УДК 681.3

А.Ю. Левченко, аспір.
А.В. Панішев, д.т.н., проф.
Житомирський державний технологічний університет

ТОЧНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАГАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА

Представлено точний алгоритм розв'язку загальної задачі комівояжера (ЗЗК). Показано зв'язок між ЗЗК та гамільтоновою задачею комівояжера (ГЗК). Запропоновано модифікацію класичного методу Літтла, яка дозволяє використати цей зв'язок.

Вступ. У статті розглядається задача знаходження замкненого маршруту мінімальної вартості, який проходить по всіх пунктах транспортної мережі.

Транспортна мережа представлена зв'язним зваженим графом $H = (U,V)$, де V – множина вершин, U – множина ребер. Пункту i мережі відповідає вершина $i \in V$ графа H, $|V| = n$, а відрізку шосейного полотна, який зв'язує дві сусідніх пункти i та j, відповідає ребро $\{i, j\} \in U$. Кожному ребру $\{i, j\}$ приписана вага $d_{ij} \in R_0^+$, яка дорівнює вартості проїзду або відстані між пунктами i та j; R_0^+ – множина дійсних невід'ємних чисел. Припускається, що $d_{ij} = d_{ji}$.

Потрібно побудувати замкнений маршрут, який проходить по всіх вершинах графа H і який має мінімальну суму ваг ребер.

Сформульована задача отримала назву загальної задачі комівояжера (ЗЗК) [1].

Маршрутом у графі H називається послідовність вершин і ребер, які перемежуються, а ланцюгом – маршрут, всі ребра якого відрізняються. Простий ланцюг – це маршрут, що складається з різних вершин. Замкнений маршрут називається циклом, а цикл, в якому всі вершини різні, – простим. Простий цикл, який проходить по всіх вершинах точно один раз, називається гамільтоновим циклом, або обходом. ЗЗК, де потрібно знайти обхід із мінімальною сумою ваг ребер, відома як гамільтонова задача комівояжера (ГЗК) [1, 2]. Не усякий граф містить обхід, тобто не кожен граф є гамільтоновим. Виходячи з цього, ГЗК на відміну від ЗЗК не завжди має розв'язок.

Обґрунтування та опис алгоритму. Відомо, що ГЗК NP-трудна [3]. Цей же статус має її окремий випадок, який складається у визначені гамільтоновості графа. Тому знайти розв'язок ГЗК, або встановити, чи є граф негамільтоновим, можливо тільки методами, які характеризуються експоненціальною трудомісткістю обчислень. Так як множина циклів, які проходять по всіх вершинах зв'язного графа, не є пустим, то, очевидно, ЗЗК піддається наближеному розв'язанню за поліноміальний час. Нижче викладено точний алгоритм розв'язку ЗЗК, побудований на її зведенні до задачі знаходження гамільтонового циклу мінімальної вартості у повному графі $H_\alpha = (V, E)$ (ЗК) з вагами ребер, які дорівнюють найкоротшим відстаням між вершинами графа $H = (V,U)$.

Кожному ребру $\{i, j\} \in U$ графа $H = (U,V)$ поставлена у відповідь множина A_{ij} простих ланцюгів, у яких вершини i та j являються кінцевими. Множина A_{ij} містить єдиний ланцюг, який складається з ребра $\{i, j\}$, якщо у графі H немає інших простих ланцюгів, що з'єднують вершини i та j. Оберемо у A_{ij} ланцюг α_{ij}, ребра якого у сукупності мають найменшу вагу $D(\alpha_{ij})$. Назвемо його найкоротшим ланцюгом між вершинами i та j. Залежно від значень α_{ij} отримаємо випадок *а*), коли для усіх ребер $\{i, j\} \in U$ виконується нерівність

$$d_{ij} \le D(\alpha_{ij}), \tag{1}$$

та випадок *б*), коли вона порушується хоча б для одного ребра. Нерівність (1) характеризує вагові співвідношення ребер в графі H подібно до нерівності трикутника

$$d_{ik} \le d_{ij} + d_{jk}, \tag{2}$$

яка повинна виконуватись для всіх трійок вершин $i, j, k \in V$, $i \ne j$, $j \ne k$, повного зваженого графа $H_n = (V, E)$ в метричній ЗК [1].

Знайдемо будь-яким відомим методом найкоротші ланцюги α_{ij} між усіма вершинами графа H і визначимо їх ваги $D(\alpha_{ij})$, $i, j = \overline{1,n}$ [4].

Матриця $\left[D\left(\alpha_{ij}\right)\right]_n$ задовольняє нерівності (2) та разом із матрицею $\left[\alpha_{ij}\right]_n$ завдає повний граф $H_\alpha = \left(V, E\right)$, де кожне ребро $\left\{i, j\right\}$ відповідає ланцюгу α_{ij} в H вагою $D\left(\alpha_{ij}\right)$ (рис. 1).

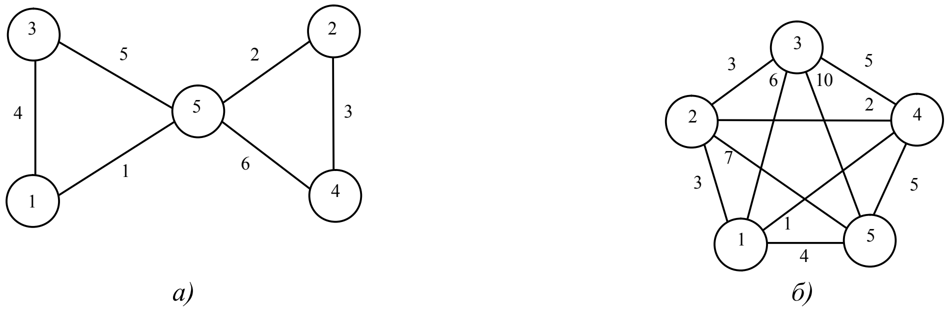

Рис. 1: а) граф H ; б) повний граф H_α

Нехай граф $H = \left(V, U\right)$ гамільтонів, τ , Т – оптимальні розв'язки відповідно ГЗК та ЗЗК, які побудовані в H , $D\left(\tau\right)$ та $C\left(\mathrm{T}\right)$ – вартості побудованих розв'язків. Знайдемо обхід σ мінімальної вартості у повному графі H_α .

Твердження 1. Якщо для усіх ребер $\left\{i, j\right\} \in U$ гамільтонового графа $H = \left(V, U\right)$ виконується нерівність (1), то $\mathrm{T} = \tau$, $C\left(\mathrm{T}\right) = D\left(\tau\right)$.

Доведення. Розв'язок ГЗК τ містить n ребер множини U . У випадку *а*) ребро $\left\{i, j\right\}$ повного графа H_α має вагу $D\left(\alpha_{ij}\right) = d_{ij}$, якщо $\left\{i, j\right\} \in U$, та $D\left(\alpha_{ij}\right) \ge d_{ij}$ інакше. Звідси випливає, що в H_α точний розв'язок ЗК σ співпадає із τ , а його вартість не більша вартості довільного маршруту, який містить n та більше ребер, включаючи Т .

Твердження 2. Якщо хоча б для одного ребра $\left\{i, j\right\}$ гамільтонового графа $H = \left(V, U\right)$ нерівність (1) не виконується, то $C\left(\mathrm{T}\right) \le D\left(\sigma\right)$.

Доведення. У випадку *б*) у повному графі H_α знайдеться щонайменше одне ребро $\left\{i, j\right\}$, яке в H має вагу $d_{ij} > D\left(\alpha_{ij}\right)$. Якщо гамільтонів цикл σ графа H_α проходить по ребру $\left\{i, j\right\}$, то його вартість більша вартості відповідного замкнутого маршруту в H , який містить замість ребра $\left\{i, j\right\} \in U$ ланцюг α_{ij} . Якщо цикл σ не включає ребер, які порушують нерівність (1), то він співпадає із розв'язком ГЗК.

Припустимо, що граф $H = \left(V, U\right)$ не гамільтонів. Тоді у будь-якому випадку *а*) або *б*) вартість оптимального розв'язку ЗК σ для повного графа $H_\alpha = \left(V, E\right)$ дорівнює вартості розв'язку ЗЗК Т для графа H . Тому маршрут Т можна знайти у результаті побудови в графі H_α гамільтонового циклу σ та заміни в ньому кожного ребра $\left\{i, j\right\} \in E$ на ланцюг α_{ij} з ребер множини U .

Наведені міркування дозволяють описати алгоритм точного розв'язку ЗЗК.

S0. $H = \left(V, U\right)$ – зв'язний зважений граф із множиною вершин V , $\left|V\right| = n$ та множиною ребер U , $\left[d_{ij}\right]_n$ – матриця ваг ребер графа H , де $d_{ij} \in R_0^+$, якщо $\left\{i, j\right\} \in U$, та $d_{ij} = \infty$ інакше, $i, j = \overline{1, n}$, R_0^+ – множина дійсних невід'ємних чисел.

S1. Алгоритмом Флойда побудувати матрицю $\left[\alpha_{ij}\right]_n$ найкоротших ланцюгів між усіма парами вершин графа H і матрицю $\left[D\left(\alpha_{ij}\right)\right]_n$, в якої елемент $\left(i, j\right)$ дорівнює вазі $D\left(\alpha_{ij}\right)$ ланцюга α_{ij} ; матриці $\left[\alpha_{ij}\right]_n$ та $\left[D\left(\alpha_{ij}\right)\right]_n$ визначають повний зважений граф $H_\alpha = \left(V, E\right)$, де кожне ребро $\left\{i, j\right\}$ замінює ланцюг α_{ij} в графі H .

S2. В графі H_α знайти обхід мінімальної вартості σ будь-яким відомим методом розв'язання метричної ЗК.

S3. Побудувати оптимальний розв'язок ЗЗК Т в результаті заміни кожного ребра $\{i, j\}$ гамільтонового циклу σ на ланцюг α_{ij} графа H.

У загальному випадку зв'язний граф H містить декілька замкнених маршрутів мінімальної вартості, які містять різну кількість ребер. Представлений алгоритм будує будь-який з них. Будемо вимагати, щоб число ребер у розв'язку ЗЗК Т було найменшим.

Для виконання цієї вимоги достатньо застосувати на кроці S2 класичний метод розв'язку ЗК (метод Літтла) із незначним доповненням до процедури гілок та меж [4]. Доповнення пов'язано із вибором ребра $\{k,l\}$, що найбільше підходить, для включення до обходу мінімальної вартості графа H_α. Метод Літтла визначає ребро $\{k,l\}$ після наведення вихідної матриці вартостей $\left[D\left(\alpha_{ij}\right)\right]_n$. Наведена матриця містить не менше n нульових елементів. Нехай $D\left(\alpha_{ij}\right)$ – значення елемента (i,j) наведеної матриці, $i,j=\overline{1,n}$. Кожен її елемент відповідає дузі в орієнтованому мультиграфі G_a, де будь-які дві вершини i та j з'єднані парою дуг (i,j) та (j,i).

Розв'язок ЗК методом Літтла знаходиться у результаті побудови бінарного дерева перебору, корінь якого визначає множину усіх обходів мультиграфу G_α. При знаходженні в G_α дуги, яка ініціює розгалуження, кожен елемент (p,q) наведеної матриці, такий, що $D\left(\alpha_{pq}\right)=0$, оцінюється величиною

$$\gamma(p,q)=\min_{i\neq q} D\left(\alpha_{pi}\right)+\min_{j\neq p} D\left(\alpha_{jq}\right).$$

Шуканій дузі (k,l) відповідає у наведеній матриці елемент (k,l) з оцінкою

$$\Gamma(k,l)=\max\left\{\gamma(p,q)\,|\,D\left(\alpha_{pq}\right)\right\}=0. \qquad (3)$$

Доповнення у методі Літтла потрібне у випадку, коли не менше як при двох дугах отримують оцінку, яка дорівнює (3). Тоді у якості дуги, що ініціює розгалуження, обирається та, якій відповідає у матриці $\left[\alpha_{ij}\right]_n$ ланцюг з найменшою кількістю ребер. Метод Літтла гарантує побудову оптимального розв'язку ЗК, якщо у якості дуги, яка ініціює розгалуження, обирається будь-яка з двох, або більше дуг із оцінкою (3) та найменшим числом ребер у відповідному їм ланцюгу.

Нехай у зв'язному графі $H=(V,U)$ Т – точний розв'язок ЗЗК с найменшим числом ребер $|\mathrm{T}|$. Тоді, якщо $|T|=n$, то зі стверджень 1 і 2 випливає, що граф H – гамільтонів. Якщо $|\mathrm{T}|>n$, то граф H або не гамільтонів, або такий гамільтонів граф, у якому, принаймні, для одного ребра нерівність (1) не виконується. Таким чином, якщо $|\mathrm{T}|>n$ і всі ребра графа H задовольняють умову (1), то H не містить гамільтонів цикл. Тобто алгоритм розв'язання ЗЗК Т с найменшим числом ребер є алгоритмом пошуку розв'язку ГЗК для графа H у випадку *а*). Для графа H у випадку *б*) пошук розв'язку ГЗК виконується алгоритмом, запропонованим у [5].

Приклад. Знайдемо точний розв'язок ЗЗК для графа H, який зображений на рис. 1, *а*.

Після виконання кроку S1 отримаємо матриці:

$\left[D\left(\alpha_{ij}\right)\right]_5 =$

	1	2	3	4	5
1	∞	3	4	6	1
2	3	∞	7	3	2
3	4	7	∞	10	5
4	6	3	10	∞	5
5	1	2	5	5	∞

, $\left[\alpha_{ij}\right]_5 =$

	1	2	3	4	5
1	∞	(1, 5, 2)	(1, 3)	(1, 5, 2, 4)	(1, 5)
2	(2, 5, 1)	∞	(2, 5, 3)	(2, 4)	(2, 5)
3	(3, 1)	(3, 5, 2)	∞	(3, 5, 2, 4)	(3, 5)
4	(4, 2, 5, 1)	(4, 2)	(4, 2, 5, 3)	∞	(4, 2, 5)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 2, 4)	∞

На кроці S2 побудуємо обхід мінімальної вартості для повного графа H_α, який представлений на рис. 1, *б*. Побудову виконаємо методом Літтла, що забезпечує мінімальне число ребер у розв'язку ЗЗК Т. У результаті отримаємо обхід (1, 4, 2, 5, 3, 1) вартістю 20. Заміна дуги (1, 4) побудованого обходу на ланцюг (1, 5, 2, 4) дає розв'язок ЗЗК Т = (1, 5, 2, 4, 2, 5, 3 1) тій же вартості.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М.: Мир, 1981. – 323 с.
2. *Бондаренко М.Ф., Белоус Н.В., Руткас А.Г.* Компьютерная дискретная математика. – Харьков: «Компания СМИТ», 2004. – 476 с.

3. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
4. *Сигал И.Х., Иванова А.П.* Введение в прикладное дискретное программирование. – М.: Физматлит, 2002. – 237 с.
5. *Irina Garashenko, Anatoliy Panishev.* Method of Finding Hamilton Routes in Transport Network // Artificial Intelligence and Decision Making. – ITHEA, Sofia, 2008. – Number 7. – P. 43–48.

ЛЕВЧЕНКО Антон Юрійович – аспірант Житомирського державного технологічного університету.
Наукові інтереси:
– комп’ютерно-інформаційні технології;
– комбінаторна оптимізація.

ПАНІШЕВ Анатолій Васильович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики і комп’ютерного моделювання Житомирського державного технологічного університету.
Наукові інтереси:
– комбінаторна оптимізація.

Подано 12.10.2009

Левченко А.Ю., Панішев А.В. Точний алгоритм розв'язку загальної задачі комівояжера
Левченко А.Ю., Панишев А.В. Точный алгоритм решения общей задачи коммивояжера
Levchenko A.Yu., Panishev A.V. The exact algorithm of solution of Common Commercial Traveler Task

УДК 681.3
Точный алгоритм решения общей задачи коммивояжера / А.Ю. Левченко, А.В. Панишев
Представлен точный алгоритм решения общей задачи коммивояжера (ОЗК). Показывается связь между ОЗК и гамильтоновой задачей коммивояжера. Предлагается модификация классического метода Литтла, которая позволяет использовать эту связь.

УДК 681.3
The exact algorithm of solution of Common Commercial Traveler Task / A.Yu. Levchenko, A.V. Panishev
Here the exact algorithm of solution of Common Commercial Traveler Task (CCTT) is presented. The link between CCTT and Hamiltonian Commercial Traveler Task is shown. Classical Little method's modification is offered which allows usage of this link.