо як фіксований параметр.

Аналітична функція $u(x_1, x_2)$ диференціюється будь-яку кількість разів у довільній точці $x_1 \in [0, H_1]$, має похідні m-го порядку, які обмежені в сукупності для будь-якого цілого $m \ge 1$:

$$\left|u^{(m)}(x_1, x_2)\right| \le C < +\infty,\ x_1 \in [0, H_1], \text{ для усіх } x_2 \in [0, H_2], \tag{2}$$

де позначено $u^{(m)}(x_1, x_2) = \dfrac{\partial^m u(x_1, x_2)}{\partial x_1^m}$.

У роботі [10] запропоновано моделювання фізичного поля $u(x_1, x_2)$ на основі системи прямих диференціальних перетворень:

$$U(k, x_2) = \frac{H^k}{k!}\left[\frac{\partial^k u(x_1, x_2)}{\partial x_1^k}\right]_{x_1=0},\quad u(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x_1}{H}\right)^k U(k, x_2) \tag{3}$$

і зворотних диференціальних спектрів

$$\overline{U}(k, x_2) = \frac{\overline{H}^k}{k!}\left[\frac{\partial^k u(x_1, x_2)}{\partial x_1^k}\right]_{x_1 = H_1}, \quad \overline{u}(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x_1 - \overline{H}}{\overline{H}}\right)^k \overline{U}(k, x_2), \tag{4}$$

де $H + \overline{H} = H_1$.

Цей метод запропонований для зменшення похибок моделювання при обмеженій кількості дискрет диференціального спектра відносно одномірних диференціальних перетворень.

$$U_0(k, x_2) = \frac{H_1^k}{k!}\left[\frac{\partial^k u(x_1, x_2)}{\partial x_1^k}\right]_{x_1 = 0}, \quad u(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x_1}{H_1}\right)^k U_0(k, x_2) \tag{5}$$

Обмежимо число дискрет диференціальних спектрів $U(k, x_2)$, $\overline{U}(k, x_2)$, $\overline{U}_0(k, x_2)$ деяким заданим числом $q > 0$ так, що цілочисельний аргумент змінюється в межах $k = 0, 1, 2, ..., q$. У правих виразах (3), (4), (5) обмеження кількості дискрет диференціальних спектрів $U(k, x_2)$, $\overline{U}(k, x_2)$, $\overline{U}_0(k, x_2)$ у загальному випадку приводить до похибок. Праві вирази в (3), (4), (5) записані у формі рядів Тейлора. Тому оцінка зверху похибки $|\varepsilon_0|$ одномірних диференціальних перетворень (5) згідно з Лагранжем [11] дається виразом:

$$|\varepsilon_0| \le \frac{H_1^{q+1}}{(q+1)!} \sup_{\substack{0 < x_1 < H_1 \\ 0 \le x_2 \le H_2}} \left|u^{(q+1)}(x_1, x_2)\right|. \tag{6}$$

З урахуванням обмеження (2) при $m = q + 1$ вираз (6) набуває вигляду:

$$|\varepsilon_0| \le \frac{H_1^{q+1}}{(q+1)!} C = \left|\hat{\varepsilon}_0\right|, \tag{7}$$

де $\left|\hat{\varepsilon}_0\right|$ – оцінка зверху похибки $|\varepsilon_0|$.

Система прямих (3) і зворотних (4) диференціальних спектрів моделює функцію $u(x_1, x_2)$ при фіксованому значенні x_2 на двох інтервалах змінної $x_1 \in [0, H]$ і $x_1 \in [H, H_1]$. Позначимо похибку апроксимації функції $u(x_1, x_2)$ відрізком ряду Тейлора на інтервалі $[0, H]$ як ε_1, а на інтервалі $[H, H_1]$ – ε_2. Оцінки зверху цих похибок згідно з Лагранжем [11] мають вигляд:

$$|\varepsilon_1| \le \frac{H^{q+1}}{(q+1)!} \sup_{\substack{0 < x_1 < H_1 \\ 0 \le x_2 \le H_2}} \left|u^{(q+1)}(x_1, x_2)\right|, \tag{8}$$

$$|\varepsilon_2| \le \frac{\overline{H}^{q+1}}{(q+1)!} \sup_{\substack{H < x_1 < H_1 \\ 0 \le x_2 \le H_2}} \left|u^{(q+1)}(x_1, x_2)\right|. \tag{9}$$

Обмеження (2) при $m = q + 1$ для двох інтервалів змінної x_1 мають вигляд:

$$\sup_{\substack{0 < x_1 < H_1 \\ 0 \le x_2 \le H_2}} \left|u^{(q+1)}(x_1, x_2)\right| \le C < +\infty, \text{ при } x_1 \in [0, H], \tag{10}$$

$$\sup_{\substack{H < x_1 < H_1 \\ 0 \le x_2 \le H_2}} \left|u^{(q+1)}(x_1, x_2)\right| \le C < +\infty, \text{ при } x_1 \in [H, H_1], \tag{11}$$

З урахуванням (10), (11) вирази (8), (9) дають оцінки зверху похибок $|\varepsilon_1|$ і $|\varepsilon_2|$:

$$|\varepsilon_1| \le \frac{H^{q+1}}{(q+1)!} C = \left|\hat{\varepsilon}_1\right|, \tag{12}$$

$$|\varepsilon_2| \le \frac{\overline{H}^{q+1}}{(q+1)!} C = \left|\hat{\varepsilon}_2\right|, \tag{13}$$

де $\left|\hat{\varepsilon}_i\right|$ – оцінка зверху похибки $|\varepsilon_i|$, $i = 1, 2.$

Вирази (12), (13) перетворимо в оцінки зверху відносних похибок $\dfrac{|\varepsilon_1|}{\left|\hat{\varepsilon}_0\right|}$, $\dfrac{|\varepsilon_2|}{\left|\hat{\varepsilon}_0\right|}$ із урахуванням оцінки зверху похибки $\left|\hat{\varepsilon}_0\right|$ (7):

$$\frac{|\varepsilon_1|}{|\hat{\varepsilon}_0|} \le \frac{H^{q+1}}{H_1^{q+1}}, \tag{14}$$

$$\frac{|\varepsilon_2|}{|\hat{\varepsilon}_0|} \le \frac{\overline{H}^{q+1}}{H_1^{q+1}}, \tag{15}$$

де $H_1 = H + \overline{H}$.

Аналіз виразів (14), (15) з урахуванням, що $0 \le H \le H_1$, $0 \le \overline{H} \le H_1$, дає діапазон змінних відносних похибок у межах:

$$0 \le \frac{|\varepsilon_1|}{|\hat{\varepsilon}_0|} \le 1,\ 0 \le \frac{|\varepsilon_2|}{|\hat{\varepsilon}_0|} \le 1. \tag{16}$$

Але похибки $|\varepsilon_1|$ і $|\varepsilon_2|$ пов’язані між собою. Якщо обрати H з потрібного значення похибки $|\varepsilon_1|$, то оцінка похибки $|\varepsilon_2|$ (15) визначається виразом:

$$\frac{|\varepsilon_2|}{|\hat{\varepsilon}_0|} \le \frac{(H_1 - H)^{q+1}}{H_1^{q+1}}. \tag{17}$$

Аналіз виразів (16)–(17) показує, що при $\frac{|\varepsilon_1|}{|\hat{\varepsilon}_0|} \to 0$, $\frac{|\varepsilon_2|}{|\hat{\varepsilon}_0|} \to 1$. Тому зменшення однієї відносної похибки призводить до збільшення іншої відносної похибки і навпаки. Розглянемо задачу оптимального вибору H згідно з виразами (14), (17). Відносні похибки розглядаємо як часткові критерії якості:

$$I_1(H) = \frac{|\hat{\varepsilon}_1|}{|\hat{\varepsilon}_0|} = \frac{H^{q+1}}{H_1^{q+1}}, \tag{18}$$

$$I_2(H) = \frac{|\hat{\varepsilon}_2|}{|\hat{\varepsilon}_0|} = \frac{(H_1 - H)^{q+1}}{H_1^{q+1}}. \tag{19}$$

Згідно з (16) часткові критерії якості (18), (19) змінюються в межах:

$$0 \le I_1(H) \le 1,\ 0 \le I_2(H) \le 1. \tag{20}$$

Поставимо задачу двокритеріальної оптимізації часткових критеріїв якості (18), (19) за змінною H в межах обмежень (20). Застосуємо згортку часткових критеріїв якості (18), (19) за нелінійною схемою компромісів [12]:

$$\min_H I(H) = \min_H \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1 - \frac{I_i(H)}{I_{im}}}, \tag{21}$$

де $I_{im} = 1$ – максимально допустимі значення часткових критеріїв якості згідно з (20).

За необхідної умови екстремуму унімодальної функції $I(H)$ (21) із врахуванням (18), (19) маємо рівняння для визначення оптимального значення H^0:

$$\frac{\partial I(H)}{\partial(H)} = \frac{H^q}{\left(H_1^{q+1} - H^{q+1}\right)^2} - \frac{(H_1 - H)^q}{\left[H_1^{q+1} - (H_1 - H)^{q+1}\right]^2} = 0. \tag{22}$$

Рівняння (22) задовольняє корінь $H = \frac{H_1}{2}$.

У роботі [13] показано, що мінімізація унімодальної функції (21) за умови опуклості часткових критеріїв якості (18), (19) дає оптимальний по Парето розв'язок двокритеріальної задачі (18)–(20).

Часткові критерії якості (18), (19) для оптимального значення $H^0 = \frac{H_1}{2}$ дають рівні значення оцінок зверху відносних похибок:

$$\frac{\left|\hat{\varepsilon}_1\right|}{\left|\hat{\varepsilon}_0\right|} = \frac{\left|\hat{\varepsilon}_2\right|}{\left|\hat{\varepsilon}_0\right|} = \frac{1}{2^{q+1}}. \tag{23}$$

Повна похибка $|\varepsilon|$ апроксимації функції $u(x_1, x_2)$ відрізом ряду Тейлора при $x_1 \in [0, H_1]$ і фіксованому значенні x_2 складається з похибки $|\varepsilon_1|$ на інтервалі $[0, H]$ і похибки $|\varepsilon_2|$ на інтервалі $[H, H_1]$:

$$|\varepsilon| = |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|. \tag{24}$$

Перейдемо до відносних похибок у (24). Тоді маємо:

$$\frac{|\varepsilon|}{\left|\hat{\varepsilon}_0\right|} = \frac{|\varepsilon_1|}{\left|\hat{\varepsilon}_0\right|} + \frac{|\varepsilon_2|}{\left|\hat{\varepsilon}_0\right|}. \tag{25}$$

Оцінку зверху повної відносної похибки отримаємо з виразів (14), (17), (25):

$$\frac{|\varepsilon|}{\left|\hat{\varepsilon}_0\right|} \le \left|\frac{H^{q+1}}{H_1^{q+1}}\right| + \left|\frac{(H_1 - H)^{q+1}}{H_1^{q+1}}\right|. \tag{26}$$

Підстановка оптимального значення $H = \dfrac{H_1}{2}$ у вираз (26) дає змогу виразити оцінку зверху повної похибки моделювання на основі системи прямих і зворотних диференціальних спектрів (3) і (4):

$$|\varepsilon| \le 2^{-q}\left|\hat{\varepsilon}_0\right| = \left|\hat{\varepsilon}\right|, \tag{27}$$

де $\left|\hat{\varepsilon}_0\right|$ – оцінка зверху похибки $|\varepsilon_0|$ одномірних диференціальних перетворень (5) при врахуванні обмеженої кількості дискрет при $k = 0, 1, 2, ..., q$,

$\left|\hat{\varepsilon}\right|$ – оцінка зверху похибки моделювання на основі системи прямих і зворотних диференціальних спектрів (3), (4).

З виразу (27) можна зробити висновок, що оцінка зверху похибки моделювання фізичного поля $u(x_1, x_2)$ на основі системи прямих і зворотних диференціальних спектрів (3), (4) в 2^q раз менше оцінки зверху похибки моделювання одномірними диференціальними перетвореннями (5) при $H = \overline{H} = \dfrac{H_1}{2}$ і врахуванні нульових і $q \ge 1$ ненульових дискрет диференціальних спектрів $U(k, x_2)$, $\overline{U}(k, x_2)$, $U_0(k, x_2)$, $k = 0, 1, 2, ..., q$.

З аналізу виразу (27) випливає, що із збільшенням числа q дискрет, що враховуються, диференціальних спектрів $U(k, x_2)$, $\overline{U}(k, x_2)$, $U_0(k, x_2)$ верхня межа оцінки повної похибки моделювання зменшується за показниковим законом і при $q \to \infty$ прямує до нульової нижньої границі. Тому діапазон зміни повної похибки моделювання фізичного поля $u(x_1, x_2)$ на основі системи прямих і зворотних диференціальних спектрів (3), (4) визначається обмеженнями:

$$0 \le |\varepsilon| \le 2^{-q}\left|\hat{\varepsilon}_0\right|, \tag{28}$$

де $\left|\hat{\varepsilon}_0\right|$ згідно з (6), (7) знаходяться за виразом:

$$\left|\hat{\varepsilon}_0\right| = \frac{H_1^{q+1}}{(q+1)!} \sup_{\substack{0 < x_1 < H_1 \\ 0 \le x_2 \le H_2}} \left|u^{(q+1)}(x_1, x_2)\right|. \tag{29}$$

З виразів (28), (29) випливає, що гарантований рівень верхньої межі похибки моделювання системою прямих і зворотних диференціальних спектрів зменшується в 2^q раз у порівнянні з верхньою межею похибки моделювання одномірними диференціальними перетвореннями (29).

Теоретично вираз (28) допускає можливість досягнення нульової похибки $|\varepsilon|$ при $q \to \infty$. Але досягненню нульової похибки $|\varepsilon|$ перешкоджає обмеженість розрядної сітки представлення дискрет диференціальних спектрів $U(k, x_2), \overline{U}(k, x_2)$ при $k = 0, 1, 2, ..., q$. Похибка, викликана обмеженістю розрядної сітки, обмежує зверху число $q < +\infty$. Це обмеження слід враховувати лише при розробці спеціалізованих обчислювальних пристроїв для моделювання фізичних процесів і полів на основі системи прямих і зворотних диференціальних спектрів. У випадку моделювання фізичних полів і процесів на ПЕОМ достатньо виконувати обчислення (3), (4) на подвоєній розрядній сітці по відношенню до розрядної сітки, довжина якої визначається необхідною точністю представлення фізичних величин.

Висновки. Розроблені оцінки зверху похибок моделювання двовимірних фізичних полів системою прямих і зворотних диференціальних спектрів і одномірними диференціальними перетвореннями у випадку врахування обмеженої кількості дискрет диференціальних спектрів. Встановлено, що оцінка зверху похибки моделювання двовимірного фізичного поля на основі системи прямих і зворотних диференціальних спектрів у 2^q раз менше оцінки зверху похибки моделювання одномірними диференціальними перетвореннями при обмеженій кількості дискрет диференціальних спектрів, де q – номер останньої врахованої дискрети диференціального спектра.

Перспективи подальших досліджень у даному напрямку пов’язані з розробкою оцінок похибок моделювання тривимірних фізичних полів на основі одномірних прямих і зворотних диференціальних спектрів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: БИНОМ, 2003. – 632 с.
2. *Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д.* Численные методы. Использование MATLAB. – М.: Вильямс, 2001. – 720 с.
3. *Поршнев С.В.* Вычислительная математика. – С.-Пб.: БХВ Петербург, 2004. – 320 с.
4. *Рвачев В.Л., Слесаренко А.П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – К.: Наук. думка, 1976. – 288 с.
5. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – К.: Наук. думка, 1986. – 158 с.
6. *Пухов Г.Е.* Приближенные методы математического моделирования, основанные на применении дифференциальных Т-преобразований. – К.: Наук. думка, 1988. – 216 с.
7. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.
8. *Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М.* Моделювання фізичних процесів методом одномірних диференціальних перетворень крайових задач // Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. пр. – Вип. 3 (14). – К.: НАУ, 2005. – С. 25–30.
9. *Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М.* Метод моделювання фізичних процесів на основі диференціальних перетворень нелінійних крайових задач // Вісник ЖДТУ / Технічні науки. – 2007. – № 2 (41). – С. 59–65.
10. *Баранов В.Л., Костюченко Р.М., Молодецька К.В.* Метод моделювання фізичних полів і процесів на основі прямих і зворотних диференціальних спектрів // Вісник ЖДТУ / Технічні науки. – 2009. – № 2 (49). – С. 59–68.
11. *Трухаев Г.И.* Методы инфлуентного анализа высоких порядков. – Ленинград: Наука, 1987. – 257 с.
12. *Воронин А.Н.* Нелинейная схема компромиссов в векторной оптимизации эргатических систем // Кибернетика и вычислительная техника. – 1986. – Вып. 72. – С. 9–13.
13. Векторная оптимизация динамических систем / А.Н. Воронин, Ю.К. Зиатдинов, А.И. Козлов и др. / Под ред. А.Н. Воронина. – К.: Техніка, 1999. – 284 с.

БАРАНОВ Володимир Леонідович – Заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник Житомирського військового інституту ім. С.П. Корольова Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси:

– моделювання;

– чисельні методи;

– оптимізація;

– диференціальні перетворення.

КОСТЮЧЕНКО Руслана Михайлівна – кандидат технічних наук, професор кафедри фундаментальних дисциплін Житомирського військового інституту ім. С.П. Корольова Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси:

– моделювання;

– чисельні методи;

– диференціальні перетворення.

МОЛОДЕЦЬКА Катерина Валеріївна – аспірант, викладач кафедри автоматизованих систем управління Житомирського військового інституту ім. С.П. Корольова Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси:

– моделювання;
– чисельні методи;
– диференціальні перетворення.

Подано 25.09.2009

Баранов В.Л., Костюченко Р.М., Молодецька К.В. Оцінка похибки моделювання фізичних полів і процесів системою прямих і зворотних диференціальних спектрів
Баранов В.Л., Костюченко Р.М., Молодецкая Е.В. Оценка погрешности моделирования физических полей и процессов системой прямых и обратных дифференциальных спектров
Baranov V.L., Kostuchenko R.M., Molodetska K.V. The evaluation of simulation error for physical fields and processes by means of the system of direct and inverse differential spectra

УДК 621.372.061

Оценка погрешности моделирования физических полей и процессов системой прямых и обратных дифференциальных спектров / В.Л. Баранов, Р.М. Костюченко, Е.В. Молодецкая

Предложена оценка погрешности моделирования двумерных физических полей и процессов системой прямых и обратных дифференциальных спектров в сравнении с одномерными дифференциальными преобразованиями.

УДК 621.372.061

The evaluation of simulation error for physical fields and processes by means of the system of direct and inverse differential spectra / V.L. Baranov, R.M. Kostuchenko, K.V. Molodetska

There has been suggested the evaluation of simulation error for two-dimensional physical fields and processes by means of the system of direct and inverse differential spectra in comparison with one-dimensional differential transformation.