УДК 519.67

С.І. Яремчук. к.ф.-м.н., доц.
Р.В. Бурда, асист.
С.С. Матущенко, магістрант
Житомирський державний технологічний університет

КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИСКРЕТНОЇ МІНІМАКСНОЇ ЗАДАЧІ РОЗМІЩЕННЯ ДЖЕРЕЛ ФІЗИЧНОГО ПОЛЯ

Розроблено алгоритм розв'язання дискретної мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля. Пропонується стратегія розв'язання, яка базується на цьому алгоритмі та на методі вектора спаду. Показано, що точка, отримана після застосування комбінованого методу, є точкою локального мінімуму.

Вступ. Задачі оптимального розміщення виникають в різноманітних галузях діяльності людини. Більшість з них (наприклад задачі розкрою, щільного розміщення) добре досліджені, та методи їх розв'язання широко використовуються на практиці. Але для окремих задач математичний апарат їх розв'язання все ще вимагає вдосконалення. До таких належить і мінімаксна задача розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця.

Аналіз досліджень. Проблемі розміщення геометричних об'єктів присвячено багато робіт. Більшість з них присвячена задачам щільного розміщення об'єктів, розв'язання яких зводиться до розв'язання задач лінійного програмування [1, 2, 3].

У випадку нелінійної диференційованої функції цілі множина допустимих розв'язків подається у вигляді опуклих підмножин, і отримані підзадачі розв'язуються відомим методом. Наприклад методом можливих напрямків [4].

Коли множину допустимих розв'язків важко розбити на опуклі підмножини, застосовується метод штрафних функцій [5].

Для розв'язання мінімаксних оптимізаційних задач при певних умовах може бути застосований один із методів послідовних наближень [6].

У окремих випадках задача розміщення геометричних об'єктів може бути поставлена як задача лінійного програмування з булевими змінними, до якої можна застосувати, наприклад, адитивний алгоритм [7].

Більша частина наведених методів розв'язує задачі неперервної оптимізації. Методи розв'язання задач лінійного програмування з булевими змінними як правило застосовуються до великого класу задач розміщення без врахування особливостей кожної конкретної задачі. А це часто збільшує кількість розрахунків і час розв'язання задачі. Тому дана робота присвячена одному підкласу задач розміщення джерел фізичного поля.

Мета роботи: розробити алгоритм розв'язання дискретної мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля; використавши метод вектора спаду, показати, що точка, яка отримується після застосування алгоритму, буде точкою локального мінімуму, або знайти нову початкову точку для розробленого алгоритму.

Постановка задачі. Розглянемо задачу розміщення джерел фізичного поля на фіксовані посадкові місця. Є область розміщення $\Omega \subset R^n$, N джерел фізичного поля $D_i, i \in [1:N]$ і така ж кількість посадкових місць $m^j \in \Omega$, $j \in [1:N]$. На розміщення джерел накладаються такі обмеження.

1. На кожне посадкове місце потрібно розмістити лише одне джерело:

$$m\left[\{m^j\} \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{N} \{p^i\} \right)\right] = 1,\ j \in [1:N], \tag{1}$$

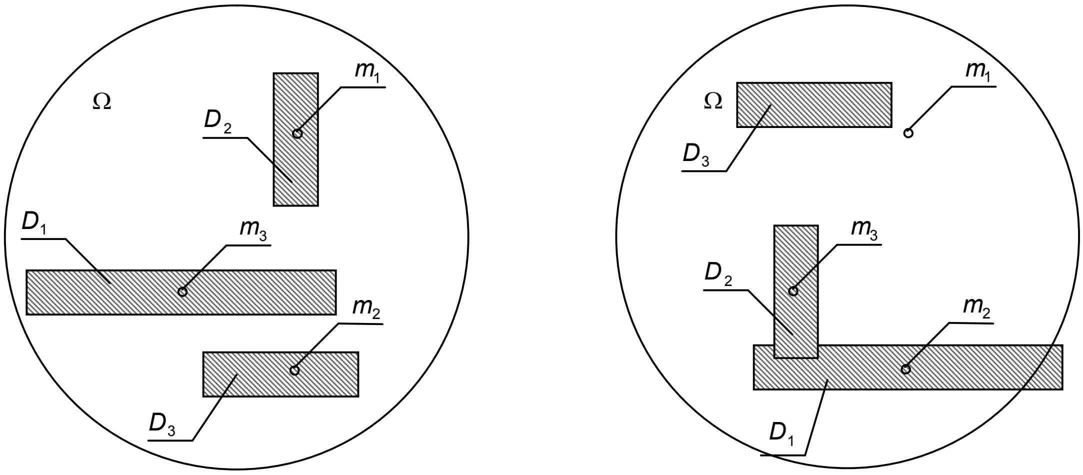
де m – потужність множини, p^i – полюс i-го джерела, $i \in [1:N]$.

2. Кожне джерело може бути поставлено не лише на одне посадкове місце:

$$m\left[\{p^i\} \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^{N} \{m^j\} \right)\right] = 1,\ i \in [1:N]. \tag{2}$$

3. Джерела не перетинаються між собою та не виходять за межі області.

На рис. 1, *а* наведено приклад правильного розміщення, а на рисунку 1, *б* – неправильного.



а) *б)*

Рис. 1

За критерій якості оберемо функцію:

$$f(Z) = \max_{k \in [1:K]} u(y^k, Z) \to \min\ , \tag{3}$$

де $y^k \in \Omega$, $k \in [1:K]$ – задані точки області, вектор $Z = (Z^1, Z^2, ..., Z^N)$ задає розміщення всіх джерел, Z^i визначає положення i -го джерела в області й співпадає з координатами його полюсу p^i , $i \in [1:N]$, а функція $u(y, Z)$ визначається з такої крайової задачі:

$$Lu = \tilde{f}(y, Z), \tag{4}$$

$$B_j u = \varphi_j; \quad j \in [1:J], \tag{5}$$

де L – заданий лінійний диференційний оператор, B_j – задані лінійні оператори, які визначають граничні умови, φ_j – задані функції; y – поточна точка області Ω , $\tilde{f}$ – функція, яка має вигляд:

$$\tilde{f}(y, Z) = \begin{cases} A^i(y - Z^i), & якщо\ y \in D_i \\ 0, & якщо\ y \notin \bigcup_{i=1}^{N} D_i \end{cases} . \tag{6}$$

Нехай посадкові місця розташовані таким чином, що будь-яке розміщення джерел на посадкові місця не порушує умов взаємного неперетину та невиходу за межі області. Тоді задача (1)–(6) може бути поставлена у більш зручному для її розв'язання вигляді.

Нехай x_{ij} , $i \in [1:N]$, $j \in [1:N]$ – керовані змінні, які задаються таким чином:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & якщо\ i - те\ джерело\ не\ призначається\ на\ j - те\ місце, \\ 1, & якщо\ i - те\ джерело\ призначається\ на\ j - те\ місце. \end{cases} \tag{7}$$

Тоді обмеження (1) та (2) набувають вигляду (8) та (9) відповідно:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1\ , j \in [1:N], \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1\ , i \in [1:N]. \tag{9}$$

Завдяки властивості адитивності, функцію цілі (3) можна представити таким чином:

$$f(x) = \max_{k \in [1:K]} f_k(x) \to \min\ , \tag{10}$$

де

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^k x_{ij}\ . \tag{11}$$

Кожен з коефіцієнтів c_{ij}^k , $i \in [1:N]$, $j \in [1:N]$, $k \in [1:K]$ є значенням поля в точці y^k , яке створюється джерелом D_i при його постановці на j -те посадкове місце, тобто

$$c_{ij}^k = u_i\left(y^k, m^j\right), i \in [1:N], j \in [1:N], k \in [1:K], \tag{12}$$

де $u_i\left(y, Z^i\right), i \in [1:N]$ є розв'язком крайової задачі:

$$Lu_i = \widetilde{f}_i\left(y, Z^i\right),$$

$$B_j u_i = \frac{\varphi_j}{N},\ j \in [1:J],$$

$$\widetilde{f}_i\left(y, Z^i\right) = \begin{cases} A^i\left(y - Z^i\right), & \text{якщо } y \in D_i\left(Z^i\right) \\ 0, & \text{якщо } y \notin D_i\left(Z^i\right) \end{cases}.$$

Визначення коефіцієнтів c_{ij}^k здійснюється перед розв'язанням задачі.

Основна частина. Нехай є деяке наближення до розв'язку оптимізаційної задачі $x^r \in X, r = 0, 1, 2...$, де X – множина, задана умовами (7)–(9). Знайдемо наближення $x^{r+1} \in X$ так, щоб виконувалася нерівність:

$$f\left(x^{r+1}\right) < f\left(x^r\right). \tag{13}$$

Для цього необхідно виконання умови:

$$f_k\left(x^{r+1}\right) < f\left(x^r\right), \quad \forall k \in [1:K]. \tag{14}$$

Побудуємо множину:

$$K_{\max}\left(x^r\right) = \left\{k \in [1:K] \mid f_k\left(x^r\right) = f\left(x^r\right)\right\}. \tag{15}$$

Тоді умову (14) можна записати так:

$$f_k\left(x^{r+1}\right) < f\left(x^r\right), \quad k \in K_{\max}\left(x^r\right), \tag{16}$$

$$f_k\left(x^{r+1}\right) < f\left(x^r\right), \quad k \notin K_{\max}\left(x^r\right). \tag{17}$$

З використанням нерівностей (16)–(17) побудуємо загальну схему алгоритму.

1. Обирається початкова точка $x^0 \in X$, $r = 0$, $l = 0$.
2. Знаходиться така точка x_l^{r+1}, яка задовольняє умови (16). Якщо такої не існує, за розв'язок обирається $x^* = x^r$. Кінець роботи алгоритму.
3. Якщо знайдена точка x_l^{r+1} задовольняє умови (17), то за наступне наближення x^{r+1} обирається точка x_l^{r+1}, r збільшується на одиницю, l присвоюється нуль і здійснюється перехід до пункту 2.
4. Якщо знайдена точка x_l^{r+1} не задовольняє умови (17), то робиться спроба знайти іншу точку, яка задовольняє умову (16). Для цього l збільшується на одиницю і здійснюється перехід до пункту 2.

Побудуємо алгоритм знаходження таких точок, які задовольняють обмеження (16), (17).

Для цього розглянемо K задач про призначення з різними функціями цілі, але з однаковою множиною припустимих розв'язків.

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}^k x_{ij} \to \min,$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, j \in [1:N], \\ \sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, i \in [1:N], \end{cases} \tag{18}$$

$$k \in [1:K].$$

Всі задачі (18) можуть бути поставлені як транспортні, і до них можна застосувати метод потенціалів. Для кожної побудуємо опорний план $\bar{x}_0^r$, який відповідає x^r, і знайдемо потенціали. Позначимо їх таким чином:

$$u_i^k\left(\bar{x}_0^r\right),\ i \in [1:N];\ v_j^k\left(\bar{x}_0^r\right),\ j \in [1:N]. \tag{19}$$

Тоді оцінки можна розрахувати за формулою:

$$\Delta_{ij}^k\left(\bar{x}_0^r\right) = u_i^k\left(\bar{x}_0^r\right) + v_j^k\left(\bar{x}_0^r\right) - c_{ij}^k,\ i \in [1:N],\quad j \in [1:N]. \tag{20}$$

Якщо хоча б для одного $k \in K_{\max}$ для небазисних комірок немає жодної додатної оцінки $\Delta_{ij}^k\left(\bar{x}_0^r\right) > 0$, то опорний план задачі k поліпшити неможливо. Дане твердження випливає із умов оптимальності опорного плану транспортної задачі [8]. Іншими словами, функція f_k досягла мінімуму на множині допустимих розв'язків у точці x^r. А оскільки $k \in K_{\max}$, то f також досягла мінімуму в цій точці.

Якщо існує комірка (i, j), така, що задовольняє умову:

$$\Delta_{ij}^k\left(\bar{x}_0^r\right) > 0, \forall k \in K_{\max}, \tag{21}$$

необхідно провести додаткові дослідження.

Розглянемо два можливі випадки:

– у базис вводиться комірка, яка призводить до перевезення по циклу нуля.
– у базис вводиться комірка, яка призводить до перевезення по циклу одиниці.

У першому випадку буде отримано ту саму точку x^r, якій відповідатиме деякий базис $\bar{x}_1^r$, відмінний від $\bar{x}_0^r$ положенням однієї базисної комірки, що містить фіктивне перевезення. Для зручності позначимо через $\bar{x}_s^r$ s-тий базис, який відповідає точці x^r.

В другому випадку буде отримано точку $x^{r+1} \neq x^r$, яка задовольняє умови (16). Для того, щоб визначити, чи виконуються умови (17) для знайденої точки, розглянемо теорему.

Теорема. Нехай маємо задачу $\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}x_{ij} \to \min, x \in X,$ де X – множина, яка описується системою рівнянь (8),(9), і нехай $\bar{x}^r$ – опорний план, що відповідає точці x^r. Тоді при введенні в базис комірки $\left(i^*, j^*\right)$, яка породжує одиничне перевезення, виконується:

$$\tilde{f}\left(x^r\right) - \tilde{f}\left(x^{r+1}\right) = \Delta_{i^*j^*}\left(\bar{x}_s^r\right). \tag{22}$$

З використанням рівняння (22) умову (17) можна записати таким чином:

$$f_k\left(x^r\right) - \Delta_{i^*j^*}^k\left(\bar{x}_s^r\right) < f\left(x^r\right)\ \forall k \notin K_{\max}. \tag{23}$$

Тобто якщо точка x^{r+1} задовольняє умову (22), то вона задовольняє умові (17).

Тоді *алгоритм методу* набуде вигляду:

1. Обирається початковий базис $\bar{x}_0^0$, якому відповідає точка x^0. Його можна отримати, наприклад, за допомогою методу північно-західного кута, $s = 0, r = 0$.
2. Нехай є базис $\bar{x}_s^r$, якому відповідає точка x^r. Знаходиться наступний опорний план.
   2.1. Будується множина $K_{\max}\left(x^r\right) = \left\{k \in [1:K] \middle| f_k\left(x^r\right) = f\left(x^r\right)\right\}$. Для $\bar{x}_s^r$ знаходяться потенціали (19) та оцінки (20) для всіх $k \in [1:K]$.
   2.2. Знаходиться множина комірок $I\left(\bar{x}_s^r\right)$, кожен елемент якої задовольняє умову (21). Якщо вона порожня, то здійснюється перехід до пункту 4.
   2.3. Серед елементів множини $I\left(\bar{x}_s^r\right)$ обирається такий, що задовольняє умову (23). Якщо таких не існує, то здійснюється перехід до пункту 4. Якщо таких елементів декілька, то в першу чергу обирається той, що призводить до одиничного перевезення. Позначимо його через $\left(i^*, j^*\right)$.
   2.4. Знаходиться наступний опорний план. Для цього комірка $\left(i^*, j^*\right)$, знайдена в попередньому пункті, вводиться в базис.
3. Якщо значення перевезення дорівнює одиниці, то отримуємо нову точку x^{r+1}, якій відповідає базис $\bar{x}_0^{r+1}$. При цьому r збільшуємо на одиницю, а s присвоюємо нуль. У випадку фіктивного

перевезення отримаємо ту ж точку x^r, але інший базис $\overline{x}^r_{s+1}$. При цьому r не змінюється, а s збільшується на одиницю. Здійснюється перехід до пункту 2.

4. За розв'язок обирається $x^* = x^r$. Кінець роботи алгоритму.

Немає гарантії, що точка, яку було знайдено наведеним алгоритмом, буде точкою локального чи глобального екстремуму. Для того, щоб показати, що отримане наближення є точкою локального мінімуму, або отримати краще наближення, застосовується метод вектора спаду.

Розглянемо множину Y, кожен елемент якої є вектором з розмірністю, яка дорівнює кількості джерел. Кожна координата цього вектора може приймати одне із значень $i = 1, 2, ..., N$. При цьому значення будь-якої координати зустрічається у векторі лише один раз.

Кожному елементу множини X співставляється деякий елемент множини Y так, щоб значення i -тої координати елемента множини Y дорівнювало номеру посадкового місця, на яке поставлене i -те джерело.

Нехай маємо два елементи множини Y: $y^1 \in Y$, $y^2 \in Y$. Елемент y^2 можна отримати шляхом деякої кількості перестановок місцями будь-яких двох координат вектора y^1. Нехай відстань $\rho\left(y^1, y^2\right)$ між двома елементами дорівнює мінімальній кількості таких перестановок, після яких з y^1 утвориться y^2. Очевидно, що функція $\rho\left(y^1, y^2\right)$ є метрикою. Справді, $\rho\left(y^1, y^2\right)$ невід'ємно визначена функція, для якої виконується умови:

1. $$\rho\left(y, y\right) = 0, \forall y \in Y \ , \quad (24)$$
$$\rho\left(y^1, y^2\right) > 0, \forall y^1, y^2 \in Y, y^1 \neq y^2 \ , \quad (25)$$
2. $$\rho\left(y^1, y^2\right) = \rho\left(y^2, y^1\right), \quad (26)$$
3. $$\rho\left(y^1, y^2\right) \leq \rho\left(y^1, y^3\right) + \rho\left(y^2, y^3\right). \quad (27)$$

Для побудови методу вектора спаду для певної задачі необхідно задати метрику та правило перебору точок околу. За метрику оберемо функцію $\rho\left(y^1, y^2\right)$, визначену вище. Правило перебору точок полягає в перестановці будь-яких двох координат. Застосуємо метод вектора спаду для перевірки, чи отримана точка x^* є точкою локального мінімуму. Для цього знайдемо відповідний елемент $y^* \in Y$ та окіл y^* – всі точки y, які задовольняють умову:

$$\rho\left(y^*, y\right) = 1, y \in Y \ . \quad (28)$$

Позначимо множину таких елементів через $Y^* \subset Y$.

Якщо хоча б для одного елемента $y \in Y^*$, якому відповідає точка $x \in X$, виконується умова

$$f\left(x\right) < f\left(x^*\right), \quad (29)$$

то x^* не є точкою локального мінімуму. В цьому випадку отримана точка x приймається за початкове наближення, і алгоритм розв'язання мінімаксної задачі застосовується знову.

За умови, що (29) не виконується для жодного елемента, отримано локальний мінімум. Алгоритм закінчує свою роботу.

Практична реалізація наведеної методики показала, що алгоритм розв'язання дискретної мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля дозволяє знайти точку локального, оскільки жодного разу не вдалося покращити функцію цілі за допомогою методу вектора спаду.

Висновки. Таким чином, в даній статті було розроблено алгоритм розв'язання дискретної мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля. Для того, щоб показати, що точка, яку було отримано після застосування алгоритму, є точкою локального мінімуму, використовується метод вектора спаду. Практична реалізація комбінованого методу показала, що алгоритм дає точку локального або глобального екстремуму.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Стоян Ю.Г., Гиль Н.И.* Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. – Киев: Наукова думка, 1976. – 248 с.
2. *Fernadez de la Vega W., Lueker G.S.* Bin packing can be solved within 1+e in linear time // Combinatorica. – 1981. – № 1. – Pp. 349–355.
3. *Rarmarkar N., Karp R.M.* An Efficient approximation Scheme for the One-Dimensional Bin-Packing problem. FOCS, 1981. – P. 321–320.

4. *Яремчук С. І., Шаповалов Ю. О.* Модифікація методу можливих напрямків для задачі оптимізації розміщення // Вісник Хмельницького національного університету. – 2005. – № 5. – Ч. 1. – Т. 2. – С. 146–151.
5. *Яремчук С.І., Жовновський Д.О.* Застосування методу штрафних функцій для розв'язання задач оптимального розміщення джерел фізичних полів // Математичне моделювання. – Дніпродз.: держ. техн. ун-т, 1998. – С. 37–39.
6. *Яремчук С.І., Бурда Р.В.* Метод штрафних функцій в мінімаксній задачі розміщення стаціонарних джерел фізичного поля // Вісник Хмельницького національного університету. – 2006. – С. 20.
7. *Зайченко Ю.П.* Дослідження операцій. – Київ: ЗАТ "ВІПОЛ", 2001. – 678 с.
8. *Таха Х.* Введение в исследование операций. – Т. 1. – Москва: Мир, 1985. – 479 с.

ЯРЕМЧУК Світлана Іванівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– екстремальні задачі;
– математичне моделювання.

БУРДА Роман Вадимович – асистент кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– методи оптимізації;
– комп'ютерне моделювання.

МАТУЩЕНКО Сергій Сергійович – магістрант кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– екстремальні задачі;
– комп'ютерне моделювання.

Подано 19.01.2009

Яремчук С.И., Бурда Р.В., Матущенко С.С. Комбінований метод розв’язання дискретної мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля

Яремчук С.И., Бурда Р.В., Матущенко С.С. Комбинированый метод решения дискретной минимаксной задачи размещения источников физического поля

Yaremchuk S.I., Burda R.V., Matuschenko S.S. Combined method of decision of discrete minimax task of placing of sources of the physical field

УДК 519.67

Комбинированый метод решения дискретной минимаксной задачи размещения источников физического поля/ С.И. Яремчук, Р.В. Бурда, С.С. Матущенко

Разработан алгоритм решения дискретной минимаксной задачи размещения источников физического поля. Предлагается стратегия решения, которая основывается на этом алгоритме и методе вектора спада. Показано, что точка, полученная после применения комбинированого метода, будет точкой локального минимума

УДК 519.67

Combined method of decision of discrete minimax task of placing of sources of the physical field/ S.I. Yaremchuk, R.V. Burda, S.S. Matuschenko

The algorithm of solution minimax discrete tasks placement sources of physical fields is developed. A strategy of decision is proposed, which is based on this algorithm and the method of vector of decaying. We show that point, obtained after combining method, will point the local minimum.