УДК 681.3

А.Ю. Левченко, аспір.
Житомирський державний технологічний університет

ДЕКОМПОЗИЦІЯ МНОЖИНИ ПРИПУСТИМИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ГАМІЛЬТОНОВОЇ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА НА ПІДМНОЖИНИ, ЯКІ НЕ ПЕРЕСІКАЮТЬСЯ

(Представлено д.т.н., проф. Панішевим А.В.)

У даній статті описані декілька класів перестановок, які не пересікаються, пропонується схема розгалуження дерева розв'язків та узагальнений алгоритм метода гілок та меж для пошуку оптимумів гамільтонової задачі комівояжера, які належать цим класам.

Вступ. Розв'язання оптимізаційних задач є невід'ємною частиною сучасних техніки, економіки, управління. Зростання обсягів інформації, яка обробляється, висуває високі вимоги до продуктивності обчислювальних систем, що не відповідають темпам розвитку апаратного забезпечення. Виходом з такої ситуації може бути вдосконалення існуючої алгоритмічної бази, або розробка нової.

Розглянемо гамільтонову задачу комівояжера (ГЗК). Формулюється вона так. У зв'язному зваженому графі $H=(U,V)$ потрібно знайти цикл мінімальної вартості, який проходить по кожній вершині $u \in U$ чітко один раз, або переконатися в тому, що його не існує.

Алгоритмічні властивості цієї задачі такі, що єдиним способом пошуку її розв'язку є організований повний перебір. Найбільш очевидними способами підвищення його ефективності можна вважати різноманітні методи скорочення перебору та розпаралелювання на декількох процесорах (ЕОМ). Простір допустимих розв'язків ГЗК можна представити у вигляді множини перестановок. За будь-якими ознаками можна розбити її на підмножини. Для кожної з цих підмножин можна сконструювати метод скорочення перебору, типу гілок та меж, і виконати їх на паралельних процесорах. Орієнтуючись на властивості знайдених підмножин, можна ефективно організувати дерево розв'язків, скоротити його зростання в ширину, оптимізувати та прискорити хід розв'язку. З набору знайдених локальних оптимумів слід вибрати такий, що має мінімальне значення. Чим більша область простору розв'язків буде описана у вигляді класів, що не перетинаються, тим точніше буде знайдено розв'язок.

Модифікація метода гілок та меж, що доставляє оптимум на множині пірамідальних перестановок (ПП), описана в [1].

Дана стаття присвячена опису декількох нових класів перестановок, які не пересікаються між собою, та їх властивостей у рамках вищезгаданого підходу.

Класи перестановок

Пірамідальні перестановки. Якщо елементи перестановки $p=(p[1],p[2],...,p[n])$, які представлені у вигляді ребер $(i,p[i])$, $i=\overline{1,n}$ утворюють гамільтоновий цикл у графі з n вершин, то домовимось називати її циклічною (ЦП). Очевидно, що в цьому випадку множиною припустимих розв'язків для ГЗК є множина усіх циклічних перестановок.

Назвемо перестановку $p=(p[1],p[2],...,p[l-1],p[l],p[l+1],...,p[n])$ пірамідальною (ПП), якщо вона задовольняє умову:

$$p[1]<...<p[l-1],\ p[l+1]>...>p[n],\ p[l]=n. \quad (1)$$

Загальна кількість ПП розмірності n становить 2^{n-1}.

Необхідною умовою належності ПП до циклічних (ЦПП) є:

$$\begin{cases} p[n]=1; \\ p[l]=n,\ l=\overline{2,n-1}; \\ p[i]\neq i,\ i=\overline{1,n}. \end{cases} \quad (2)$$

Організуємо дерево розв'язків методу гілок та меж так, щоб отримані в процесі виконання алгоритму оптимуми належали області ЦПП, враховуючи умову (2).

Нехай вузол дерева, що має ознаку P_{ij}, означає, що ребро (i,j) входить до шуканого гамільтонового циклу і відповідає елементу перестановки $p[i]=j$. Коренем дерева розв'язків зручно вважати вершину P_{n1}, оскільки всі ЦПП мають цю ознаку. До неї приєднуються дочірні вершини $P_{n1}\cap P_{ln}$, $l=\overline{2,n-1}$, кожна з яких відповідає можливому положенню максимального елемента $p_{max}=n$ в ПП. Відповідно до (1) $p'=n-1$ може знаходитись на сусідній позиції з p_{max}, справа або зліва. Аналогічно $p''=n-2$ може находитись справа або зліва від $\{p_{max},p'\}$ тощо, доки пірамідальна перестановка не буде побудована повністю. Ця особливість використовується при організації дерева, яке показано на рис. 1.

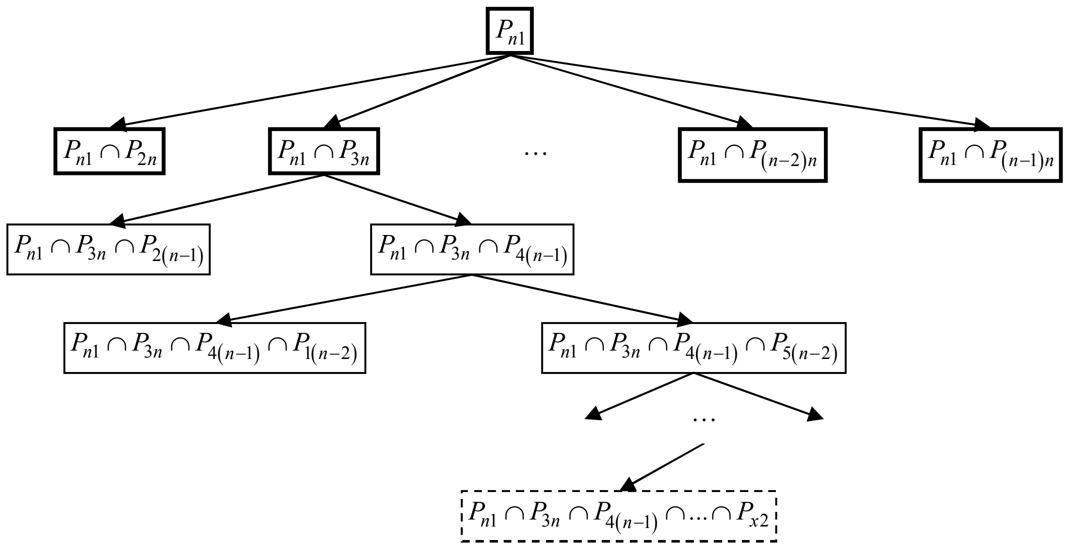

Рис. 1. Організація дерева розв'язків модифікації метода гілок та меж для ПП. Вершини, що обов'язково будуються, виділені жирним. Пунктиром виділена вершина, яка містить n ознак та відповідає повній ЦПП, $x \in \{1,2,3,...,n-1\}$

Умова (2) є необхідною, але не достатньою, оскільки, окрім всіх ЦПП, їй відповідають деякі ПП, які не є циклічними. Тому необхідно перевіряти, чи не містить розбиття на цикли перестановка, яка відповідає вершині, яка додається, контурів менших за n. Висяча вершина дерева з n ознаками відповідає повністю побудованій ЦПП – гамільтоновому циклу в початковому графі. Якщо вважати кореневу вершину нульовим рівнем, то, починаючи з рівня 2, дерево є бінарним. Кількість вузлів дерева на рівні 1: $n-3$.

Яружні перестановки. Якщо перестановка виду $q = \left(q[1], q[2], ..., q[l-1], q[l], q[l+1], ..., q[n]\right)$ задовольняє умову:

$$q[1] > q[2] > ... > q[l-1],\ q[l+1] < q[l+2] < ... < q[n],\ q[l] = 1, \qquad (3)$$

то вона називається яружною (ЯП).

Загальна кількість ЯП становить 2^{n-1}, а область їх пересічення з ПП містить в собі дві перестановки: $Q = \left\{(1,2,...,n), (n, n-1,...,1)\right\}$. Для кожної яружної перестановки q існує однозначна відповідність з однією пірамідальною перестановкою p і навпаки:

$$q[i] = (n+1) - p[i],$$
$$p[i] = (n+1) - p[i],\ i = \overline{1,n}.$$

На кожну циклічну яружну перестановку q накладена система необхідних умов:

$$\begin{cases} q[i] \neq i, i = \overline{1,n}; \\ q[1] = n; \\ q[n] \neq 1; \\ q[k] = 1, k = \overline{2,n-1}. \end{cases} \qquad (4)$$

Зважаючи на те, що перестановки з області Q не задовольняють (4), можна стверджувати, що ЦПП не перетинаються з циклічними яружними перестановками (ЦЯП).

Коренем дерева розв'язків для пошуку оптимуму на множині ЦЯП зручно вважати вершину з ознакою P_{1n}, до якої приєднуються дочірні вершини $P_{1n} \cap P_{k1}$, $k = \overline{2,n-1}$. Визначившись із положенням елемента $p_{min} = 1$, доставляємо за зростанням елементи на сусідні позиції в перестановці справа і зліва від нього.

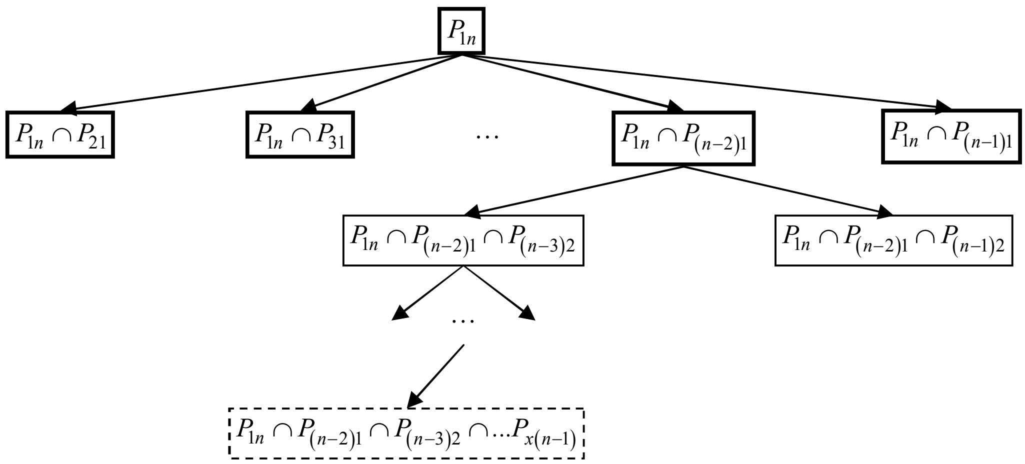

Рис. 2. Організація дерева розв'язків для яружних перестановок. Жирним виділені вершини, що завжди містяться у дереві, пунктиром – висяча вершина, яка відповідає повній ЦЯП

Починаючи з рівня 2, дерево розв'язків є бінарним. Розбиття на цикли перестановок, яке відповідає його вершинам, не повинно містити контурів, менших за n.

Двопікові перестановки. Якщо в перестановці r розмірності n елемент $r[n-1]=n$, $r[i]=n-1$, $i=\overline{1,n}$, $i \neq n-1$, а решта вільних позицій заповнені елементами довільної ПП розмірності $n-2$ у порядку їх наступності, то таку перестановку назвемо двопіковою (ДП). Крім того, ДП повинна відповідати умові:

$$\begin{cases} r[n-2] \neq n-1, r[n-3] \neq n-2, \text{ або} \\ r[n] \neq n-1, r[n-2] \neq n-2, \text{ або} \\ r[n] \neq n-2, r[n-2] \neq n-1. \end{cases} \quad (5)$$

Двопікові перестановки не перетинаються з пірамідальними. Нехай є ДП r. Запишемо її у вигляді двох частин так, щоб вона задовольняла визначення ПП: $r[1]<...<r[i]<...<r[n-3]$, $i=\overline{2,n-4}$, і $r[n-3]<r[n-2]<(r[n-1]=n)>r[n]$. Підставимо у другу частину r всі можливі, з точки зору визначення ДП, значення елементів так, щоб вона не заперечувала попередньому запису: $\{n-2,n-1,n,\lambda\}$, $\{\lambda,n-2,n,n-1\}$, $\{\lambda,n-1,n,n-2\}$, де $\lambda \in \{1,2,...,n-3\}$, але всі ці випадки не задовольняють (5).

Множина двопікових перестановок не перетинається з яружними. Відповідно до визначення ЯП $r[n-2]<(r[n-1]=n)<r[n]$, але в перестановці елементів множини $\overline{1,n}$ не існує елемента, більшого за n.

Загальна кількість ДП розмірності n становить $(n-1)2^{n-3}$, де 2^{n-3} – загальна кількість ПП розмірності $n-2$, а $n-1$ – кількість можливих положень для елемента $n-1$.

Розглянемо циклічну двопікову перестановку $r=(...,r[i],...,r[j],r[n])$, $r[i]=n-1$, $r[j]=n$, $j=n-1$, $i=\overline{1,n}$, $i \neq j$ і можливі позиції елемента $x=1$ в ній:

1. $x=r[1]$, тобто перестановка має вигляд: $r=\{1,...,...\}$. Породжується вставкою елемента $n-1$ в ПП $r'=\{1,2,...,n-2\}$ на позиції $\overline{2,n-2}$. Ця ДП не є циклічною через петлю (1,1);
2. $x=r[2]$, тобто перестановка $r=\{n-1,1,...,...\}$ породжується від $r'=\{1,...,...\}$ вставкою $r[1]=n-1$;
3. $x \neq r[k]$, $k=\overline{3,n-3}$, тобто елемент x не може знаходитись на вказаних позиціях, оскільки для цього необхідно, щоб у пірамідальної перестановки, яка її породжує, елемент $r'[l]=1$, $l \in \{2,3,...,n-4\}$, але тоді вона не є ПП, що не відповідає визначенню ДП;
4. $x \neq r[n-2]$, тобто x не може знаходитись на цій позиції, оскільки за визначенням ДП $p[n-2]=n$;
5. $x=r[n]$, тобто $p=\{...,...,n,1\}$. Це можливо, якщо дана ДП породжена від ПП $r'=\{...,...,1\}$.

Отже циклічна двопікова перестановка r за визначенням може містить елемент $x=1$ тільки при: $r[n]=1$, або $r[2]=1$ і $r[1]=n-1$.

ЦДП, яка задовольняє другий випадок, може бути представлена у вигляді досконалого паросполучення $\pi=\pi_0\cup\{(x_1,y_1),...,(x_m,y_m)\}$, $m=n-3$ у повному дводольному графі $G=(X,Y,E)$, X, $Y=\{1,2,...,n\}$, $\pi_0=\{(1,n-1),(2,1),(n-1,n)\}$. Для даного паросполучення діють додаткові обмеження:

1. $x_i\neq y_i$, $\{x_i,y_i\}\in\pi$, $i=\overline{1,n}$;
2. r' – ПП, $p'[x_1]=y_1$, …, $r'[x_m]=y_m$, $\{x,y\}\in\{\pi\setminus\pi_0\}$;
3. граф $G'=(X,E')$, $E'=\{\pi\}$ повинен бути гамільтоновим циклом.

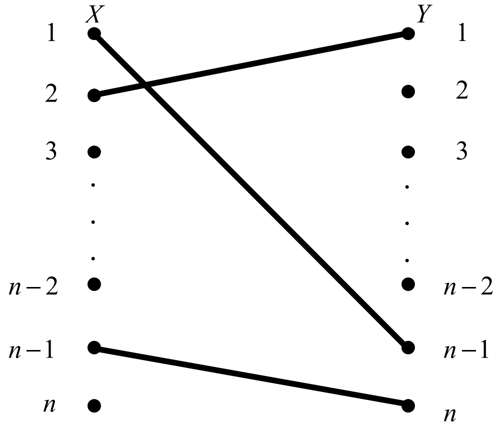

Рис. 3. Граф G з початковим паросполученням π_0

Відповідно до визначення ПП для $x=2$ припустима одна пара з двох можливих: $(2,3)$ або $(2,n)$. Ребро $(2,n)$ утворює цикл $(1,n-1,n,2,1)$ з існуючими ребрами в графі G' і тому відкидається.

Аналогічно для $x=3$ припустимі пари $(3,4)$ і $(3,n)$, з яких $(3,n)$ виключається, оскільки утворює цикл, який не проходить по всіх вершинах графа G' із уже відібраними парами.

Повторимо процедуру до $x=n-2$ включно: $(n-3,n-2)$ задовольняє усі умови, $(n-3,n)$ відкидається.

Для $x=n-2$ пара $(n-2,n-1)$ відкидається, оскільки вершина $y=n-1$ уже насичена, пара $(n-2,n)$ приймається, оскільки утворює з рештою прийнятих пар гамільтоновий цикл в графі G'. Звідси існує лише одна ДЦП з $p[2]=1$: $p=(n-1,1,2,3,...,n-3,n,n-2)$.

Як висновок: циклічні двопікові перестановки (ЦДП) завжди містять елемент $r[n]=1$, або це ЦДП виду $r=(n-1,1,2,3,...,n-3,n,n-2)$.

Кореневою вершиною для ЦДП зручно вважати $P_{(n-1)n}$, оскільки цією властивістю володіє кожна двопікова перестановка за визначенням. Вона є батьківською для $P_{(n-1)n}\cap P_{n1}$ та $P_{(n-1)n}\cap P_{21}\cap P_{32}\cap...\cap P_{(n-2)(n-3)}\cap P_{1(n-1)}\cap P_{n(n-2)}$. Остання вершина містить у собі допустимий розв'язок ГЗК. Від $P_{(n-1)n}\cap P_{n1}$ відгалужуються $P_{(n-1)n}\cap P_{n1}\cap P_{i(n-1)}$, $i=\overline{2,n-2}$, які визначають положення елемента $n-1$ у перестановці. Кожна з них породжує вершини $P_{(n-1)n}\cap P_{n1}\cap P_{i(n-1)}\cap P_{j(n-2)}$, $j=\overline{1,n-2}$, $j\neq i$.

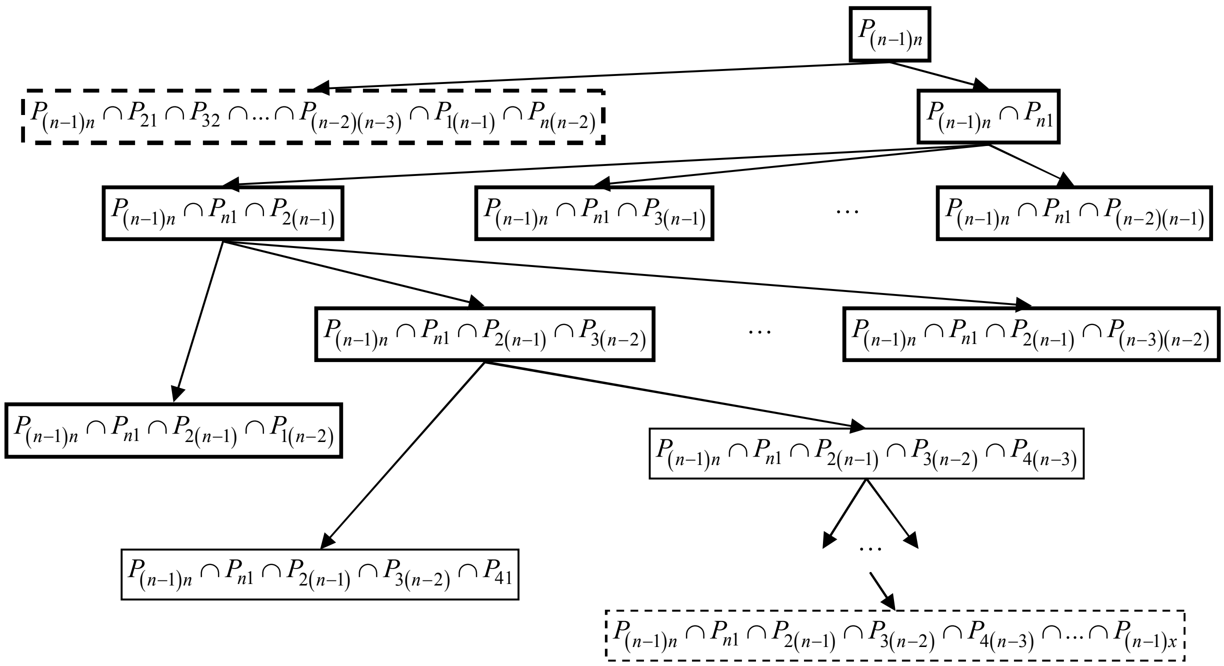

Рис. 4. Організація дерева розв'язків для ДП. Пунктиром показані вершини, що містять можливі розв'язки, жирним – вершини, які будуються обов'язково

Кількість вершин дерева на рівні 3: $(n-3)+1$, на рівні 4: $(n-3)(n-4)+1$. Починаючи з рівня 5, дерево є бінарним.

Двопікові2 перестановки. Двопікова2 перестановка (ДП2) s будується аналогічно ДП. $s[n-2]=n$, $s[i]=n-1$, $i=\overline{1,n}$, $i \neq n-2$. Вільні позиції заповнюються елементами пірамідальної перестановки розмірністю $n-2$. Крім того, ДП2 повинна задовольняти умову:

$$\begin{cases} s[n-1] \neq n-1, s[n] \neq n-2, \text{ або} \\ s[n-3] \neq n-1, s[n-4] \neq n-2, \text{ або} \\ s[n-3] \neq n-1, s[n-1] \neq n-2, \text{ або} \\ s[n-1] \neq n-1, s[n-3] \neq n-2. \end{cases} \tag{6}$$

Двопікові2 перестановки не перетинаються з пірамідальними. Нехай є двопікова2 перестановка s розмірності n, яка утворена з ПП s', $|s'|=n-2$. s є пірамідальною при $s[n-3]=n-1$, або $s[n-1]=n-1$. За визначенням ДП2 утворюється додаванням елементів ПП s' на вільні позиції в s, які залишились. Можливі позиції елемента $n-2$, при яких q залишається пірамідальною, показані нижче:

$$s = (\; ... \; , \; ... \; , n-1, n, n-2, \; ... \;),$$
$$s = (\; ... \; , n-2, n-1, n, \; ... \; , \; ... \;),$$
$$s = (\; ... \; , \; ... \; , \; ... \; , n, n-1, n-2),$$
$$s = (\; ... \; , \; ... \; , n-2, n, n-1, \; ... \;).$$

Всі ці випадки виключаються умовою (6).

ДП2 не перетинаються з яружними. Відповідно до визначення ЯП $(s[n-2]=n) < \; < s[n-1] < s[n]$, але в s не може бути елемента, більшого за n.

ДП2 не перетинається з ДП. За визначенням у ДП2 $s[n-2]=n$, а у ДП $s[n-1]=n$, отже ці множини не перетинаються □.

За аналогією із двопіковими, загальна кількість ДП2 становить $(n-1)2^{n-3}$.

Характерною властивістю циклічних двопікових2 перестановок є положення елемента $s[n-2]=n$ за визначенням цього класу. Припустимі положення $s[i]=1$ також можуть вважатися характерними властивостями цього класу, і визначаються наступним. ЦДП2 s утворюється з ПП s' розмірності $n-2$, в якій $s'[j]=1$ при $j \in \{1,n-2\}$. При цьому можливі такі комбінаторні конфігурації:

1. якщо $s'=\{1,...,...\}$, а $s=\{...,...,n,...,...\}$, то результуюча перестановка має вигляд: $s=\{1,...,...,n,...,...\}$, вона не є циклічною через петлю $(s[1],s[1])$;
2. якщо $s'=\{1,...,...,...\}$, а $s=\{n-1,...,...,n,...,...\}$, то результуюча перестановка має вигляд: $s=\{n-1,1,...,...,n,...,...\}$;
3. якщо $s'=\{...,...,1\}$, а $s=\{...,...,n,...,n-1\}$, то результуюча перестановка: $s=\{...,...,n,1,n-1\}$;
4. якщо $s'=\{...,...,1\}$, а $s=\{...,...,n,...,...\}$, то результуюча перестановка: $s=\{...,n,...,1\}$.

Звідси в циклічній двопіковій2 перестановці $s[i]=1$ при $i \in \{2,n-1,n\}$. Також з попередніх викладок видно, що при $s[2]=1$ $s[1]=n-1$, при $s[n-1]=1$ $s[n]=n-1$, а при $s[n]=1$ $s[k]=n-1$, $k=\overline{1,n-1}$, $k \neq n-2$.

Для ЦДП2 коренем дерева зручно вважати вершину $P_{(n-2)n}$. До неї додаються дочірні вершини $P_{(n-2)n} \cap P_{21} \cap P_{n(n-1)}$ і $P_{(n-2)n} \cap P_{(n-1)1} \cap P_{n(n-1)}$, кожна з яких породжує вершини з додатковою ознакою $P_{i(n-2)}$, $i=\overline{2,n}$. Крім того, до кореня дерева приєднується вершина $P_{(n-2)n} \cap P_{n1}$, яка має потомків $\{P_{(n-2)n} \cap P_{n1} \cap P_{1(n-1)}$, $P_{(n-2)n} \cap P_{n1} \cap P_{2(n-1)}$, …, $P_{(n-2)2} \cap P_{n1} \cap P_{(n-3)(n-1)}\}$, кожен з яких є батьківським для вершин із додатковою ознакою $P_{j(n-2)}$, $j=\overline{1,n-1}$.

В результаті, всі висячі вершини дерева розв'язків містять по 4 ознаки. Далі дерево будується, як бінарне.

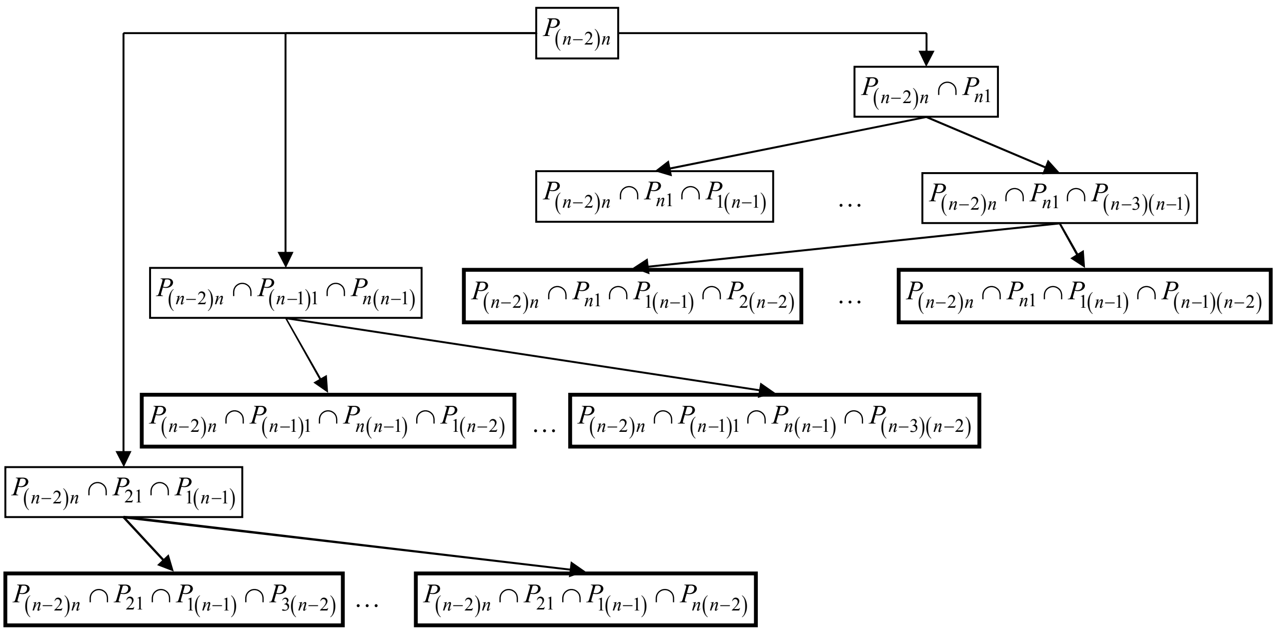

Рис. 5. Організація дерева розв'язків для двохпікових2 перестановок. Всі висячі вершини, які виділені жирним, є коренями для бінарних піддерев і будуються обов'язково

Кількість вершин на рівні 1 становить 3, на рівні 2 – $3(n-3)$, на рівні 3 – $(n-2)(n-3)$.

Модифікації метода гілок та меж для пошуку локальних оптимумів ГЗК.

Організація бінарних піддерев. Кожне дерево містить набір вершин, які повинні бути побудовані обов'язково. Отримані висячі вершини є коренями для бінарних піддерев. Розглянемо зручний спосіб визначення ознак для вершин, які входять у склад цих піддерев.

Нехай деякій висячій вершині відповідає набір ознак $\{P_{pq}\}$. Тоді припустимо, що d' – матриця ваг графа, яка отримана з вихідної матриці $\left[d_{ij}\right]_n$ шляхом викреслювання p-х рядків і q-х стовпців для кожної ознаки з цього набору. Нехай останнім за рахунком у наборі йде ознака P_{ij}. Тоді додатковими ознаками для пари нових вершин повинні бути $P_{k_1 l}$ і $P_{k_2 l}$; тут k_1, k_2 – номери найближчих невикреслених рядків у матриці d', які знаходяться вище і нижче рядка; i, l – номер стовпця, який йде перед (для яружних перестановок – після) стовпця j. Назвемо рядок i та стовпець j поточними.

Можливі випадки, коли всі рядки, вище або нижче поточного, викреслені. Тоді частина задачі, що залишилась, розв'язується за лінійний час. Для цього слід, починаючи з поточного рядка і стовпця, побудувати діагональ по невикреслених елементах матриці d' і додати до поточної вершини ознаки, які відповідають цим елементам. У результаті буде отримана вершина з n ознаками, до якої ставиться у відповідність перестановка. Якщо розбиття на цикли цієї перестановки не містить контурів, менших n, то отриманий розв'язок є припустимим.

Нижня межа для модифікованого метода гілок та меж.

Для вершини $\ldots \cap P_{pq} \cap \ldots \cap P_{ij}$ нижня межа розраховується так:

$$\gamma_{ij} = \alpha + \sum_{\forall j : j \in M} \min_{k \in L} d_{kj} , \tag{7}$$

де L – множина номерів рядків матриці ваг графа, що відповідає даній вершині, які не викреслені; M – множина стовпців тої ж матриці, які не викреслені, α – сума ваг елементів матриці $\left[d_{ij}\right]_n$, які відповідають ознакам вершини, що розглядається.

Узагальнений модифікований алгоритм гілок та меж, який доставляє оптимум на класах перестановок, що описані вище.

Аналізуючи способи побудови дерев для класів перестановок, що описані вище, можна сформулювати узагальнений алгоритм метода гілок та меж для пошуку оптимуму в межах цих класів.

S0. $H = (U, V)$ – зважений граф, $d = \left[d_{ij}\right]_n$ – симетрична матриця ваг графа H, в якій $d_{ij} \in R_0^+$, якщо $\{i, j\} \in U$ і $d_{ij} = \infty$, інакше $i \neq j$, R_0^+ – множина дійсних невід'ємних чисел, $d_{ii} = \infty$, $i = \overline{1, n}$;

S1. побудувати обов'язкові вершини для обраного класу перестановок, розрахувати оцінку для них за формулою (7);

S2. знайти серед висячих вершин дерева вершину з мінімальною оцінкою;

якщо знайдена вершина має оцінку ∞, то розв'язку не існує;

S3. Якщо у матриці, яка відповідає обраній вершині всі рядки вище або нижче поточної викреслені, то додати до неї ознаки елементів, які лежать на діагоналі, розрахувати оцінку для цієї вершини;

Якщо вершина була додана, то перейти до S5;

S4. Додати пару вершин, які відповідають рядкам вище і нижче поточної і стовпцю, попередньому за (для ЯП наступному) поточному. Розрахувати оцінку для цих вершин.

S5. Зайти серед висячих вершин дерева вершину з мінімальною оцінкою;

якщо знайдена вершина має оцінку ∞, то розв'язку не існує;

якщо знайдено декілька вершин з однаковою оцінкою, то обрати вершину з найбільшою кількістю ознак;

якщо знайдена вершина містить n ознак, то перейти до S6;

перейти до S3;

S6. Розв'язок знайдено, перестановка мінімальної вартості, яка належить до обраного класу і відповідає гамільтоновому циклу у вхідному графі, побудована.

Висновок. У даній роботі розглянуто і описано властивості таких класів перестановок: пірамідальних, яружних, двопікових, двопікових2. Серед них у сучасній літературі згадуються тільки пірамідальні [2, 3, 4].

Сформульовано узагальнену модифікацію методу гілок та меж, яка доставляє оптимум на розглянутих класах перестановок.

При аналізі запропонованої структури дерев може виникнути думка, що вони досить швидко розростаються у ширину і перевага від їх використання сумнівна порівняно зі стандартним бінарним деревом метода гілок та меж. Але слід врахувати, що на практиці ГЗК часто розв'язується на розріджених графах, а відсутність хоча б одного ребра може виключити досить масивну гілку спеціалізованого дерева.

Особливий практичний інтерес являє розв'язок задач класу комівояжера, які задані матрицями ваг з великою кількістю однакових елементів, наприклад при трасуванні цифрових схем. В цьому випадку велика кількість вершин дерева розв'язків буде мати однакову оцінку, яка розрахована за формулою (7), незалежно від рівня. Алгоритм, який запропоновано проводить розгалуження саме від вершини з найбільшою кількістю ознак, яка найближча до кінцевого розв'язку. Тобто підвищення кількості однакових елементів у матриці ваг не впливатиме на зростання кількості вузлів дерева розв'язків.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Левченко А.Ю., Панішев А.В.* Модифікація метода гілок та границь для пошуку розв’язків на підмножині циклічних пірамідальних перестановок // Вісник ХНТУ. – 2008. – № 1(30). – С. 52–61.
2. *Panishev A.V. Plechistyy D.D.* An effective exact algorithm for one particular case of the traveling salesman problem // International Journal “Information Theories & Applications”. – 2003. – Vol. 10. – P. 355–359.
3. *Axsaeter S.* On scheduling in semi-ordered flow shop without intermediate queues // AIIE Trans. – 1982. – Vol. 14. № 2. – P. 128–130.
4. *Танаев В.С., Сотсков Ю.Н., Струсевич В.А.* Теория расписаний. Многостадийные системы. – М.: Наука, 1989. – 328 с.

ЛЕВЧЕНКО Антон Юрійович – аспірант Житомирського державного технологічного університету.
Наукові інтереси:
- комп’ютерно-інформаційні технології;
- комбінаторна оптимізація.

Подано 12.12.2008

Левченко А.Ю. Декомпозиція множини припустимих розв'язків гамільтонової задачі комівояжера на підмножини, які не пересікаються

Левченко А.Ю. Декомпозиция множества допустимых решений гамильтоновой задачи коммивояжера на непересекающиеся подмножества

Levchenko A.Yu. Decomposition of plural of approved solutions of Hamilton Commercial Traveler Task to non-crossing sub-plurals

УДК 681.3

Декомпозиция множества допустимых решений гамильтоновой задачи коммивояжера на непересекающиеся подмножества / А.Ю. Левченко

В данной статье описаны несколько не пересекающихся классов перестановок, предлагается схема ветвления дерева решений и обобщенный алгоритм метода ветвей и границ для поиска оптимумов гамильтоновой задачи коммивояжера, которые принадлежат этим классам.

УДК 681.3

Decomposition of plural of approved solutions of Hamilton Commercial Traveler Task to non-crossing sub-plurals / A.Yu. Levchenko

The article describes several non-crossing classes of permutations. Also it offers a scheme of branching of the decision tree and a common algorithm of branches and bounds method, for searching optimums of Hamilton commercial traveler task, which belong to the classes mentioned.