УДК 519. 161

А.В. Морозов, аспір.
Житомирський державний технологічний університет

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА

(Представлено д.т.н., проф. Панішевим А.В.)

Предметом обговорення у статті є гамільтонова задача про сільського листоношу, яка є узагальненням гамільтонової задачі комівояжера. Запропонована модифікація класичного методу гілок та меж (методу Літтла) дозволяє знайти точний розв'язок гамільтонової задачі про сільського листоношу або коректно встановити його відсутність.

Постановка проблеми. У дослідженні проблеми комівояжера накопичено багато результатів, які постійно розвиваються та вдосконалюються. Але не для кожної прикладної задачі типу комівояжера відомі алгоритми пошуку розв'язку з показниками ефективності, які придатні у реальних ситуаціях. Однією з таких задач є задача про сільського листоношу, яка формулюється таким чином [1].

Задано зв'язний зважений граф $H = (V, U)$ з множиною вершин V, $|V| = n$, і множиною ребер U. Кожному ребру $\{i, j\} \in U$ приписано вагу $d_{ij} \in Z_0^+$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, Z_0^+ – множина невід'ємних цілих чисел. Граф H повністю визначається симетричною матрицею ваг $\left[d_{ij}\right]_n$, де $d_{ij} \in Z_0^+$, якщо $\{i, j\} \in U$, і $d_{ij} = \infty$ інакше, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, $d_{ii} = \infty$, $i, j = \overline{1, n}$. На множині U задано непорожню підмножину ребер R. Необхідно знайти у графі H цикл, який містить кожне ребро з R і має мінімальну сумарну вагу всіх ребер.

Позначимо $z(R)$ гамільтонів цикл графа H, який проходить по всіх ребрах множини R. Назвемо гамільтоновою задачею про сільського листоношу (ГЗСЛ) задачу, що полягає у знаходженні гамільтонового циклу $z^*(R)$, який мінімізує функціонал:

$$C\left(z(R)\right) = \sum_{\{k,l\} \in z(R)} d_{kl} . \tag{1}$$

Зацікавленість у розв'язанні ГЗСЛ проявляється у тому випадку, коли потрібно знайти кільцевий маршрут на транспортній мережі графа або району, що модулюється графом $H = (V, U)$. Кожному пункту відправлення (прибуття) мережі відповідає вершина $i \in V, |V| = n$, а кожному ребру $\{i, j\} \in U$ відповідає відрізок дорожнього полотна між парою сусідніх пунктів i і j. Ребро $\{i, j\}$ характеризується вагою (вартістю) d_{ij}, рівною затратам на переміщення транспортного засобу з i у j або з j у i.

На практиці пасажирські автоперевезення виконуються за маршрутами, для яких завчасно визначено порядок проходження деякої частини пунктів. Основою для вибору таких ділянок можуть бути пріоритети одних пунктів над іншими: масиву багатоповерхових будівель над котеджним селищем, заводського району над курортною зоною і т. п. Наприклад, середній час поїздки пасажирів за кільцевим міським маршрутом, що охоплює сусідні, прилеглі, щільнонаселені квартали, менший, ніж у будь-якого іншого кільцевого маршруту, якщо показники якості дорожнього покриття мережі відповідають встановленим параметрам. Ділянки доріг, апріорі включені у планований кільцевий маршрут у графі $H = (V, U)$, представлені множиною ребер R, що утворюють сукупність ланцюгів. Якщо у графі H міститься гамільтонів цикл $z(R)$, то у відповідній транспортній мережі він визначає найпростіший кільцевий маршрут.

ГЗСЛ є NP-повною, оскільки у випадку $R = \varnothing$ вона являє собою NP-повну гамільтонову задачу комівояжера (ГЗК) [1]. В [2] запропоновано алгоритм, який коректно знаходить розв'язок ГЗК, якщо граф H гамільтонів, і встановлює її нерозв'язність у протилежному випадку. В основі запропонованого алгоритму лежить схема гілок та меж, яка виконується після перевірки достатніх умов нерозв'язності ГЗСЛ. Очевидно, що складність такої перевірки має бути обмежена поліномом від розміру задачі.

Безпосереднє застосування алгоритму гілок та меж з [2] не дозволяє розв'язати ГЗСЛ. Включення у шуканий гамільтонів цикл заданої підмножини ребер $R \neq \varnothing$ виявляється настільки сильним обмеженням, що вимагає іншого підходу до організації розгалуження та обчислення нижніх оцінок для $C\left(z^*(R)\right)$.

Метою досліджень є модифікація класичного методу гілок та меж (метода Літтла), яка забезпечує знаходження розв'язку як ГЗСЛ, так і ГЗК.

Основна частина. Очевидно, і ГЗК і ГЗСЛ не мають розв'язків, якщо граф H містить кінцеві (висячі) вершини. Висячі вершини у графі H знаходяться тривіально за час $O(|V|)$. Задачі є нерозв'язними, коли граф H має точку зчленування [2, 3]. Щоб визначити, чи містить граф H точку зчленування, потрібно $O(|V|+|U|)$ елементарних операцій [3].

Легко бачити, що ГЗСЛ нерозв'язна, якщо у графі H а) підмножина ребер множини R утворює негамільтонів цикл; б) існує вершина, яка є інцедентною трьом або більше ребрам з R. Тому граф H, в якому множина ребер R не утворює сукупності вершинно-неперетинні ланцюгів, не містить циклу $z(R)$. На перевірку умов а) і б) достатньо часу, обмеженого величиною $O(|V|+|U|)$.

Нехай граф $H = (V, U)$ не має висячих вершин і точок зчленування, а множина його ребер $R \subset U$ у ГЗСЛ представлена вершинно-неперетинними ланцюгами. Виконаємо вершиннно-реберне перетворення (ВРП) графа H, в результаті якого встановлюються достатні умови нерозв'язності ГЗСЛ, які доповнюють перераховані умови.

S0. $H = (V, U)$ – граф, який не містить висячих вершин і точок зчленування; непорожня множина ребер $R \subset U$ утворює сукупність Z вершинно-неперетинних ланцюгів.

S1. Якщо число ланцюгів сукупності Z рівне $|R|$, то покласти $R' = R$, перейти до кроку S5.

S2. Для кожного ланцюга $(a,b,...,c,d) \in Z$ видалити усі ребра з $U \setminus R$, які а) з'єднують її будь-які дві вершини, б) інцедентні одній вершині з $\{b,...,c\}$, і визначити степені усіх вершин множини V. Якщо хоча б одна вершина в отриманому остовному підграфі графа H є ізольованою або висячою, то ГЗСЛ не має розв'язку.

S3. Замінити кожний ланцюг $(a,b,...,c,d)$ на ребро $\{a,d\}$, присвоївши йому вагу, рівну сумі ваг ребер ланцюга.

S4. $H' = (V',U')$ – граф, побудований після виконання кроку S3, R' – множина всіх ребер, отриманих з R в результаті побудови H'.

S5. Покласти $R^0 = \varnothing$.

S6. Якщо граф не містить вершин степені 2, то кінець.

S7. Якщо множина $R' \cup R^0$ не утворює паросполучення, то кінець: ГЗСЛ нерозв'язна.

S8. Кожний ланцюг $(p,q,...,t,w)$ з степенями вершин $\delta_p, \delta_w > 2$, $\delta_q = ... = \delta_t = 2$ замінити на ребро $\{p,w\}$ з вагою, рівною сумі ваг її ребер;

видалити з R' і R^0 усі ребра ланцюга, які належать R' і R^0;

покласти $R^0 = R^0 \cup \{p,w\}$;

якщо існує ще одне ребро $\{p,w\} \notin R^0 \cup R'$, видалити його.

S9. Якщо множина $R' \cup R^0$ не утворює сукупності вершинно-неперетинних ланцюгів, то кінець: ГЗСЛ нерозв'язна.

S10. Якщо степені усіх вершин побудованого графа рівні 2, то кінець: ГЗСЛ має розв'язок, інакше

покласти $R^0 = \varnothing$;

для кожного ланцюга $(p,w,...,r,v)$ усі ребра якого містяться у $R' \cup R^0$, виключити ребра, інцидентні вершинам $w,...,r$;

виключити з R' ребра ланцюга, які належать R';

замінити ланцюг на ребро $\{p,v\}$;

Якщо існує ще одне ребро, що з'єднує p і v, видалити його;

покласти $R^0 = R^0 \cup \{p,v\}$, $d_{pv} = d_{pw} + ... + d_{rv}$;

перейти до кроку S6.

Кожний ланцюг ребер множини R є простим ланцюгом, тобто таким, у якого усі вершини (а тому, і ребра) різні. У протилежному випадку він утворює негамільтонів цикл, і, тому, ГЗСЛ не має розв'язку. У гамільтонів цикл $z(R)$ мають входити усі ребра, які утворюють простий ланцюг $(x,a,b,...,c,d,y)$. В нього не можуть входити ребра, які з'єднують пари вершин $(a,b,...,c,d)$, і ребра, які інцидентні одній вершині з $\{b,...,c\}$. Тому їх потрібно видалити, розглядаючи ГЗСЛ на остовному підграфі графа H, у якому можуть міститися ізольовані та висячі вершини. Звідси випливає коректність дій, які виконуються на кроці S2.

Нехай остовний граф не містить ізольованих та висячих вершин, тоді вершини $a,b,...,c,d$ мають степені $\delta_a \geq 2, \delta_b = ... = \delta_c = 2, \delta_d \geq 2$. Гамільтонів цикл $z(R)$ має проходити по всіх ребрах ланцюга $(a,b,...,c,d)$, який можна замінити на ребро $\{a,d\}$ з вагою, рівною сумі ваг ребер ланцюга.

Множина *R*, яка міститься у циклі $z(R)$, якщо він існує, представлена сукупністю *Z* вершинно-неперетинних ланцюгів. Тому кожний ланцюг з Z з двома або більше ребрами, потрібно розглядати після виконання кроку S3, як одне ребро в ланцюзі $z(R)$. На кроці S3 знаходиться граф $H' = (V', U')$, $V' \subseteq V, U' \subseteq U$ і множина ребер R', $|R'| = |Z|$, яка включена у гамільтонів цикл $z(R')$, який відповідає $z(R)$. Процес ВРП зупиняється на кроці S6, якщо степені усіх вершин графа H' більші за 2. У цьому випадку або виконуються достатні умови того, що ГЗСЛ не має розв'язку, або потрібно перейти до побудови $z(R')$ за схемою методу гілок та меж.

Якщо у графі H' містяться вершини степені 2, то на кроці S5 формується множина ребер R^0. Кожне ребро $\{p,w\} \in R^0$, отримане на кроці S8, замінює ланцюг $(p,q,...,t,w)$, $\delta_p, \delta_w > 2$, $\delta_q = ... = \delta_t = 2$, що розглядається як частина гамільтонового циклу $z(R)$. Тому з R' і R^0 можна видалити усі її ребра, які містяться в R' або R^0. Очевидно, ГЗСЛ розв'язна, якщо у графі, побудованому на кроці S8, існує гамільтонів цикл, який проходить по всіх ребрах множини $R' \cup R^0$. Якщо після виконання кроку S8 множина $R' \cup R^0$ представлена одним ребром, то ГЗСЛ має єдиний розв'язок. Вона не має розв'язку, якщо знайдеться пара ланцюгів, які складаються з ребер $R' \cup R^0$ та мають спільну вершину.

Перед виконанням кроку S10 множина ребер $R' \cup R^0$ утворює сукупність вершинно-неперетинних ланцюгів $(p,w,...,r,v)$. У графі, побудованому на кроці S8, для кожного ланцюга $(p,w,...,r,v)$ видаляються ребра, які інцидентні вершинам з множини $\{w,...,r\}$, оскільки вони не можуть входити у розв'язок ГЗСЛ. На кроці S10 знову формується множина R^0, у яке додається кожне ребро $\{p,w\}$, яке замінює ланцюг $(p,w,...,r,v)$, а з R' виключаються усі ребра, які містяться в R'.

Кроки S6-S10 повторюються доти, поки не буде побудовано граф з степенями вершин, не рівними 2. Тоді розглядаючи кожне ребро з $R' \cup R^0$ побудованого графа як одноланковий ланцюг, отримаємо достатні умови того, що граф *H* не містить гамільтонів цикл $z(R)$.

Приклад. Виконаємо алгоритм ВРП для графа *H*, зображеного на рис. 1.

$R = \{\{11,15\},\{15,14\},\{8,5\},\{5,3\},\{4,12\},\{1,2\}\}$, $Z = \{(11,15,14),(1,2),(3,5,8),(4,12)\}$.

Передбачається, що усі ребра мають одиничну вагу. Відмітимо, що граф містить гамільтонів цикл $z(R) = (1,2,6,7,4,12,3,5,8,9,10,11,15,14,13,1)$

Остовний підграф графа *H*, отриманий на кроці S2 представлений на рис. 2.

Після виконання кроку S3 отримаємо граф H' (рис. 3), де $R' = \{\{11,14\},\{3,8\},\{1,2\},\{4,12\}\}$. Покладемо $R^0 = \varnothing$. Побудований граф має вершини степені 2, а множина $R' \cup R^0$ утворює паросполучення.

На кроці S8 кожний з ланцюгів $(11,14,13)$, $(8,9,10,11)$, $(2,6,7)$ згортається у ребро (рис. 4), $R^0 = \{\{8,11\},\{11,13\},\{2,7\}\}$, $R' = \{\{3,8\},\{1,2\},\{4,12\}\}$.

На кроці S10 $R^0 = \varnothing$, ланцюги $(3,8,11,13)$ і $(1,2,7)$ перетворюються у ребра {3,13} і {1,7}. Результат перетворення зображений на рис. 5; $R' = \{\{4,12\}\}$, $R^0 = \{\{3,13\},\{1,7\}\}$. Побудований граф не є гамільтоновим циклом, містить вершини з степенями 2, а множина $R' \cup R^0$ утворює паросполучення. Для побудови графа (рис. 5) повторюється крок S8.

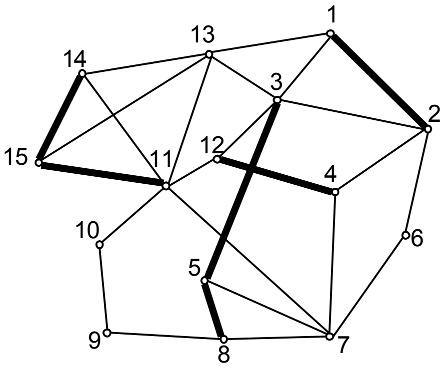

Рис. 1

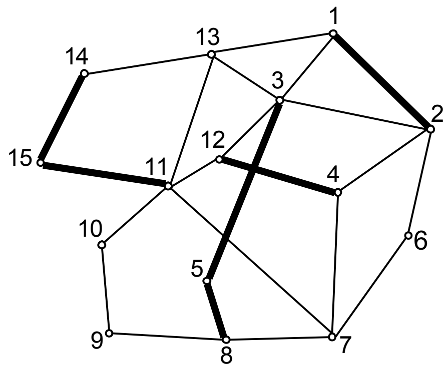

Рис. 2

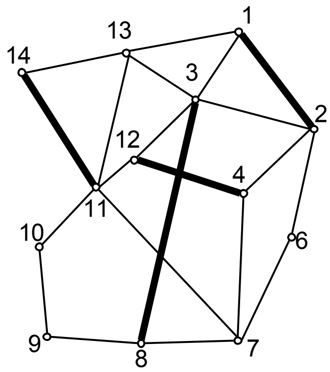

Рис. 3

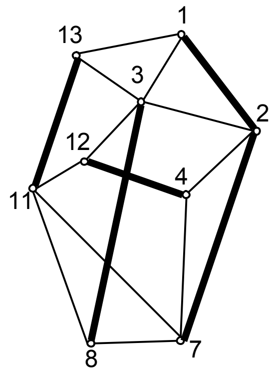

Рис. 4

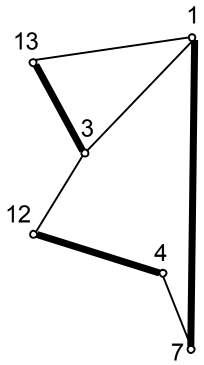

Рис. 5

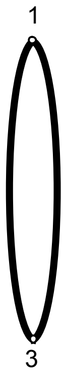

Рис. 6

На кроці S8 розглядаються ланцюги $(1,13,3)$ і $(1,7,4,12,3)$, кожний з яких замінюється на ребро $\{1,3\}$; $R' = \varnothing$, $R^0 = \{\{1,3\}\}$. Степені усіх вершин побудованого графа рівні 2 (рис. 6), ГЗСЛ має розв'язок.

Оскільки множина $R' \cup R^0$ представлена єдиним кратним ребром $\{1,3\}$, ГЗСЛ має єдиний розв'язок. Виконаємо відновлення гамільтонового циклу. Для цього будемо розгортати ребра отриманого графа у порядку, оберненому до порядку згортання ребер.

Останньою здійснювалася заміна ребра $\{1,3\}$ на ланцюг $(1,7,4,12,3)$, тому замінюємо ребро {1,3} набором ребер {1,7}, {7,4}, {4,12}, {12,3}, які утворюють ланцюг $(1,7,4,12,3)$. Отримуємо граф, який зображено на рис. 8.

Далі виконуємо розгортання ребра {1,3}, замінюючи його на ребра {1,13} і {13,3}, оскільки воно було згорнуте у ланцюг $(1,13,3)$. Результат зображено на рис. 9.

Далі здійснюється розгортання ребра $\{1,7\}$, яке було замінене на ланцюг $(1,2,7)$. Продовжуючи процес, виконуємо заміни: ребра {3,13} на ланцюг (3,8,11,13), ребра {2,7} на ланцюг (2,6,7), ребра {8,11} на ланцюг (8,9,10,11), ребра {11,3} на ланцюг (11,14,13), ребра {3,8} на ланцюг (3,5,8), ребра {11,14} на ланцюг (11,15,14).

В результаті виконання вказаної послідовності замін, отримаємо гамільтонів цикл (1,2,6,7,4,12,3,5,8,9,10,11,15,14,13,1). Остаточний результат показано на рис. 10.

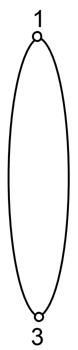

Рис. 7

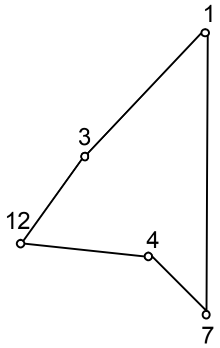

Рис. 8

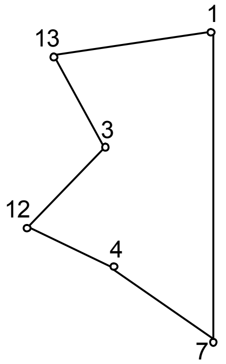

Рис. 9

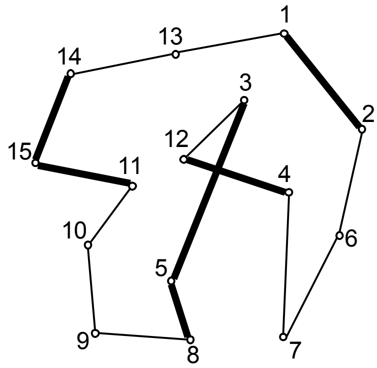

Рис. 10

Твердження. Якщо результатом ВРП графа H є граф, у якому множина ребер $R' \cup R^0$ не утворює паросполучення, то ГЗСЛ не має розв'язку.

Таким чином, ГЗСЛ зводиться до цієї ж задачі на графі $H = (V, U)$, у якому а) степені усіх вершин більші 2, б) множина ребер R, яка міститься в шуканому гамільтоновому циклі, утворює паросполучення R. Очевидно, $|R| \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, n = V$. Відмітимо, що величина $|R|$ обмежує простір розв'язків настільки, що він може виявитися порожнім. Назвемо допустимий розв'язок ГЗСЛ $z(R)$ обходом.

Пошук розв'язку задачі починається з перетворення матриці вартостей графа H у приведену матрицю [4]. Воно полягає у тому, що в рядку i шукається мінімальний елемент $\alpha_i = \min\limits_j d_{ij}$, $i = \overline{1,n}$, який віднімається від кожного елемента цього рядка. Потім у стовпці j шукається мінімальний елемент $\beta_j = \min d_{ij}, j = \overline{1,n}$, який віднімається від кожного елемента цього стовпця. Елементи α_i і β_j називаються коефіцієнтами приведення. З приведеної матриці $\left[d_{ij}\right]_n$ знаходиться нижня границя вартості шуканого розв'язку

$$\varphi(R) = \sum_{\{i,j\} \in R} \min\left\{d_{ij}, d_{ji}\right\} + \gamma , \qquad (2)$$

де $\gamma = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_i$.

Наведена матриця, яка визначає множину усіх розв'язків ГЗСЛ, у загальному випадку не симетрична. Їй взаємно однозначно відповідає зважений орієнтований мультиграф $H' = (V, U')$, в якому вершини i і j зв'язані парою дуг (i, j) і (j, i), якщо у графі $H = (V, U)$ вони зв'язані ребром $\{i, j\}$. Таким чином, кожне ребро $\{i, j\} \in R$ графа H представлене у мультиграфі H' двома дугами $(i, j) \in R'$, $(j, i) \in R'$, $|U'| = 2|U|$, $|R'| = 2|R|$.

У наведеній матриці виберемо ті елементи (i, j) і $(j, i) \in R'$, для яких $\Delta_{ij} = \min\left\{d_{ij}, d_{ji}\right\} > 0$ і покладемо

$$d_{ij} = d_{ij} - \min\left\{d_{ij}, d_{ji}\right\} = d_{ij} - \Delta_{ij}, \; d_{ji} = d_{jji} - \min\left\{d_{ij}, d_{ji}\right\} = d_{ji} - \Delta_{ij} .$$

Назвемо отриману матрицю $\left[d_{ij}\right]_n$ повністю приведеною. Подальші дії будуть виконуватися з допомогою цієї матриці.

Перетворення матриці вартостей графа H у повністю приведену матрицю $\left[d_{ij}\right]_n$ має аргументоване обґрунтування. ГЗСЛ для повністю приведеної матриці полягає у побудові гамільтонового контуру або обходу мінімальної вартості, який включає в точності одну дугу з кожної пари (i, j), $(j, i) \in R'$, що містить хоча б одну дугу з нульовою вагою. Таким чином, за матрицею $\left[d_{ij}\right]_n$ визначається список дуг нульової ваги, які є претендентами на включення в оптимальний розв'язок.

Викладені міркування відкривають можливість адаптувати класичний алгоритм гілок та меж, описаний в [5], для пошуку розвозку ГЗСЛ. Покажемо, що спосіб розгалуження допустимих розв'язків $z(R)$ вкладається у відому схему побудови бінарного дерева перебору [5].

Кореню дерева перебору $\{z(R)\}$ поставимо у відповідність повністю приведену матрицю $[d_{ij}]_n$ з оцінкою $\varphi(R)$ і визначимо дугу мультиграфа H', яка ініціює розгалуження. Для цього, як і у [5], кожний елемент (p,q) в $[d_{ij}]_n$, такий, що $d_{pq}=0$, оцінимо величиною

$$\gamma(p,q)=\min_{i\neq q} d_{pi}+\min_{j\neq p} d_{jq} \tag{3}$$

і знайдемо елемент (p,q) з найбільшим значенням

$$\Gamma(k,l)=\max\{\gamma(p,q)\mid d_{pq}=0\}. \tag{4}$$

Елементу (p,q) у мультиграфі H' відповідає дуга (p,q), яка ініціює розбиття множини всіх обходів на дві підмножини і породжує в умовах ГЗСЛ два випадки: $\{k,l\}\notin R$ и $\{k,l\}\in R$.

У випадку $\{k,l\}\notin R$ множина усіх розв'язків задачі розбивається на підмножини $\{\{k,l\}\notin R\}$ и $\{(\overline{k,l})\}$. Перша підмножина включає усі обходи, які містять дугу (k,l), а друга – усі обходи, які не містять цієї дуги.

Матриця, за якою обчислюється нижня границя $\varphi((k,l)\in R')$ вартості всіх обходів множини $\{\{k,l\}\notin R'\}$ і що визначає цю множину, знаходиться так, як і в [5], при умові, що виконується наступне правило.

Якщо множина *R* містить ребро $\{x,k\}$, то у шуканий обхід разом з дугою (k,l) включається дуга (x,k). Аналогічно, якщо множина *R* містить ребро $\{y,l\}$, то до дуги (k,l) приєднується дуга (l,y). Включення дуги (x,k) або (l,y) у підмножину розв'язків $\{(k,l)\notin R'\}$ означає, що матриця, яка її визначає не містить не тільки рядок *k* і стовпець *l*, але і той рядок і стовпець, номери яких є початком і кінцем приєднаної дуги. У випадку $\{x,k\}$, $\{y,l\}\in R$ до дуги (k,l) приєднуються дуги (x,k) і (l,y), а у матриці, яка визначає множину $\{(k,l)\notin R'\}$, виключаються рядки *x*, *k*, *l* і стовпці *k*, *l*, *y*.

Позначимо нижню границю вершини розгалуження φ. Для дуги $(k,l)\notin R'$, яка ініціює розгалуження, покладемо

$$\mu_k=\begin{cases} d_{xk}, \text{ если } \{x,k\}\in R, \\ 0, \text{ иначе.}\end{cases}, \quad \mu_l=\begin{cases} d_{ly}, \text{ если } \{l,y\}\in R, \\ 0, \text{ иначе.}\end{cases}$$

де d_{xk}, d_{ly} – елементи матриці, що відповідає границі φ. У випадку $\varphi=\varphi(R)$ вони є елементами повністю приведеної матриці $[d_{ij}]_n$. Тоді вартість усіх обходів множини $\{(k,l)\notin R'\}$ обмежена знизу величиною

$$\varphi((k,l)\notin R)=\varphi+\mu_k+\mu_l+\sum\alpha_i'+\sum\beta_j', \tag{5}$$

де α_i' і β_j' – коефіцієнти приведення, отримані в результаті перетворення матриці, якій відповідає границя φ, у матрицю, яка визначає множину $\{(k,l)\notin R\}$.

Матриця, яка визначає множину $(\overline{k,l})$, і границя $\varphi(\overline{k,l})$ знаходиться так, як і у [5]:

$$\varphi(\overline{k,l})=\varphi+\Gamma(k,l). \tag{6}$$

Розглянемо випадок, коли $(k,l)\in R$. Простір розв'язків ГЗСЛ $\{z(R)\}$ розбивається на дві підмножини $\{(k,l)\}$ і $\{(l,k)\}$. В першу підмножину включаються усі обходи, які містять дугу (k,l), а в другу – дугу (l,k).

Нехай вершині розгалуження відповідає границя φ і матриця *D*, яка породжує дугу (k,l) або (l,k), $\{k,l\}\in R$, з максимальною оцінкою. Матриця, яка визначає підмножину $\{(k,l)\}$, знаходиться у результаті виключення з *D* рядка *k* і стовпця *l*, присвоєння елемента d_{lk} значення ∞ і приведення отриманої скороченої матриці. Аналогічно, для знаходження матриці, яка визначає підмножину $\{(l,k)\}$, треба в *D* покласти $d_{kl} = \infty$, видалити рядок l і стовпець k і виконати приведення отриманої скороченої матриці. Нижні границі вартості обходів для підмножини $\{(k,l)\}$ і $\{(l,k)\}$ обчислюються таким чином:

$$\varphi(k,l) = \varphi + d_{kl} + \sum_{i \neq k} \alpha_i' + \sum_{j \neq l} \beta_j' , \tag{7}$$

$$\varphi(l,k) = \varphi + d_{lk} + \sum_{i \neq k} \alpha_i' + \sum_{j \neq l} \beta_j' , \tag{8}$$

де α_i', β_j' – коефіцієнти приведення, отримані в результаті перетворення матриці *D*.

Можливим є випадок, коли в *D* або $d_{kl} = \infty$, або $d_{lk} = \infty$. З (7) і (8) слідує, що якщо $d_{kl} = \infty$, то $\{(k,l)\} = \varnothing$, якщо $d_{lk} = \infty$, то $\{(l,k)\} = \varnothing$.

Модифікація базового алгоритму гілок та меж для розв'язання ГЗСЛ, отриманої у результаті ВРП, має наступний вигляд.

0. $H = (V,U)$ – неорієнтований зважений граф з степенями вершин більшими 2, представлений матрицею вартостей порядку $n = |V|$; R – паросполучення графа *H*, яке міститься в шуканому гамільтоновому циклі $z^*(R)$ мінімальної вартості. Покладаємо $C^* = \infty$.

1. Матриця вартостей графа *H* перетворюється в приведену матрицю, за якою обчислюється нижня границя $\varphi(R)$ вартостей для всіх розв'язків задачі. З приведеної матриці визначається повністю приведена матриця $D = \left[d_{ij} \right]_n$, яка відповідає орієнтованому зваженому мультиграфа $H' = (V, U')$, $|U'| = 2|U|$, $|R'| = 2|R|$. В H' потрібно знайти гамільтонів контур (обхід), який містить рівно по одній дузі з кожної пари дуг (i,j), $(j,i) \in R'$, і має мінімальну віртість.

2. В матриці *D* за формулами (3) і (4) знаходиться елемент (k,l), який представлений у мультиграфі дугою (k,l), яка породжує у дереві перебору вершину розгалуження.

3. Якщо $\{k,l\} \notin R$, то перехід до п. 7.

4. Якщо $d_{lk} = \infty$, то підмножина обходів $\{(l,k)\}, \{k,l\} \in R$, яка містить дугу (l,k) порожня; перехід до п. 6.

5. Для визначення підмножини обходів $\{(l,k)\}, \{k,l\} \in R$, які містять дугу (l,k), розглядається скорочена матриця, у якій $d_{kl} = \infty$ і виключені рядок l і стовпець k. Після її приведення за формулою (8) обчислюється нижня границя $\varphi(l,k)$ вартості дуг усіх обходів підмножини $\{(l,k)\}$, яка породжує у дереві перебору поточну активну вершину $\{(l,k)\}$. Якщо $C^* > \varphi(l,k)$, то вершина $\{(l,k)\}$ з приведеною матрицею *D* і границею $\varphi(l,k)$ приєднується до вершини розгалуження, інакше вона далі не розглядається. Перехід до п. 9.

6. Для визначення підмножини обходів $\{(k,l)\}, \{k,l\} \in R$, які містять дугу (k,l), розглядається скорочена матриця, в якій $d_{lk} = \infty$ і виключені рядок k і стовпець l. Після її приведення за формулою (7) обчислюється нижня границя $\varphi(k,l)$ вартості усіх обходів підмножини $\{(k,l)\}$, яка викликає у дереві перебору поточну активну вершину $\{(k,l)\}$. Якщо $C^* > \varphi(k,l)$, вершина $\{(k,l)\}$ з приведеною матрицею *D* і границею $\varphi(k,l)$ приєднується до вершини розгалуження, в іншому випадку вершина виключається з подальшого розгляду; перехід до п. 9

7. При визначенні підмножини обходів $\{(\overline{k,l})\}, \{k,l\} \notin R$, які не містять дуги (k,l), матриця у вершині розгалуження зводиться до матриці *D* після заміни $d_{kl} \neq \infty$ на $d_{kl} = \infty$. Якщо $C^* > \varphi(\overline{k,l})$, то у дереві перебору вершина $\{(\overline{k,l})\}$ додається до вершини розгалуження разом з наведеною матрицею *D* і нижньою границею $\varphi(\overline{k,l})$ вартості обходів $\{(\overline{k,l})\}$, в іншому випадку вершина більше не розглядається. Величина $\varphi(\overline{k,l})$ рівна нижній границі вершини розгалуження, збільшеній на оцінку $\Gamma(k,l)$.

8. Для визначення підмножини обходів $\{(k,l)\notin R'\}$, які містять дугу (k,l), у матриці при вершині розгалуження виключається рядок k і стовпець l; виключаються рядки s, k і стовпці k, l, якщо $\{s,k\}\in R$; виключаються рядки k, l і стовпці p, l, якщо $\{l,p\}\in R$; виключаються рядки s, k, l і стовпці k, l, p, якщо $\{s,k\},\{l,p\}\in R$. Шляхом наведення отриманої матриці шукається матриця D. Після обчислення нижньої границі $\varphi((k,l)\notin R')$ вартостей обходів $\{(k,l)\notin R'\}$, яка визначається за формулою (5), вершина $\{(k,l)\notin R'\}$ з матрицею D і оцінкою $\varphi((k,l)\notin R')$ приєднується до вершини розгалуження, якщо виконується умова $C^* > \varphi((k,l)\notin R')$, інакше вершину більше не розглядаємо.

9. Якщо розмірність матриці D рівна 1, то отримано допустимий розв'язок z(R) ГЗСЛ.

Виключаємо з подальшого розгляду вершини, оцінки яких більші або рівні C^*. Якщо після виключення не залишилося жодної вершини, то перехід до п. 10. Інакше знаходимо вершину дерева з найменшою оцінкою. Якщо таких вершин кілька, то вибираємо ту, якій відповідає матриця меншої розмірності.

10. Якщо в процесі розв'язання не було знайдено жодного припустимого розв'язку, то ГЗСЛ є нерозв'язною. Інакше $z^*(R)$ – шуканий гамільтонів контур, а C^* – його вага.

Приклад. Для матриці вартостей графа $H=(V,U)$

	1	2	3	4	5	6
1	∞	10	∞	5	7	18
2	10	∞	23	15	∞	8
3	∞	23	∞	25	24	∞
4	5	15	25	∞	∞	23
5	7	∞	24	∞	∞	11
6	18	8	∞	23	11	∞

і підмножини його ребер $R=\{\{3,4\},\{1,5\},\{2,6\}\}$ потрібно знайти розв'язок ГЗСЛ або коректно встановити, що задача не має розв'язку.

1. Після віднімання з кожного рядка вихідної матриці вектора $\alpha=(5,8,23,5,7,8)$ і віднімання з кожного стовпця отриманої матриці вектора $\beta=(0,0,15,0,1,0)$ знайдемо наведену матрицю

	1	2	3	4	5	6
1	∞	5	∞	0	1	13
2	2	∞	0	7	∞	0
3	∞	0	∞	2	0	∞
4	0	10	5	∞	∞	18
5	0	∞	2	∞	∞	4
6	10	0	∞	15	2	∞

і визначимо нижню границю вартості усіх розв'язків ГЗСЛ:

$$\varphi(R)=\min\{d_{34},d_{43}\}+\min\{d_{15},d_{51}\}+\{d_{26},d_{62}\}+\sum_{i=1}^{6}\alpha_i+\sum_{j=1}^{6}\beta_j=$$

$$=\min\{2,5\}+\min\{1,0\}+\min\{0,0\}+56+16=74$$

Оскільки $\Delta_{34}=\min\{d_{34},d_{43}\}=d_{34}=2>0$, то поклавши $d_{34}=0$, $d_{43}=3$, отримаємо повністю приведену матрицю

	1	2	3	4	5	6
1	∞	5	∞	0	1	13
2	2	∞	0	7	∞	0
3	∞	0	∞	0	0	∞
4	0	10	3	∞	∞	18
5	0	∞	2	∞	∞	4
6	10	0	∞	15	2	∞

2. Обчислимо оцінки для усіх нульових елементів повністю приведеної матриці:
$\gamma(1,4)=1,\gamma(2,3)=2,\gamma(2,6)=4,\gamma(3,2)=0,\gamma(3,4)=0,\gamma(3,5)=1,\gamma(4,1)=3,\gamma(5,1)=2,\gamma(6,2)=2$. Дуга

$(2,6)$ мультиграфа H' ініціює розгалуження.

3. $\{2,6\} \in R$.

4. $d_{26} \neq \infty$. Множина усіх розв'язків задачі розбивається на підмножину обходів $\{(6,2)\}$, які містять дугу $(6,2)$ і підмножину обходів $\{(2,6)\}$, які містять дугу $(2,6)$.

5. Знаходимо матрицю, яка визначає підмножину обходів $\{(6,2)\}$. Для цього виключаємо дугу $(2,6)$, поклавши $d_{26} = \infty$, виключаємо рядок 6 і стовпець 2 і приводимо отриману скорочену матрицю. Приведена матриця має вигляд

	1	3	4	5	6
1	∞	∞	0	1	9
2	2	0	7	∞	∞
3	∞	∞	0	0	∞
4	0	3	∞	∞	14
5	0	2	∞	∞	0

і дає оцінку $\varphi(6,2) = \varphi(R) + d_{62} + \sum_{i\neq 6} \alpha_i' + \sum_{j\neq 2} \beta_j' = 74 + 0 + 4 = 78$.

6. Матриця, яка визначає підмножину обходів $\{(2,6)\}$, знаходиться шляхом присвоєння дузі $(6,2)$ ваги $d_{62} = \infty$, виключенням рядка 2, стовпця 6 і приведенням отриманої матриці:

	1	2	3	4	5
1	∞	5	∞	0	1
3	∞	0	∞	0	0
4	0	10	1	∞	∞
5	0	∞	0	∞	∞
6	8	∞	∞	13	0

Звідси випливає оцінка $\varphi(2,6) = \varphi(R) + d_{26} + \sum_{i\neq 2} \alpha_i' + \sum_{j\neq 6} \beta_j' = 74 + 0 + 2 + 2 = 78$.

9. Розмірність приведеної матриці більша за 1. Будь-яка з вершин $\{(2,6)\},\{(6,2)\}$ дерева розгалуження може бути обрана у якості активної. Виберемо вершину $\{(2,6)\}$.

2. Обчислимо оцінки для усіх нульових елементів матриці, яка визначає підмножину обходів $\{(2,6)\}$: $\gamma(1,4)=1, \gamma(3,2)=5, \gamma(3,4)=0, \gamma(3,5)=0, \gamma(4,1)=1, \gamma(5,1)=0, \gamma(5,3)=1, \gamma(6,5)=8$. Дуга $(6,5)$ ініціює розгалуження.

3. $\{6,5\} \notin R$; множина обходів $\{(2,6)\}$ розбивається на підмножину обходів $\{(6,5) \notin R'\}$, які включають дугу $(6,5)$, і підмножину обходів $\{(\overline{6,5})\}$, які не містять цю дугу.

7. У матриці, якій відповідає границя $\varphi(2,6)$, покладаємо $d_{65} = \infty$ і приводимо отриману матрицю:

	1	2	3	4	5
1	∞	5	∞	0	1
3	∞	0	∞	0	0
4	0	10	1	∞	∞
5	0	∞	0	∞	∞
6	0	∞	∞	5	∞

і оцінка $\varphi(\overline{6,5}) = \varphi(2,6) + \Gamma(6,5) = 78 + 8 = 86$, яка обмежує знизу вартості усіх обходів $\{(\overline{6,5})\}$, які включають дугу $(2,6)$ і не містять дуги $(6,5)$.

8. У матриці, яка відповідає нижній границі $\varphi(2,6)$, виключаємо рядок 6 і стовпець 5. Оскільки ребра $\{6,5\} \notin R$ і $\{5,1\} \in R$ суміжні, то виключаємо рядок 5 і стовпець 1 і забороняємо дугу $(1,2)$, покладаючи $d_{12} = \infty$ задля уникнення виникнення підциклів. У результаті наведення отриманої матриці прихо-

димо до таблиці

	2	3	4
1	$\boxed{\infty}$	∞	0
3	0	∞	0
4	9	0	∞

і оцінки $\varphi\left(\left(\overline{6,5}\right)\notin R'\right)=\varphi(2,6)+d_{51}+\sum\alpha_i'+\sum\beta_j'=78+0+1=79$, яка обмежує вартості усіх обходів $\{(6,5)\notin R'\}$. Розмірність таблиці більша за 1, тому вибираємо вершину розгалуження з найменшою нижньою границею $\varphi(6,2)$.

2. Знаходимо у відповідній матриці оцінки для усіх її нульових елементів:
$\gamma(1,4)=1,\gamma(2,3)=4,\gamma(3,4)=0,\gamma(3,5)=1,\gamma(4,1)=5,\gamma(5,1)=0,\gamma(5,6)=9$. Подальше розгалуження виконується за допомогою дуги $(5,6)$.

3. Так як $\{5,6\}\notin R$, множина обходів $\{(6,2)\}$ представлена розбиттям на підмножину $\{(5,6)\notin R'\}$ і підмножину $\left\{\left(\overline{5,6}\right)\right\}$.

7. Вершині $\{(5,6)\}$ відповідає матриця

	1	3	4	5	6
1	∞	∞	0	1	0
2	2	0	7	∞	∞
3	∞	∞	0	0	∞
4	0	3	∞	∞	14
5	0	2	∞	∞	$\boxed{\infty}$

і оцінка $\varphi\left(\overline{5,6}\right)=\varphi(6,2)+\Gamma(5,6)=78+9=87$.

8. У матриці, яка визначає множину обходів $\{(5,6)\notin R'\}$ покладаємо $d_{21}=\infty$ для усунення підциклів:

	1	3	4
2	$\boxed{\infty}$	0	7
3	∞	∞	0
4	0	3	∞

Оцінка, яка їй відповідає: $\varphi((5,6)\notin R')=\varphi(6,2)+d_{15}=78+1=79$.

Для розгалуження вибираємо вершину $\{(6,5)\notin R'\}$ з найменшою нижньою границею.

2. Знаходимо оцінки для усіх нульових елементів матриці, які відповідають цій вершині:
$\gamma(1,4)=0,\gamma(3,2)=9,\gamma(3,4)=0,\gamma(4,3)=9$. Розгалуження продовжує дуга $(3,2)\notin R'$.

7. Матриця

	2	3	4
1	∞	∞	0
3	$\boxed{\infty}$	∞	0
4	0	0	∞

визначає множину обходів $\left\{\left(\overline{3,2}\right)\right\}$ з нижньою границею $\varphi\left(\overline{3,2}\right)=\varphi(6,5)+\Gamma(3,2)=79+9=88$.

8. У матриці, яка відповідає вершині $\left\{\left(\overline{6,5}\right)\notin R'\right\}$, покладаємо $d_{32}=\infty$, виключаємо рядки 3, 4 і стовпці 2, 3. У результаті отримаємо матрицю з єдиного елемента (1, 4) і, відповідно, обхід $(2,6),(6,5),(5,1),(1,4),(4,3),(3,2)$ вартістю $\varphi((3,2)\notin R')=\varphi\left(\left(\overline{6,5}\right)\notin R'\right)+d_{43}=79+0=79$.

Висновки. Запропонована процедура вершинно-реберного перетворення може бути використана перед розв'язанням задачі [2]. У результаті виконання перетворення можливі такі випадки: а) знайдено оптимальний розв’язок гамільтонової задачі про сільського листоношу; б) визначено, що задача не має розв’язку; в) отримано задачу меншої або такої ж розмірності, потрібно шукати розв’язок задачі.

Описана у статті модифікація методу гілок та меж може бути безпосередньо застосована після процедури вершинно-реберного перетворення для пошуку точного розв’язку або встановлення факту нерозв’язності задачі.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982.
2. *Garashchenko I., Panishev A.* Method of Finding Hamilton Routes in Transport Network. Artificial Intelligence and Decision Making. – 2008 – № 7. – ITHEA: Sofia. – P. 43–48.
3. Теория расписаний и вычислительные машины: Под. ред. Э.Г. Коффмана. – М.: Наука, 1984.
4. *Гаращенко И.В., Морозов А.В., Панишев А.В.* Метод решения гамильтоновой задачи коммивояжера // Искусственный интеллект. – 2008. – Вып. 3. – С. 630–637.
5. *Яблонский А.А.* Минимизация кольцевых маршрутов доставки продукции потребителям // Экономика и математические методы. – 2006. – Т. 43. – № 3. – С. 124–131.

МОРОЗОВ Андрій Васильович – аспірант кафедри інформатики та комп’ютерного моделювання Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
- комп’ютерно-інформаційні технології;
- комбінаторна оптимізація.

Подано 10.09.2009

Морозов А.В. Про одне узагальнення задачі комівояжера
Морозов А.В. Об одном обобщении задачи коммивояжера
Morozov A.V. About One Generalization Of The Travelling Salesman Problem

УДК 519. 161
Об одном обобщении задачи коммивояжера / А.В. Морозов
Предметом обсуждения в статье является гамильтонова задача о сельском почтальоне, являющаяся обобщением гамильтоновой задачи коммивояжера. Предложенная модификация классического метода (метода Литтла) позволяет найти точное решение гамильтоновой задачи о сельском почтальоне или корректно установить его отсутствие.

УДК 519.161
About One Generalization Of The Travelling Salesman Problem / A.V. Morozov
In this paper the Hamiltonian Rural Postman Problem which is generalization of the Hamiltonian Travelling Salesman Problem is described. The offered modification of a classical branch-and-bound method (Little's method) allows to find exact solution of the Hamilton Rural Postman Problem or to detect that the task is unsolvable.