ІНФОРМАТИКА, ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНІКА ТА АВТОМАТИЗАЦІЯ

УДК 621.372.061

В.Л. Баранов, д.т.н., проф.
Р.М. Костюченко, к.т.н., викл.
К.В. Молодецька, аспір., викл.
Житомирський військовий інститут ім. С.П. Корольова
Національного авіаційного університету

МЕТОД МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИЧНИХ ПОЛІВ І ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ ПРЯМИХ І ЗВОРОТНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СПЕКТРІВ

Запропоновано метод моделювання фізичних полів і процесів, побудований на системі прямих і зворотних диференціальних спектрів. Використання системи диференціальних спектрів, що описують фізичні поля і процеси в області диференціальних перетворень, дозволяє зменшити похибку моделювання в області оригіналів. Наведено приклад моделювання.

Постановка проблеми. Моделювання фізичних процесів і полів пов’язане з розв’язанням рівнянь з частинними похідними з початковими і граничними умовами. Відомо, що чисельні методи розв’язання крайових задач потребують виконання значного обсягу обчислень на ЕОМ [1–3]. У випадку використання математичних моделей фізичних процесів і полів з метою управління об’єктами з розподіленими параметрами виникає необхідність моделювання в реальному і прискореному часі для контролю за динамікою зміни фізичного процесу. Для швидкопротікаючих фізичних процесів вимога моделювання в реальному часі може бути виконана шляхом зниження обсягу обчислень методами аналітичного і чисельно-аналітичного моделювання на ЕОМ. В даний час аналітичні й чисельно-аналітичні методи розв’язання нелінійних крайових задач недостатньо розвинені й вимагають подальших досліджень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій [1–9] показав, що аналітичні й чисельно-аналітичні методи розв’язання крайових задач ґрунтуються на інтегральних і диференціальних перетвореннях математичних моделей фізичних процесів і полів. Застосування різних методів інтегральних перетворень обмежується в основному дослідженням лінійних математичних моделей [9]. Моделювання нелінійних фізичних процесів може бути виконано в аналітичному або чисельно-аналітичному вигляді на основі використання одномірних диференціальних перетворень [4–8]. Недолік цих методів полягає в залежності складності аналітичного опису фізичного процесу в області зображень від похибки моделювання фізичного процесу в області оригіналів. Математична модель фізичного процесу в області диференціальних перетворень має вигляд диференціального спектру, від кількості дискрет якого безпосередньо залежить похибка моделювання фізичного процесу в області оригіналів [4–8]. Складність аналітичного опису дискрет диференціального спектра зростає із збільшенням номера дискрети. Тому моделювання фізичних процесів в аналітичному вигляді виконують з використанням декількох початкових дискрет диференціального спектра, а це обмежує точність моделювання нелінійних фізичних процесів в області оригіналів. У зв’язку з цим виникає проблема зниження похибки моделювання фізичних процесів і полів у випадку використання обмеженої кількості дискрет диференціального спектра. Пропонується підвищити точність моделювання фізичних процесів і полів шляхом використання системи прямих і зворотних диференціальних спектрів із обмеженою кількістю дискрет.

Мета статті полягає в розробці методу моделювання процесів і полів на основі системи прямих і зворотних диференціальних спектрів із обмеженою кількістю дискрет.

Розглянемо фізичні процеси, задані функцією $u(x,t)$ двох незалежних змінних в області:

$$0 \le |x| \le H_x,\ 0 \le t \le H_t, \text{ де } H_x,\ H_t \text{ – задані додатні сталі.} \tag{1}$$

Фізичні поля будемо описувати функцією $u(x_1, x_2)$ в області, що визначена обмеженнями:

$$0 \le |x_1| \le H_1,\ 0 \le |x_2| \le H_2, \text{ де } H_1,\ H_2 \text{ – задані додатні сталі.} \tag{2}$$

Обмежимося класом фізичних процесів, які описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними в одній із форм:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f_1\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = f_2\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \tag{4}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f_3\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \tag{5}$$

де f_1, f_2, f_3 – задані неперервні функції.

До вигляду (3)–(5) зводяться лінійні і квазілійні рівняння з частинними похідними. Рівняння (3), (4) описують хвильові процеси в середовищах різної фізичної природи. Прикладом рівняння (5) може бути рівняння теплопровідності.

Математичні моделі фізичних полів $u(x_1, x_2)$ розглянемо у вигляді:

$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} = \varphi_1\left(x_1,x_2,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} = \varphi_2\left(x_1,x_2,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right), \tag{7}$$

де φ_1, φ_2 – задані неперервні функції.

Рівняння Лапласа і Пуассона можуть бути представлені в одній із форм (6) або (7).

Математична модель фізичних процесів крім опису в одній із форм (3)–(7) містить початкові та граничні умови, які дозволяють виділити серед множини розв’язків рівнянь з частинними похідними єдиний розв'язок, що відповідає математичному опису фізичного процесу.

Початкові умови для рівнянь (4) і (5) задають у вигляді:

$$u(x,0) = U_0(x), \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = Q(x), \tag{9}$$

де $U_0(x)$, $Q(x)$ – задані функції.

Граничні умови для всіх рівнянь (3)–(7) при моделюванні фізичних процесів і полів здаються у вигляді:

$$u(x,t)\big|_{x\in\Gamma} = \alpha_1(t),\ u(x_1,x_2)\big|_{\bar{x}\in\Gamma} = \alpha_2(x_1,x_2) \text{ – умови Діріхлє;} \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial N}\right|_{x\in\Gamma} = \beta_1(t),\ \left.\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial N}\right|_{\bar{x}\in\Gamma} = \beta_2(x_1,x_2) \text{ – умови Неймана;} \tag{11}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial N} + \gamma_1 u(x,t)\big|_{x\in\Gamma} = \mu_1(t),\ \frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial N} + \gamma_2 u(x_1,x_2)\big|_{\bar{x}\in\Gamma} = \mu_2(x_1,x_2) \text{ – змішані умови,} \tag{12}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \mu_1, \mu_2$ – задані неперервні функції, визначені на граничній поверхні Г;

γ_1, γ_2 – задані сталі величини;

$\frac{\partial u}{\partial N}$ – означає похідну, взяту в точці поверхні Г в напрямку внутрішньої (чи зовнішньої) нормалі N до неї;

$\bar{x} = (x_1, x_2)$.

Метод моделювання фізичних процесів і полів, який описується математичними моделями (1)–(12), побудуємо на основі одномірних диференціальних перетворень [5].

У випадку моделювання фізичних полів використаємо систему одномірних зміщених диференціальних перетворень [4] виду:

$$U_1(k_1,x_2) = \frac{H_1^{k_1}}{k_1!}\left[\frac{\partial^{k_1} u(x_1,x_2)}{\partial x_1^{k_1}}\right]_{x_1=x_{1\nu}},\ u(x_1,x_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_1 - x_{1\nu}}{H_1}\right)^{k_1} U_1(k_1,x_2), \tag{13}$$

$$U_2(x_1,k_2) = \frac{H_2^{k_2}}{k_2!}\left[\frac{\partial^{k_2} u(x_1,x_2)}{\partial x_2^{k_2}}\right]_{x_2=x_{2\nu}},\ u(x_1,x_2) = \sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_2 - x_{2\nu}}{H_2}\right)^{k_2} U_2(x_1,k_2), \tag{14}$$

де $x_{1\nu}$, $x_{2\nu}$ – координати фіксованої точки в межах області (2);

k_1, k_2 – цілочисельні аргументи, які приймають значення 0, 1, 2, 3, …, ∞ ;

$U_1(k_1, x_2)$, $U_2(x_1, k_2)$ – диференціальні зображення функції $u(x_1, x_2)$, які прийнято називати диференціальними спектрами, а їх значення при фіксованих значеннях цілочисельних аргументів – дискретами диференціальних спектрів;

H_1 і H_2 – довільні додатні сталі.

Моделювання фізичних процесів можна виконати тією ж системою диференціальних перетворень (13) і (14), якщо прийняти $x = x_1$, $t = x_2$. Тому надалі будемо розглядати випадок моделювання фізичних полів.

В роботах [4–6] розглядався випадок використання системи диференціальних перетворень (13) чи (14) в одній фіксованій точці ($x_{1\nu}$, $x_{2\nu}$) області (2). У цій статті розглянемо випадок використання системи диференціальних перетворень (13), (14) в двох фіксованих точках $(x_{1\nu}, x_{2\nu})$ при $\nu = 1,2$. Оберемо одну фіксовану точку (x_{11}, x_{21}) на лівій границі області (2) при $x_{11} = x_{21} = 0$. Другу фіксовану точку (x_{12}, x_{22}) обираємо на правій границі області (2) при $x_{12} = H_1$, $x_{22} = H_2$.

Отже моделювання фізичного поля $u(x_1, x_2)$ виконаємо на основі двох систем диференціальних перетворень:

$$\begin{cases} U_1(k_1, x_2) = \dfrac{H_1^{k_1}}{k_1!}\left[\dfrac{\partial^{k_1} u(x_1, x_2)}{\partial x_1^{k_1}}\right]_{x_1=0}, \quad u(x_1, x_2) = \sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\left(\dfrac{x_1}{H_1}\right)^{k_1} U_1(k_1, x_2); & (15) \\ U_2(x_1, k_2) = \dfrac{H_2^{k_2}}{k_2!}\left[\dfrac{\partial^{k_2} u(x_1, x_2)}{\partial x_2^{k_2}}\right]_{x_2=0}, \quad u(x_1, x_2) = \sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\left(\dfrac{x_2}{H_2}\right)^{k_2} U_2(x_1, k_2), & (16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{U}_1(k_1, x_2) = \dfrac{\overline{H}_1^{k_1}}{k_1!}\left[\dfrac{\partial^{k_1} u(x_1, x_2)}{\partial x_1^{k_1}}\right]_{x_1=H_1}, \quad u(x_1, x_2) = \sum\limits_{k_1=0}^{\infty}\left(\dfrac{x_1 - \overline{H}_1}{\overline{H}_1}\right)^{k_1} \overline{U}_1(k_1, x_2); & (17) \\ \overline{U}_2(x_1, k_2) = \dfrac{\overline{H}_2^{k_2}}{k_2!}\left[\dfrac{\partial^{k_2} u(x_1, x_2)}{\partial x_2^{k_2}}\right]_{x_2=H_2}, \quad u(x_1, x_2) = \sum\limits_{k_2=0}^{\infty}\left(\dfrac{x_2 - \overline{H}_2}{\overline{H}_2}\right)^{k_2} \overline{U}_2(x_1, k_2), & (18) \end{cases}$$

де рискою зверху позначено диференціальний спектр на правій границі області (2).

Вирази (15)–(18) зліва відповідають переведенню поля $u(x_1, x_2)$, яке моделюється, в область диференціальних зображень. Обернений перехід з області зображень в область оригіналів описують вирази (15)–(18) справа.

Перший етап методу полягає в переведенні диференціальних рівнянь з частинними похідними (6) і (7) в область зображень на основі диференціальних перетворень (15)–(18):

$$U_1(k_1 + 2, x_2) = \frac{H_1^2}{(k_1+1)(k_1+2)}\Phi_1\Big[k_1, x_2, U_1(k_1, x_2), \frac{k_1+1}{H_1}U_1(k_1+1, x_2),$$
$$\frac{dU_1(k_1, x_2)}{dx_2}, \frac{k_1+1}{H_1}\frac{dU_1(k_1+1, x_2)}{dx_2}, \frac{d^2U_1(k_1, x_2)}{dx_2^2}\Big], \tag{19}$$

$$U_2(x_1, k_2 + 2) = \frac{H_2^2}{(k_2+1)(k_2+2)}\Phi_2\Big[x_1, k_2, U_2(x_1, k_2), \frac{dU_2(x_1, k_2)}{dx_1}, \frac{k_2+1}{H_2}U_2(x_1, k_2+1),$$
$$\frac{k_2+1}{H_2}\frac{dU_2(x_1, k_2+1)}{dx_1}, \frac{d^2U_2(x_1, k_2)}{d^2x_1}\Big], \tag{20}$$

$$\overline{U}_1(k_1 + 2, x_2) = \frac{\overline{H}_1^2}{(k_1+1)(k_1+2)}\overline{\Phi}_1\Big[k_1, x_2, \overline{U}_1(k_1, x_2), \frac{k_1+1}{\overline{H}_1}\overline{U}_1(k_1+1, x_2),$$
$$\frac{d\overline{U}_1(k_1, x_2)}{dx_2}, \frac{k_1+1}{\overline{H}_1}\frac{d\overline{U}_1(k_1+1, x_2)}{dx_2}, \frac{d^2\overline{U}_1(k_1, x_2)}{dx_2^2}\Big], \tag{21}$$

$$\overline{U}_2(x_1, k_2 + 2) = \frac{\overline{H}_2^2}{(k_2+1)(k_2+2)}\overline{\Phi}_2\Big[x_1, k_2, \overline{U}_2(x_1, k_2), \frac{d\overline{U}_2(x_1, k_2)}{dx_1}, \frac{k_2+1}{\overline{H}_2}\overline{U}_2(x_1, k_2+1),$$
$$\frac{k_2+1}{H_2}\frac{d\overline{U}_2(x_1, k_2+1)}{dx_1}, \frac{d^2\overline{U}_2(x_1, k_2)}{d^2x_1}\Big], \tag{22}$$

де Φ_1 і $\overline{\Phi}_1$ – зображення функції φ_1 на основі диференціальних перетворень (15) і (17) відповідно;

Φ_2 і $\overline{\Phi}_2$ – зображення функції φ_2 в області диференціальних перетворень (16) і (18) відповідно.

Перевага диференціальних перетворень (15)–(18) полягає в переведенні диференціальних рівнянь з частинними похідними в рекурентні вирази (19)–(22), які дають змогу знайти дискрети диференціальних спектрів $U_1(k_1,x_2)$, $U_2(x_1,k_2)$, $\overline{U}_1(k_1,x_2)$, $\overline{U}_2(x_1,k_2)$, послідовно надаючи цілочисельні значення 0, 1, 2, 3, … аргументам k_1 і k_2. Початкові дискрети диференціальних спектрів, що необхідні для реалізації рекурентних обчислень, знайдемо із граничних умов (10)–(12) і основних властивостей диференціальних перетворень [4–8]:

$$\begin{aligned}
&U_1(0,x_2)=u(0,x_1),\ U_2(x_1,0)=u(x_1,0),\\
&U_1(1,x_2)=H_1\left.\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=0},\ U_2(x_1,1)=H_2\left.\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0},\\
&\overline{U}_1(0,x_2)=u(H_1,x_2),\ \overline{U}_2(x_1,0)=u(x_1,H_2),\\
&\overline{U}_1(1,x_2)=\overline{H}_1\left.\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=H_1},\ \overline{U}_2(x_1,1)=\overline{H}_2\left.\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_2=H_2}.
\end{aligned}\tag{23}$$

Якщо частина граничних умов у виразі (23) невідома, то їх слід задати у символьному вигляді як невідому функцію.

Другий етап методу полягає в рекурентному обчисленні дискрет диференціальних спектрів $U_1(k_1,x_2)$, $U_2(x_1,k_2)$, $\overline{U}_1(k_1,x_2)$, $\overline{U}_2(x_1,k_2)$ за виразами (19)–(22) на основі початкових дискрет (23), послідовно надаючи цілочисельним аргументам k_1 і k_2 значення 0, 1, 2, 3, … . Моделювання фізичного поля $u(x_1,x_2)$ вимагає обчислення однієї пари диференціальних спектрів $U_1(k_1,x_2)$, $\overline{U}_1(k_1,x_2)$ чи $U_2(x_1,k_2)$, $\overline{U}_2(x_1,k_2)$. Вибір тієї чи іншої пари диференціальних спектрів здійснюють із умови отримання ненульових значень дискрет диференціальних спектрів, оскільки тільки в цьому випадку можливо побудувати функцію $u(x_1,x_2)$ на основі обернених диференціальних перетворень (15)–(18) і дискрет диференціальних спектрів. В інших випадках вибір однієї із пар диференціальних спектрів $U_1(k_1,x_2)$, $\overline{U}_1(k_1,x_2)$ чи $U_2(x_1,k_2)$, $\overline{U}_2(x_1,k_2)$ довільний. Надалі будемо називати диференціальні спектри $U_1(k_1,x_2)$, $U_2(x_1,k_2)$ прямими, а диференціальні спектри $\overline{U}_1(k_1,x_2)$, $\overline{U}_2(x_1,k_2)$ – зворотними. Обгрунтування такої термінології міститься в правих виразах (15)–(18). Обернені диференціальні перетворення (15), (16) описують фізичне поле $u(x_1,x_2)$ в області (2) при зміні аргументів x_1 та x_2 від нульового значення в сторону зростання їх абсолютних значень. З іншого боку, обернені диференціальні перетворення (17), (18) описують фізичне поле $u(x_1,x_2)$ в області (2) від його правої границі $x_1=H_1$, $x_2=H_2$ в сторону зменшення абсолютних значень аргументів x_1 та x_2.

Третій етап методу полягає в спряженні прямих і зворотних диференціальних спектрів $U_1(k_1,x_2)$ і $\overline{U}_1(k_1,x_2)$ чи $U_2(x_1,k_2)$ і $\overline{U}_2(x_1,k_2)$ на основі умов спряження в точці спряження $x_{1c}=\dfrac{H_1}{2}=\dfrac{\overline{H}_1}{2}$, $x_{2c}=\dfrac{H_2}{2}=\dfrac{\overline{H}_2}{2}$:

$$u(x_{1c},x_2)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_{1c}}{H_1}\right)^{k_1}U_1(k_1,x_2)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_{1c}-\overline{H}_1}{\overline{H}_1}\right)^{k_1}\overline{U}_1(k_1,x_2),\tag{24}$$

$$u(x_1,x_{2c})=\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_{2c}}{H_2}\right)^{k_2}U_2(x_1,k_2)=\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_{2c}-\overline{H}_2}{\overline{H}_2}\right)^{k_2}\overline{U}_2(x_1,k_2).\tag{25}$$

Крім умов спряження (24), (25), необхідно виконати умови спряження за похідними:

$$\left.\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_1=x_{1c}}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_1}{H_1}\right)^{k_1}U_1(k_1,x_2)\right]_{x_1=x_{1c}}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_1-\overline{H}_1}{\overline{H}_1}\right)^{k_1}\overline{U}_1(k_1,x_2)\right]_{x_1=x_{1c}},\tag{26}$$

$$\left.\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_2=x_{2c}} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_2}{H_2}\right)^{k_2} U_2(x_1,k_2)\right]_{x_2=x_{2c}} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_2-\overline{H}_2}{\overline{H}_2}\right)^{k_2} \overline{U}_2(x_1,k_2)\right]_{x_2=x_{2c}} \quad (27)$$

Після диференціювання виразів (26), (27) і підстановки в них координат точки спряження $x_1 = x_{1c} = \frac{H_1}{2} = \frac{\overline{H}_1}{2}$, $x_2 = x_{2c} = \frac{H_2}{2} = \frac{\overline{H}_2}{2}$ отримаємо:

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_{1c}}{H_1}\right)^{k_1}(k_1+1)U_1(k_1+1,x_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_{1c}-\overline{H}_1}{\overline{H}_1}\right)^{k_1}(k_1+1)\overline{U}_1(k_1+1,x_2), \quad (28)$$

$$\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_{2c}}{H_2}\right)^{k_2}(k_2+1)U_2(x_1,k_2+1) = \sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{x_{2c}-\overline{H}_2}{\overline{H}_2}\right)^{k_2}(k_2+1)\overline{U}_2(x_1,k_2+1). \quad (29)$$

Якщо підставити дискрети диференціальних спектрів $U_1(k_1,x_2)$, $\overline{U}_1(k_1,x_2)$ і $U_2(x_1,k_2)$, $\overline{U}_2(x_1,k_2)$, визначені на основі рекурентних виразів (19)–(22), то умови спряження (24), (25) і (28), (29) дають систему звичайних диференціальних рівнянь, розв'язання якої дозволяє знайти невідомі дискрети диференціальних спектрів.

Четвертий етап методу полягає в розв'язанні звичайних диференціальних рівнянь (24), (28) чи (25), (29). Цей етап виконується будь-яким відомим методом [7–9]. Якщо система звичайних диференціальних рівнянь (24), (28) чи (25), (29) нелінійна, то для її розв'язання доцільно використати одномірні диференціальні перетворення, запропоновані академіком Г.Є. Пуховим [7–8].

П'ятий етап методу полягає в оберненому переході із області зображень в область оригіналів згідно з виразами зліва (15)–(18).

Рівняння спряження (24)–(29) стійкі до помилок, що виникають у випадку врахування обмеження кількості дискрет диференціальних спектрів $U_1(k_1,x_2)$, $\overline{U}_1(k_1,x_2)$ чи $U_2(x_1,k_2)$, $\overline{U}_2(x_1,k_2)$. Як показано в [10] помилки в лівій і правій частинах рівнянь (24)–(29) взаємно компенсуються, а верхня межа похибки оцінюється величиною $2^{-q}\varepsilon$, де q – номер останніх врахованих дискрет прямого і зворотного диференціальних спектрів, а ε – помилка, викликана врахуванням скінченного числа членів ряду Тейлора в зворотних диференціальних перетвореннях (15)–(18). Відомо, що помилка ε може бути оцінена наближено по Коші і точно за формулами Лагранжа чи Ейлера-Лагранжа [11]. Як наслідок, запропонований метод зменшує похибку розв'язку більш ніж в 2^q разів, порівняно із методом, який ґрунтується тільки на одному диференціальному спектрі прямому чи зворотному [10].

Розв'яжемо запропонованим методом тестовий приклад, що має точний розв'язок. Це дозволить отримати порівняльні оцінки похибки запропонованого методу і відомого методу [5].

Як тестовий приклад розглянемо рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (30)$$

де a – коефіцієнт температуропровідності;

u – температура стержня довжини l.

Початкові й граничні умови для рівняння (30) мають вигляд:

$$u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2l}, \quad (31)$$

$$u(0,t) = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0. \quad (32)$$

Тепловий процес, що відповідає моделі (30)–(32), має точний аналітичний опис:

$$u(x,t) = e^{-\frac{a\pi^2}{4l^2}t}\sin\frac{\pi x}{2l}. \quad (33)$$

Перейдемо до нових змінних $x_1 = x$, $x_2 = t$ і переведемо рівняння теплопровідності (30) в область зображень на основі диференціальних перетворень (15) і (17). Опускаючи індекси, рекурентні вирази (19) і (21) у випадку, що розглядається, запишемо у вигляді:

$$U(k+2,x_2) = \frac{H^2}{a(k+1)(k+2)}\frac{dU(k,x_2)}{dx_2}, \quad (34)$$

$$\overline{U}(k+2,x_2)=\frac{\overline{H}^2}{a(k+1)(k+2)}\frac{d\overline{U}(k,x_2)}{dx_2}. \quad (35)$$

На основі співвідношень (23) і граничних умов (32) знайдемо початкові дискрети диференціальних спектрів при $H=\overline{H}=l$:

$$U(0,x_2)=0,\ U(1,x_2)=H\psi_1(x_2), \quad (36)$$

$$\overline{U}(0,x_2)=\psi_2(x_2),\ \overline{U}(1,x_2)=0. \quad (37)$$

Реалізуємо другий етап методу. Надаючи цілочисельному аргументу k значення 0, 1, 2, з рекурентного виразу (34) за початковими дискретами (36) знайдемо дискрети диференціального спектра $U(k,x_2)$:

$$U(0,x_2)=0,\ U(1,x_2)=H\psi_1(x_2),\ U(2,x_2)=0,\ U(3,x_2)=\frac{H^3}{a3!}\dot{\psi}_1(x_2),\ U(4,x_2)=0, \quad (38)$$

де введено позначення $\dot{\psi}_1(x_2)=\dfrac{d\psi_1(x_2)}{dx_2}$.

Аналогічним чином знаходимо дискрети диференціального спектра $\overline{U}(k,x_2)$ за виразом (35) і початковими дискретами (37):

$$\overline{U}(0,x_2)=\psi_2(x_2),\ \overline{U}(1,x_2)=0,\ \overline{U}(2,x_2)=\frac{\overline{H}^2}{2a}\dot{\psi}_2(x_2),\ \overline{U}(3,x_2)=0, \quad (39)$$

де позначено $\dot{\psi}_2(x_2)=\dfrac{d\psi_2(x_2)}{dx_2}$.

Переходимо до третього етапу методу. Складаємо на основі диференціальних спектрів (38) і (39) умови спряження $x_{1c}=\dfrac{H}{2}=\dfrac{\overline{H}}{2}$ при $H=\overline{H}=l$:

$$\begin{cases}\dfrac{l}{2}\psi_1(x_2)+\dfrac{l^3}{48a}\dot{\psi}(x_2)=\psi_2(x_2)+\dfrac{l^2}{8a}\dot{\psi}_2(x_2),\\ \psi_1(x_2)+\dfrac{l^2}{8a}\dot{\psi}_1(x_2)=-\dfrac{l}{2a}\dot{\psi}_2(x_2).\end{cases} \quad (40)$$

Виконаємо четвертий етап методу. Методом виключення функції $\psi_2(x_2)$ із системи (40) отримаємо звичайне диференціальне рівняння відносно невідомої функції $\psi_1(x_2)$:

$$\ddot{\psi}_1(x_2)+\frac{96}{5}\frac{a}{l^2}\dot{\psi}_1(x_2)+\frac{192}{5}\frac{a^2}{l^4}\psi_1(x_2)=0, \quad (41)$$

де $\ddot{\psi}_1(x_2)=\dfrac{d^2\psi_1(x_2)}{dx_2^2}$.

Лінійне диференціальне рівняння другого порядку (41) має загальний розв'язок виду:

$$\psi_1(x_2)=C_1e^{p_1x_2}+C_2e^{p_2x_2}, \quad (42)$$

де C_1 і C_2 – константи інтегрування, p_1 і p_2 – корені характеристичного рівняння, що дорівнюють:

$$p_{1,2}=\frac{48}{5}\frac{a}{l^2}\left(-1\pm\sqrt{\frac{7}{12}}\right). \quad (43)$$

Підстановка виразу $\dot{\psi}_2(x_2)$ із другого рівняння системи (40) в його перше рівняння дає можливість визначити невідому функцію $\psi_2(x_2)$ у вигляді:

$$\psi_2(x_2)=\frac{3l}{4}\psi_1(x_2)+\frac{5}{96}\frac{l^3}{a}\dot{\psi}_1(x_2). \quad (44)$$

З врахуванням (42) вираз (44) перетворюється до вигляду:

$$\psi_2(x_2)=\frac{3l}{4}\left(C_1e^{p_1x_2}+C_2e^{p_2x_2}\right)+\frac{5}{96}\frac{l^3}{a}\left(C_1p_1e^{p_1x_2}+C_2p_2e^{p_2x_2}\right). \quad (45)$$

Таким чином, отримано розв'язок рівняння теплопровідності (30) в області зображень в формі двох диференціальних спектрів (38) і (39), де $\psi_1(x_2)$ і $\psi_2(x_2)$ визначаються із виразів (42)–(45).

На заключному п’ятому етапі методу переведемо рівняння теплопровідності із області зображень (38), (39) в область оригіналів на основі виразів справа в (15) і (17) з врахуванням повернення до вихідних змінних $x = x_1$, $t = x_2$.

$$u(x,t) = x\psi_1(t) + \frac{x^3}{a3!}\dot{\psi}_1(t) = x\left(C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}\right) + \frac{x^3}{a3!}\left(C_1 p_1 e^{p_1 t} + C_2 p_2 e^{p_2 t}\right), \quad (46)$$

$$u(x,t) = \psi_2(t) + \frac{(x-l)^2}{2a}\dot{\psi}_2(t), \quad (47)$$

де $\psi_2(t)$ визначається за виразом (45) при $x_2 = t$.

Опис фізичного процесу $u(x,t)$ на відрізку $\left[0, \frac{l}{2}\right]$ отримується за виразом (46), а на відрізку $\left[\frac{l}{2}, l\right]$ слід застосовувати вираз (47).

В отриманому розв'язку залишилося визначити невідомі константи інтегрування C_1 і C_2. Для визначення C_1 і C_2 використаємо початкову умову (31) і вираз (46) при $t = 0$:

$$u(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2l} = x(C_1 + C_2) + \frac{x^3}{a3!}(C_1 p_1 + C_2 p_2). \quad (48)$$

Якщо розкласти синусоїдальну функцію у виразі (48) в степеневий ряд, то отримаємо співвідношення:

$$\frac{\pi}{2l}x - \left(\frac{\pi}{2l}\right)^3 \frac{x^3}{3!} = (C_1 + C_2)x + \frac{1}{a}(C_1 p_1 + C_2 p_2)\frac{x^3}{3!}. \quad (49)$$

Прирівнюючи члени при однакових степенях змінної *x* в (49), отримаємо:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{\pi}{2l}, \\ C_1 p_1 + C_2 p_2 = -a\left(\dfrac{\pi}{2l}\right)^3. \end{cases} \quad (50)$$

Розв'язок лінійної системи алгебраїчних рівнянь (50) визначає невідомі константи інтегрування:

$$C_1 = 0{,}4932, \; C_2 = 0{,}0068. \quad (51)$$

Таким чином, отримано аналітичний опис теплового процесу у формі (46), (47), де параметри p_1 і p_2 визначаються за виразом (43), а константи C_1 і C_2 задаються співвідношеннями (51).

Оцінимо похибку отриманого розв'язку в точці $x = l = \pi$, $t = 1$ при $a = 1$. Із виразу (47) випливає, що при $x = l$

$$u(x = l, t) = \psi_2(t). \quad (52)$$

Звідси $u(x = l, t = 1) = \psi_2(t = 1)$.

Обчислення функції (45) при $x_2 = t = 1$ із врахуванням (43) і (51) дає: $u(x = l = \pi, t = 1) = 0{,}7776$.

Із точного розв'язку (33) задачі (30)–(32) отримаємо при $a = 1$:

$$u(x = l = \pi, t = 1) = e^{-0{,}25} = 0{,}7788. \quad (53)$$

Порівнюючи розв'язок, отриманий запропонованим методом, з точним розв’язком (53) знайдемо похибку розв'язку $|\varepsilon_1| = 0{,}0012$.

Виконаємо порівняння запропонованого методу із відомим [5], який використовує тільки один диференціальний спектр (38). Знайдемо похідну (32) на правому кінці стержня на основі диференціального спектра (38) при $x_1 = x$, $x_2 = t$, $H = l$:

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} = \frac{1}{H}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)U(k+1,t) = 0. \quad (54)$$

Підстановка диференціального спектра (38) в рівняння (54) при $x_2 = t$, $H = l$, дає рівняння:

$$\psi(t) + \frac{l^2}{2a}\dot{\psi}(t) = 0, \text{ де } \dot{\psi}(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}. \quad (55)$$

В рівнянні (55) індекс опущено, оскільки функції $\psi(t)$ і $\psi_1(t)$ відрізняються. Функція $\psi(t)$ визначається розв’язком диференціального рівняння (55), а функція $\psi_1(t)$ є розв'язком рівняння (41).

Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння (55) має вигляд:

$\psi(t) = Ce^{pt}$, де $p = -\frac{2a}{l^2}$, C – стала інтегрування. (56)

Диференціальний спектр (38) при $x_2 = t$ з урахуванням виразу (56) перетворюється до виду:

$$U(0,t) = 0\,,\ U(1,t) = HCe^{pt}\,,\ U(2,t) = 0\,,\ U(3,t) = \frac{H^3}{3!}\frac{Cp}{a}e^{pt}\,,\ U(4,t) = 0\,. \tag{57}$$

Переведемо зображення (57) розв'язку задачі (30)–(32) в область оригіналів за виразом справа (15) при $x_1 = x$, $x_2 = t$:

$$u^*(x,t) = xCe^{pt} + \frac{x^3}{3!}\frac{Cp}{a}e^{pt}\,, \tag{58}$$

де символ "*" означає розв'язок задачі отриманий відомим методом [5].

Розкладаючи синусоїдальну функцію в степеневий ряд в початковій умові (31) з урахуванням виразу (58) при $t = 0$ отримаємо рівняння для визначення константи C:

$$u(x,0) = \sin\frac{\pi}{2l}x = \frac{\pi}{2l}x - \left(\frac{\pi}{2l}\right)^3\frac{x^3}{3!} = Cx + \frac{Cp}{a}\frac{x^3}{3!}\,. \tag{59}$$

Порівнюючи члени при однакових степенях x, маємо:

$$C = \frac{\pi}{2l}\,,\ Cp = -a\left(\frac{\pi}{2l}\right)^3. \tag{60}$$

З виразу (60) випливає, що при $l = \pi$ $C = 0{,}5$. Приймаючи $a = 1$, $l = \pi$, із виразу (56) маємо $p = -\frac{2}{\pi^2}$. З врахуванням параметрів $C = 0{,}5$, $p = -\frac{2}{\pi^2}$, $a = 1$ розв'язок задачі (58) відомим методом перетворюється до вигляду:

$$u^*(x,t) = 0{,}5\left(x - \frac{x^3}{3\pi^2}\right)e^{-\frac{2}{\pi^2}t}\,. \tag{61}$$

Із виразу (61) випливає, що:

$$u^*(x = l = \pi, t = 1) = \frac{\pi}{3}e^{-\frac{2}{\pi^2}} = 0{,}8551\,. \tag{62}$$

Порівнюючи розв'язок (62) відомим методом з точним розв'язком (53), отримаємо похибку розв'язку, отриманого відомим методом $|\varepsilon_2| = 0{,}0763$. Ця похибка більша ніж в 60 разів похибки по запропонованому методу $|\varepsilon_1| = 0{,}0012$. Слід зазначити, що зменшення похибки запропонованим методом досягнуто ціною ускладнення аналітичного опису. Це випливає із порівняння виразів (46), (47), що описують фізичний процес запропонованим методом, і виразу (58), який отримано відомим методом.

Висновки. Запропоновано метод моделювання двомірних фізичних полів і процесів на основі обмеженої кількості дискрет прямого і зворотного диференціальних спектрів. Порівняно з методом моделювання фізичних полів і процесів на основі одного диференціального спектра запропонований метод зменшує похибку моделювання більш у ніж 2^q разів, де q – номер останньої врахованої дискрети диференціального спектра. Ефект зниження похибки моделювання досягається ціною ускладнення аналітичного опису фізичних полів і процесів.

Предметом подальших досліджень є застосування запропонованого методу для моделювання нелінійних фізичних процесів, що описуються нелінійними крайовими задачами.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: БИНОМ, 2003. – 632 с.
2. *Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д.* Численные методы. Использование MATLAB. – М.: Вильямс, 2001. – 720 с.
3. *Поршнев С.В.* Вычислительная математика. – Санкт-Петербург: БХВ Петербург, 2004. – 320 с.
4. *Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М.* Зміщені системоаналогові диференціальні перетворення для розв'язку крайових задач // Вісник ЖДТУ. – 2005. – № 4 (35). – С. 42–48.
5. *Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М.* Моделювання фізичних процесів методом одномірних диференціальних перетворень крайових задач // Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. пр. – Вип. 3 (14). – К.: НАУ, 2005. – С. 25–30.

6. *Баранов В.Л., Водоп'ян С.В., Костюченко Р.М.* Метод моделювання фізичних процесів на основі диференціальних перетворень нелінійних крайових задач // Вісник ЖДТУ. – 2007. – № 2 (41). – С. 59–65.
7. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. – Киев: Наук. думка, 1990. – 184 с.
8. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – Киев: Наук. думка, 1986. – 158 с.
9. *Рвачев В.Л., Слесаренко А.П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. – Киев: Наук. думка, 1976. – 288 с.
10. *Баранов В.Л., Баранов Г.Л., Фролова О.Г.* Порівняння методів моделювання динамічних процесів основними та зміщеними диференціальними перетвореннями // Проблеми інформатизації та управління: Зб. наук. пр. – Вип. 10. – К.:НАУ, 2004. – С. 72–77.
11. *Трухаев Г.И.* Методы инфлуентного анализа высоких порядков. – Ленинград: Наука, 1987. – 257 с.

БАРАНОВ Володимир Леонідович – Заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник Житомирського військового інституту ім. С.П. Корольова Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси:
– моделювання, чисельні методи;
– оптимізація;
– диференціальні перетворення.

КОСТЮЧЕНКО Руслана Михайлівна – кандидат технічних наук, викладач кафедри фундаментальних дисциплін Житомирського військового інституту ім. С.П. Корольова Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси:
– моделювання, чисельні методи;
– диференціальні перетворення.

МОЛОДЕЦЬКА Катерина Валеріївна – аспірант, викладач кафедри автоматизованих систем управління Житомирського військового інституту ім. С.П. Корольова Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси:
– моделювання, чисельні методи;
– диференціальні перетворення.

Подано 05.02.2009

Баранов В.Л., Костюченко Р.М., Молодецькая Е.В. Метод моделювання фізичних полів і процесів на основі прямих і зворотних диференціальних спектрів
Баранов В.Л., Костюченко Р.М., Молодецкая Е.В. Метод моделирования физических полей и процессов на основе прямых и обратных дифференциальных спектров
Baranov V.L., Kostuchenko R.M., Molodetska K.V. The physical fields and processes modeling method based on direct and reverse differential spectrum system

УДК 621.372.061
Метод моделирования физических полей и процессов на основе прямых и обратных дифференциальных спектров / В.Л. Баранов, Р.М. Костюченко, Е.В. Молодецкая
Предложен метод моделирования физических полей и процессов, основанный на системе прямых и обратных дифференциальных спектров. Использование системы дифференциальных спектров, описывающих физические поля и процессы в области дифференциальных преобразований, позволяет уменьшить погрешность моделирования в области оригиналов. Приведен пример моделирования.

УДК 621.372.061
The physical fields and processes modeling method based on direct and reverse differential spectrum system / V.L. Baranov, R.M. Kostuchenko, K.V. Molodetska
The physical fields and processes modeling method based on direct and reverse differential spectrum system has been introduced. The differential spectra, which describe physical fields and processes in the branch of differential transformation, system application enables to describe the modeling error in the originals sphere. The modeling example has been given.