

В.В. Перегудов, д.т.н., проф.
О.М. Новікова, к.т.н., доц.
О.П. Дмитренко, аспір.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ СТВОРЕННІ МОДЕЛЕЙ ПОВЕРХНІ ЗЕМЛІ

(Представлено д.т.н., проф. Жуковим С.О.)

Показано, що історія математичного моделювання веде свій початок із вивчення поверхні Землі, для цього використовувалися всі шляхи і методи математичного моделювання. Представлено ієрархічний ряд моделей поверхні Землі, виконано аналіз методів їх створення.

Проблема та її зв'язок з науковими та практичними завданнями. Вирішуючи завдання визначення поверхні Землі, такі вчені, як К.Ф. Гаусс, Л. Ейлер, І. Ньютон, розробили основні прийоми математичного моделювання, які успішно використовуються в наш час. Як указують О.А. Самарський, О.П. Михайлов [1, с. 34], основним засобом реалізації методів моделювання є комп'ютери. Але до їх появи геодезисти, обчислюючи координати точок на поверхні Землі, успішно застосовували її математичні моделі, а також моделі розподілу помилок геодезичних вимірювань. Кінцевим результатом геодезичних робіт є карта. Але карта – це ніщо інше, як модель поверхні Землі. Таким чином, геодезію можна вважати наукою, яка лежить в основі математичного моделювання і пов'язана з нею тісними і навіть спорідненими узами. У цій роботі виконано аналіз використання геодезистами методів побудови математичних моделей поверхні Землі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Незважаючи на те, що моделюванням людство займалося з незапам'ятних часів, математичне моделювання демонструє свій розвиток саме в наші дні. Зокрема В.С. Тікунов у [2, с. 16] показав розвиток у понятті “модель” і “моделювання” в свідомості людей. Б.П. Безручко і Д.А. Смірнов у [3, с. 23] розробили класифікацію моделей по трьох різних ознаках і показали місце математичних моделей серед інших. Класифікацію математичних моделей за шістьма ознаками представив Ю.Ю. Тарасевич в [4, с. 7]. Шляхи і методи математичного моделювання детально показали Б.П. Безручко, Д.А. Смірнов у [3, с. 32] і О.А. Самарський, О.П. Михайлов у [5, с. 11]. Проте застосування цих шляхів і методів у геодезії при створенні моделей поверхні Землі не аналізувалося.

Постановка завдання. Є декілька шляхів створення моделі, а саме:

1. Інтуїтивний шлях, побудований на припущеннях і осяянні.
2. Емпіричний (експериментальний) шлях. Моделі в цьому випадку виходять безпосередньо з експерименту або з використанням експериментальних даних. Такі моделі називаються емпіричними, або феноменологічними [3, с. 33]. Оскільки всі моделі геодезії отримані з обробки астрономічних, геодезичних і гравіметричних вимірювань, вони є емпіричними.
3. Теоретичний шлях. Даний шлях припускає використання різних теоретичних методів, а саме:
 - метод, побудований на застосуванні фундаментальних законів природи. Як зазначається в [1, с. 11], ці закони загальноновизнані й багато разів підтверджені досвідом;
 - метод аналогій. Якщо при спробі побудувати модель неможливо прямо вказати фундаментальні закони, яким вона підкоряється, то можна використовувати аналогію з вивченим явищем;
 - варіаційний метод. Згідно з цим методом зі всіх можливих варіантів моделей вибирається лише та, яка задовольняє певну умову. Зазвичай згідно з цією умовою деяка пов'язана з об'єктом величина досягає екстремального значення;
 - метод дедукції. Модель виходить як окремий випадок з більш загальної моделі. Такі моделі називаються асимптотичними. Як зазначається в [3, с. 33], накопичення знань призводить до того, що емпіричні моделі перетворюються на асимптотичні. Кількість асимптотичних моделей відображає зрілість науки.
 - метод індукції. Нова модель є природним узагальненням попередніх моделей. Згідно з [1, с. 21], лише в окремих випадках буває зручною і виправданою побудова математичних моделей навіть простих об'єктів відразу, з урахуванням всіх чинників, характерних для його поведінки. Тому природний підхід, що реалізує принцип «від простого – до складного», є таким, коли наступний крок робиться після достатньо докладного вивчення не дуже складної моделі. При цьому виникає ланцюжок (ієрархія) все більш повних моделей, кожна з яких узагальнює попередні, включаючи їх як окремий випадок. Такий ланцюжок називається ансамблем моделей [1, с. 33].

Застосування одного шляху і методу для створення моделі не виключає використання інших шляхів і методів. Більш того, одна модель може бути створена на основі експериментальних даних (емпіричний

шлях) з використанням декількох теоретичних методів (теоретичний шлях). Нижче це буде показано на практичному прикладі створення моделі поверхні Землі.

Викладення основного матеріалу дослідження. Розглянемо процес побудови математичних моделей поверхні Землі.

Модель № 1 – Сфера

У першому наближенні поверхня Землі – це поверхня сфери. Щоб побудувати модель Землі у вигляді сфери, слід скористатися законом всесвітнього тяжіння, сформульованим І.Ньютоном в 1687 р. [5, с. 239]. Радіус кулі визначався геометрично за допомогою градусних вимірювань [6, с. 160]. Починаючи з III століття до нашої ери і до 1670 г., старогрецькі вчені Ератосфен і Посидоній, арабські вчені Месопотамії, французькі вчені Ж.Ф. Фернель і А.Пікар [6, с. 161] за допомогою градусних вимірювань визначали радіус земної кулі. Таким чином, ці вчені вперше в історії геодезії створили ансамбль моделей поверхні Землі, скориставшись методом індукції. Цікаво зазначити, що, незважаючи на те, що кулястість Землі безпосередньо впливає з всесвітнього закону тяжіння, форма Землі в першій моделі визначалася, без урахування цього закону, тільки на основі геометричних побудов на поверхні Землі.

Модель № 2 – Еліпсоїд обертання

Пропонуючи модель еліпсоїда обертання, І. Ньютон міркував таким чином: оскільки Земля обертається навколо своєї осі, в кожній точці виникає відцентрова сила, що діє перпендикулярно до осі обертання і прагне розтягнути Землю за напрямом екватора. Таким чином, форма Землі – наслідок дії двох сил – сили тяжіння і відцентрової сили. Рівнодіюча цих двох сил має назву сили ваги. Сам І. Ньютон для отримання стиснення земного еліпсоїда скористався не тільки формулами сили ваги, але також припущенням, що Земля однорідна і знаходиться в гідростатичній рівновазі. Стиснення, отримане І. Ньютоном, дорівнює:

$$\alpha = \frac{1}{230} . \quad (1)$$

Отже для створення моделі Землі у вигляді стислого еліпсоїда обертання І. Ньютон використовував два класичні методи математичного моделювання: фундаментальні закони природи, які він сам же і сформулював, і аналогії. Пізніше французький учений А. Клеро розвинув ідеї І. Ньютона. Він припустив, що Земля рідка, але щільність її змінюється з глибиною. Використовуючи всесвітній закон тяжіння і закони гідростатики, він вивів два рівняння, що зв'язують значення сили ваги на поверхні еліпсоїда з параметрами еліпсоїда і з швидкістю обертання Землі. Ці рівняння [5, с. 405] мають назву “теорема Клеро”. Роботи І. Ньютона і А. Клеро не дали можливості отримати обидва параметри еліпсоїда обертання, проте вперше дозволили розглянути поверхню земного еліпсоїда як рівневу поверхню, тобто поверхню, на якій потенціал сили ваги дорівнює деякій постійній величині.

Починаючи з 1800 р., вчені-геодезисти, використовуючи різні чисельні дані й різноманітні теоретичні допущення, намагалися знайти параметри земного еліпсоїда. У [6, с. 164] представлені параметри найбільш відомих еліпсоїдів, побудовані вченими багатьох країн, що демонструє успішне застосування методу індукції і створення другого ансамблю моделей поверхні Землі.

Поступово почали формуватися вимоги, які повинен задовольняти земний еліпсоїд, а саме:

1. Вісь обертання земного еліпсоїда повинна співпадати з віссю обертання Землі (властивість № 1 початкового об'єкта).
2. Площина екватора земного еліпсоїда повинна співпадати з площиною екватора Землі (властивість № 2 початкового об'єкта).
3. Поверхня земного еліпсоїда повинна бути максимально близькою до поверхні Землі (варіаційний метод).

Спочатку ступінь близькості поверхні еліпсоїда до поверхні реальної Землі вимірювався відхиленням прямовисної лінії. Як відомо з фізичної геодезії, відхилення прямовисної лінії залежать від астрономічних і геодезичних координат точок земної поверхні [5, с. 300]. Астрономічні координати точки визначаються з астрономічних вимірювань. Геодезичні координати B, L обчислюються за допомогою формул сфероїдичної геодезії на поверхні еліпсоїда. Отже геодезичні координати залежать від параметрів еліпсоїда, а саме:

$$B = B(a, \alpha), \quad L = L(a, \alpha) . \quad (2)$$

У формулах (2): a – велика піввісь, α – стиснення еліпсоїда. Враховуючи формули (2), для відхилення прямовисних ліній уздовж меридіана ξ і першого вертикала η , можна записати:

$$\xi = \xi(a, \alpha), \quad \eta = \eta(a, \alpha) . \quad (3)$$

Якщо в декількох пунктах визначені відхилення прямовисних ліній, то для знаходження параметрів земного еліпсоїда використовують умову:

$$\sum (\xi^2 + \eta^2) = \min . \quad (4)$$

Ця умова є класичним прикладом використання варіаційного методу.

У 1900 р. для визначення параметрів еліпсоїда американський учений Д.Ф. Хейфорд поставив умову, щоб не реальні відхилення прямовисних ліній, а відхилення, вільні від впливу топографічних компенсуючих мас, задовольняли умову мінімуму, а саме:

$$\sum (\delta\xi^2 + \delta\eta^2) = \min, \tag{5}$$

де

$$\delta\xi = \xi - \xi_{uz}, \quad \delta\eta = \eta - \eta_{uz}. \tag{6}$$

У формулі (6) ξ_{uz}, η_{uz} – відхилення прямовисних ліній, викликані впливом топографо-ізостатичних мас, $\delta\xi, \delta\eta$ – відхилення прямовисних ліній, вільні від впливу топографо-ізостатичних мас.

Теорія, яку використав Д.Ф. Хейфорд, має назву теорії ізостазії. Завдяки їй в моделювання математичної поверхні Землі повернулися закони гідростатики.

Модель № 3 – Тривісний еліпсоїд

Починаючи з 1800 р., вчені визначали параметри земного еліпсоїда обертання, маючи градусні вимірювання на невелику територію на суші. Порівнюючи результати визначення параметрів земного еліпсоїда обертання, вчені прийшли до висновку, що їх розбіжності [6, с. 162] виходять далеко за межі точності вимірювань. Якби поверхня Землі співпадала з поверхнею еліпсоїда обертання, таких розбіжностей би не було, не залежно від того, яка частина території Землі використовувалася для обчислень. Учені зробили висновок, що еліпсоїд обертання, порівняно зі сферою, є кращою моделлю Землі, але він не є точно її фігурою. Тому наступна модель, яку “приміряли” до Землі, був тривісний еліпсоїд. Параметрами тривісного еліпсоїда є: a – велика піввісь екваторіального еліпса, i – стиснення екваторіального еліпса, α – стиснення меридіанного еліпса. Всі три параметри знаходяться аналогічно попередньому випадку з варіаційної умови (4). Проте в цьому випадку вважають, що функції залежать не від двох, а від трьох параметрів, тобто:

$$\xi = \xi(a, \alpha, i), \quad \eta = \eta(a, \alpha, i). \tag{7}$$

У 1915 р. німецький учений Ф. Гельмерт вперше визначив стиснення екваторіального радіуса i . Воно дорівнює:

$$i \approx \frac{1}{28000}.$$

У 1938 р. Ф.М. Красовський, обробляючи астрономо-геодезичні мережі, що охоплювали близько половини території СРСР, а також матеріали градусних вимірювань у Західній Європі і США, спочатку отримав параметри тривісного еліпсоїда, що задовольняє умову (4). Стиснення екваторіального радіуса цього еліпсоїда становить:

$$i = \frac{1}{30000}.$$

Потім був знайдений еліпсоїд обертання, поверхня якого найкращим чином підходила до знайденого тривісного еліпсоїда. Отже Ф.М. Красовський використовував модель тривісного еліпсоїда як проміжний етап в обчисленнях параметрів еліпсоїда обертання, тобто використовував метод дедукції. Як і модель еліпсоїда обертання, модель тривісного еліпсоїда також може бути представлена ансамблем, тобто знову можна прослідкувати використання вченими методу індукції. Для практичних цілей тривісний еліпсоїд не знайшов застосування.

Модель № 4 – Геоїд

Параметри Землі, визначені з градусних вимірювань, не враховують першопричину, через яку Земля придбала свою форму, а саме не використовують всесвітній закон тяжіння. Геоїд, який спочатку називали фізичною моделлю Землі, будується з урахуванням дії сили тяжіння на точки земної поверхні. У 1873 р. німецький фізик І.Б. Лістинг сформулював поняття геоїда як рівневої поверхні, найбільш відповідної поверхні Землі. Величина потенціалу сили ваги на поверхні геоїда дорівнює деякій постійній W_0 . Спочатку передбачалося, що описати фігуру геоїда математично неможливо. Проте пізніше, використовуючи сферичні гармоніки, вчені вивели формулу, що дозволяє отримати фігуру геоїда спочатку в деяких областях Землі, а потім і на всій її території. Рівняння геоїда, як і всякої рівневої поверхні потенціалу сили ваги, записується так [7, с. 51]:

$$\frac{GM}{\rho} \left[1 + \sum_{n=2}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho} \right)^n P_{nm}(\sin \Phi) (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \right] + \frac{\omega^2 \rho^2}{2} \cos^2 \Phi = W_0, \tag{8}$$

де a – велика піввісь земного еліпсоїда, ρ – відстань від центра геоїда до точки на його поверхні, Φ – геоцентрична широта цієї точки, $P_{nm}(\sin \Phi)$ – функції Лежандра, $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ – нормалізовані гармонічні коефіцієнти геопотенціалу. Це рівняння виводиться з умови, що потенціал сили тяжіння є гармонійною

функцією і задовольняє рівнянню Лапласа [8, с. 240]. На даний момент є декілька моделей геоїда, що відрізняються постійними $GM, a, \omega, W_0, C_{nm}, S_{nm}$. Найбільш поширеною є модель EGM96, яка є складовою частиною системи координат WGS 84. Перші 357 нормалізованих гармонічних коефіцієнтів $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ можна знайти в [7, с. 53]. Більшу кількість коефіцієнтів (130317) можна знайти в [9]. Модель геоїда EGM2008 містить 4800477 нормалізованих гармонічних коефіцієнтів геопотенціала¹ для $n \text{ max} = 2190$.

Нормалізовані гармонічні коефіцієнти знаходять за методом найменших квадратів і його видозміни – за методом коллокацій, тобто використовують варіаційний метод математичного моделювання. Таким чином, для знаходження математичної моделі геоїда використовуються три методи математичного моделювання – закони фізики, варіаційний метод і метод індукції, що дозволяє, як і в попередніх випадках, побудувати ансамбль моделей.

Модель № 5 – Квазігеоїд

Геоїд застосовується для визначення систем відліку висот на поверхні Землі як поверхня з нульовою висотою. Для побудови карти висот необхідно поверхню геоїда продовжити під материка. Зробити це непросто, потрібно знати розподіл щільності гірських порід. Тому М.С. Молоденський [6, с. 62] замість геоїда запропонував використовувати квазігеоїд. На поверхні океанів квазігеоїд співпадає з геоїдом, на суші квазігеоїд тим більше відрізняється від геоїда, чим більше нормальний потенціал сили ваги відрізняється від реального. Висота геоїда щодо поверхні земного еліпсоїда обчислюється за формулою:

$$\zeta_{\Gamma} = - \int_A^B \frac{dW}{g} . \quad (9)$$

Висота квазігеоїда щодо поверхні земного еліпсоїда обчислюється за формулою:

$$\zeta_{\kappa} = - \int_A^B \frac{dW}{\gamma} . \quad (10)$$

Отже невідому функцію, реальну силу ваги усередині поверхні Землі, М.С. Молоденський для визначення фігури квазігеоїда замінив відомою функцією, нормальною силою ваги, яка визначається теоретично за допомогою відомої формули [10, с. 21]. Отже квазігеоїд – це модель, отримана за допомогою методу аналогій. Перехід від складної поверхні геоїда до більш простої – квазігеоїда можна також розглядати як реалізацію методу дедукції, а квазігеоїд – асимптотичною моделлю геоїда.

Модель № 6 – Теллуroid

Згідно з [7, с. 65] теллуroid – поверхня, яка визначається в полі нормального потенціалу сили ваги так, щоб для кожної точки реальної земної поверхні з геодезичними координатами B і L і потенціалом реальної сили ваги W на поверхні теллуroidа була точка з тими ж самими геодезичними координатами і з тим же потенціалом, але вже нормальної сили ваги. У полі нормальної сили ваги теллуroid можна розглядати як образ реальної поверхні Землі. Щоб отримати цю поверхню в реальному полі сили ваги, слід від реальної поверхні по нормалі до земного еліпсоїда відкласти аномалії висоти. Як і для моделі квазігеоїда, теллуroid побудований за допомогою методу аналогій.

Ця модель порівняно нова серед моделей земної поверхні і поки не знайшла широкого застосування.

Модель № 7 – Рівневий еліпсоїд обертання

Спочатку зв'язок між геоїдом і загальним земним еліпсоїдом обмежився тільки тим, що умова максимальної близькості поверхні реальної Землі була замінена умовою максимальної близькості поверхні земного еліпсоїда до поверхні геоїда, або квазігеоїда. Математично цю умову можна записати так:

$$\sum \zeta^2 = \min . \quad (11)$$

Цікаво зазначити, що ця умова спочатку використовувалася тільки як другорядне доповнення до умов (4–5). Параметри еліпсоїда все ще знаходилися з умови (4) або (5), і лише орієнтування еліпсоїда визначалося з умови (11) [8, с. 102]. Пізніше умова (11) стала основоположною при визначенні параметрів земного еліпсоїда. Міжнародною Асоціацією Геодезії (IAG) еліпсоїд, що задовольняє умову (11), був названий ідеальним земним еліпсоїдом. Згідно з повідомленням Спеціальної комісії з фундаментальних констант ідеальний земний еліпсоїд має параметри [7, с. 65]:

$$a = 6378136 \text{ м}, \quad \alpha = 1/298,25765 .$$

¹ Чисельні дані моделі EGM2008 можна знайти за адресою: <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008>.

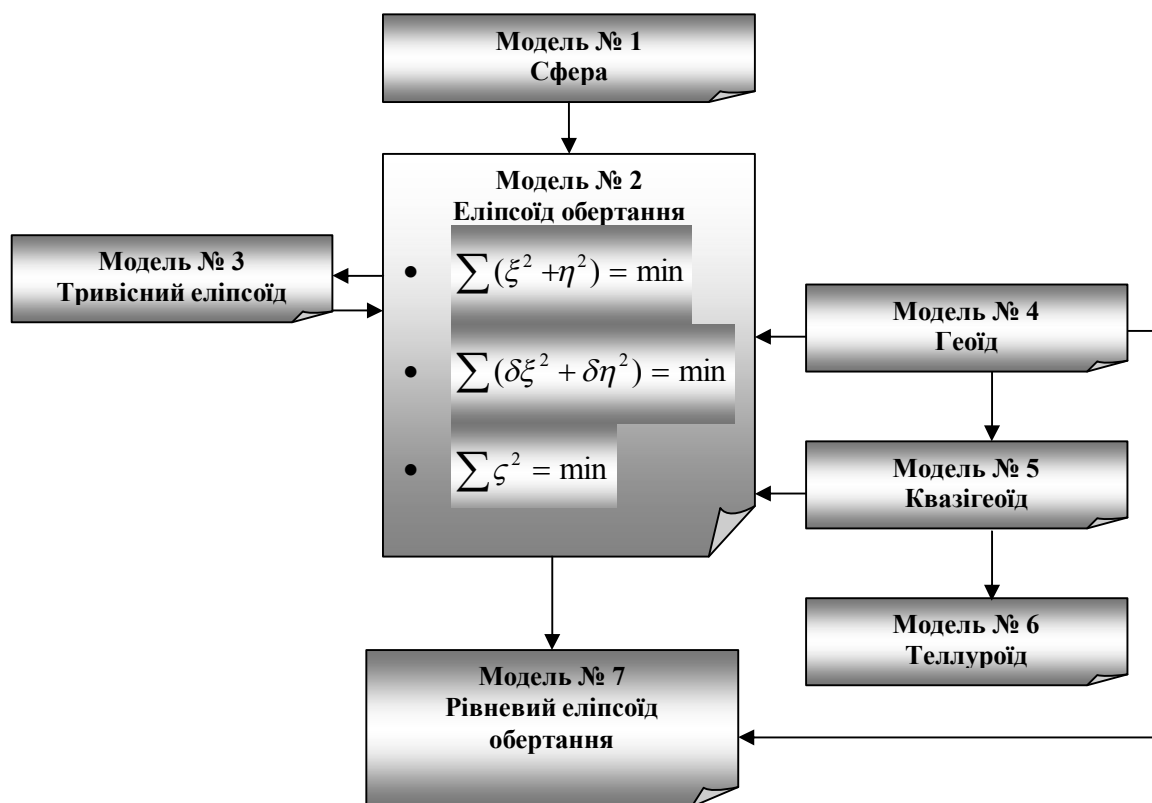


Рис. 1. Ієрархічний ряд моделей Землі

З часом на земний еліпсоїд стали переносити не тільки геометричні властивості Землі, але і фізичні. Поступово сформувалося поняття нормального земного еліпсоїда (рівневого), пов'язаного з нормальним полем Землі. Для рівневого еліпсоїда були сформульовані умови [6, с. 134]:

1. Центр рівневого еліпсоїда обертання повинен співпадати з центром мас Землі (властивість № 1 початкового об'єкта).
2. Головна вісь обертання рівневого еліпсоїда повинна співпадати з віссю обертання Землі (властивість № 2 початкового об'єкта).
3. Кутова швидкість обертання рівневого еліпсоїда повинна дорівнювати кутовій швидкості обертання Землі (властивість № 3 початкового об'єкта).
4. Гравітаційний параметр рівневого еліпсоїда повинен дорівнювати гравітаційному параметру Землі (властивість № 4 початкового об'єкта).
5. Зональний гармонічний коефіцієнт другого порядку для рівневого еліпсоїда і Землі повинні співпадати (властивість № 5 початкового об'єкта).
6. Потенціал сили ваги на поверхні рівневого еліпсоїда повинен дорівнювати потенціалу сили ваги на поверхні геоїда (властивість № 6 геоїда).

Перші дві вимоги, які задовольняють загальний земний еліпсоїд і рівневий еліпсоїд, співпадають. Оскільки рівневий еліпсоїд є рівневою поверхнею, він повинен задовольняти рівняння (8), яке в цьому випадку виглядає так:

$$\frac{GM}{\rho} \left[1 + \sum_{n=2}^{n \max} C_n \left(\frac{a}{\rho} \right)^n P_{n0}(\sin \Phi) \right] + \frac{\omega^2 \rho^2}{2} \cos^2 \Phi = W_0 = \text{const} . \tag{12}$$

У рівнянні (12), на відміну від рівняння (8), відсутні коефіцієнти, залежні від довготи, оскільки поверхня рівневого еліпсоїда повинна бути симетричною відносно осі обертання.

З урахуванням формул (6) і (12) умову № 5 можна записати так:

$$\bar{C}_{20} = C_2 . \tag{13}$$

Аналізуючи умови, яким повинен задовольняти рівневий еліпсоїд, можна зробити висновок, що останній має більше точок зіткнення з реальною Землею. Лише остання умова залежить від поверхні геоїда. Насправді всі 6 умов мають безпосередній зв'язок з поверхнею геоїда, оскільки при побудові геоїда він повинен задовольняти перші чотири умови, сформульовані для рівневого еліпсоїда, шоста ж умова для геоїда формулюється так:

Потенціал сили ваги, W_0 на поверхні геоїда повинен дорівнювати потенціалу сили ваги на рівневій поверхні, яка проходить через пункт, який є початком відліку висот [10, с. 18].

Отже рівневий еліпсоїд є асимптотичною моделлю геоїда, тобто моделлю, побудованою методом дедукції. Тому часто його називають ідеальним геоїдом.

Перший рівневий еліпсоїд був побудований у 1967 р. як частина системи координат 1967 р. Наступним рівневим еліпсоїдом став еліпсоїд, що входить в систему координат GRS80. У такі поширені системи координат, як WGS84 і ПЗ90, також входять рівневі еліпсоїди. Отже починаючи з 1967 р., учені-геодезисти успішно будують ансамбль рівневих еліпсоїдів. Всі моделі поверхні Землі, розглянуті вище, схематично представлені на рис. 1.

Оскільки кожна модель містить варіанти моделей, наведену схему можна розглядати як ієрархічний ряд (ансамбль) ансамблів моделей Землі.

Висновки. Отриманий ієрархічний ряд моделей ніколи не буде закінчений. Основні причини такі:

- постійно змінюються і удосконалюються методи вивчення фігури Землі, накопичується чисельний матеріал, стають точнішими прилади для вимірювань чисельних даних, уточнюються земні параметри. Таким чином, точність визначення моделей Землі з часом збільшується;
- параметри, що характеризують Землю, не є константами. Зменшується кутова швидкість обертання Землі, внаслідок цього зменшується стиснення Землі, постійно змінюється орієнтація осі обертання Землі тощо [6, с. 228]. Тому наступні моделі обов'язково враховуватимуть тимчасову мінливість Землі.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Наука. Физматлит, 1997. – 320 с.: http://www.imamod.ru/publications/mm_1.pdf
2. Тикунов В.С. Моделирование в картографии: Учеб. для студентов, обучающихся по направлению "География", спец. "Картография". – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997: <http://www.geodesy.org.ru/materialy/uchebniki/kartografiya/>.
3. Безручко Б.П., Смирнов Д.А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. – Саратов: Издательство ГосУНЦ "Колледж", 2005.
4. Тарасевич Ю.Ю. Избранные вопросы математического моделирования и численных методов: <http://mathmod.aspu.ru/images/File/ebooks/lectures.pdf>
5. Закатов П.С. Курс высшей геодезии. – М.: Недра, 1964. – 500 с.
6. Пеллинен Л.П. Высшая геодезия (Теоретическая геодезия). – М.: Недра, 1978. – 260 с.
7. Department of Defense World Geodetic System 1984. NIMA TR 8350.2, Third Edition, 3 January 2000. NIMA Stock No. DMATR8350.2WGS84. – 175 p.: <http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/tr8350.2/wgs84fin.pdf>.
8. Грушинский Н.П. Теория фигуры Земли. – М.: Наука, 1976. – 511 с.
9. Lemoine, F.G., Kenyon, S.C., Trimmer, R., Factor, J., Pavlis, N.K., Klosko, S.M., Chinn, D.S., Torrence, M.H., Pavlis, E.C., Rapp, R.H., and Olson, T.R.; «EGM96 The NASA GSFC and NIMA Joint Geopotential Model»; NASA Technical Memorandum.
10. Дзуліт П.Д. Гравіметрія. – Львів: ЛАГТ, 1998. – 196 с.

ПЕРЕГУДОВ Володимир Володимирович – доктор технічних наук, професор кафедри геодезії Криворізького технічного університету.

Наукові інтереси:

- математичне, цифрове моделювання складних поверхонь;
- гірництво;
- буропідривні роботи в кар'єрах.

НОВІКОВА Олена Миколаївна – кандидат технічних наук, доцент кафедри геодезії Криворізького технічного університету.

Наукові інтереси:

- вища геодезія;
- геоінформаційні системи;
- математичне моделювання;
- математична картографія.

ДМИТРЕНКО Олександр Петрович – аспірант кафедри геодезії Криворізького технічного університету.

Наукові інтереси:

- фізична геодезія;
- системи координат.

Подано 27.04.2009

Перегудов В.В., Новікова О.М., Дмитренко О.П. Застосування методів математичного моделювання при створенні моделей поверхні землі

Перегудов В.В., Новікова Е.Н., Дмитренко А.П. Применение методов математического моделирования при создании моделей поверхности Земли

Perehudov V.V., Novikova E.N., Dmitrenko A.P. Application of mathematical design methods at creation of Earth models

УДК 528.232:519.876.5

Применение методов математического моделирования при создании моделей поверхности Земли / В.В. Перегудов, Е.Н. Новикова, А.П. Дмитренко

Показано, что история математического моделирования берет свое начало с изучения поверхности Земли, для этого использовались все пути и методы математического моделирования. Представлен иерархический ряд моделей поверхности Земли, выполнен анализ методов их создания.

УДК 528.232:519.876.5

Application of mathematical design methods at creation of Earth models / V.V. Perehudov, E.N. Novikova, A.P. Dmitrenko

It is shown that history of mathematical design takes beginning from the study of Earth, all ways and methods of mathematical design were used for this purpose. The hierarchical row of models of Earth is presented, the analysis of methods of their creation is executed.