УДК 629.7.054

О.А. Кладун, аспір.
Національний технічний університет України "КПІ"

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ПІДВІСУ ПОПЛАВКОВОГО ГІРОСКОПА ЗА НАТУРНИХ УМОВ

(Представлено д.т.н., проф. Безвесільною О.М.)

Будується розрахункова модель пружної взаємодії проникаючого акустичного випромінювання розгінних блоків ракет-носіїв з рухомою частиною гіроскопа за наявності хитавиці фюзеляжу. Розглядається випадок, коли звукова хвиля проникає на прилад крізь щілину.

Постановка поблеми. За натурних умов, особливо під час старту, з боку розгінних блоків ракет-носіїв має місце потужне акустичне випромінювання, структура якого значно ускладнюється реверберaційними ефектами. Проходячи під фюзеляж, звукові хвилі певним чином здійснюють вплив на прилади і системи інерціальної навігації [1, 2]. За наявності хитавиці РН виникають додаткові збурюючі чинники, що сприймаються приладом як "хибний" вхідний сигнал і призводять до появи похибки вимірювань. Таким чином, постає необхідність аналізу збуреного руху поверхні поплавця гіроскопа за натурних умов.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вивчення явища пружної взаємодії поверхні підвісу гіроскопа налічує невелику кількість часу. Разом з тим, проведені експерементальні дослідження приладів на експерементальних стендах [3], відпрацьована методика аналізу характеристик [4], побудовані розрахункові моделі для чисельного та якісного визначення похибки гіроскопа [5], узагальнені деякі питання експлуатації та проектування [6], відпрацьовані питання звукоізоляції [7].

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Ставлячи перед собою завдання аналізу природи пружної взаємодії механічної системи підвісу з акустичним випромінюванням, розглядалася модель у вигляді падаючої на поплавець плоскої хвилі тиску. Зосталася нерозкритою картина появи цієї хвилі у міжциліндровому просторі.

Являє нагальний інтерес вивчення такої дії, коли акустичні хвилі надходять до приладу крізь визначену шпарину, зовнішній циліндр пружний, внутрішній – абсолютно твердий і з'єднаний із зовнішнім пружною в'яззю.

Метою роботи є визначення закономірностей вимушених пружних переміщень точки з'єднання пружної в'язі, які призводять до нелінійних коливань внутрішнього циліндра – поплавця.

Основний матеріал досліджень. Технічна реалізація серійно виготовляємого промисловістю двостепеневого поплавкового гіроскопа має вигляд двох коаксіальних циліндрів, між котрими знаходиться важка рідина. У внутрішньому розташований власне гіроагрегат.

Будуючи розрахункову модель явища, вважаємо поплавець (внутрішній циліндр) за абсолютно тверду нескінчену оболонку. Зовнішній циліндр (корпус) приймемо за пружну оболонку, на котру з боку щілини довжиною $2L$ діє проникаюче акустичне випромінювання (рис. 1). Циліндри з'єднані пружною в'яззю з коефіцієнтом c_1.

Рівняння пружної зовнішньої оболонки за нормального падіння звукової хвилі такі [1]:

$$\omega^2 \rho V + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} + \frac{1-\sigma}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0\,;$$

$$\left(\omega^2 \rho + 1\right) W + \frac{\partial V}{\partial \beta} + c^2\left(\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 W}{\partial \beta^4} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 W}{\partial \beta^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial x^4}\right) = f(x, x_0, \beta, t)\delta\left(x - x_0\right) + \qquad (1)$$

$$+ P(x, \beta, r, t) \overset{def}{=} F(x, x_0, \beta, t)\,,$$

де V,W – відповідно тангенціальні та радіальні переміщення поверхні під дією звукової хвилі; $-\infty < x < +\infty$; $0 \le \beta \le 2\pi$; всі коефіцієнти сталі за величиною.

Носієм функції $F\left(x_0, x, \beta, t\right)$ постає сегмент $-L \le x \le L$, звідкіля походить, що $-L < x < L$, а $F\left(x_0, x, \beta, t\right) = 0$. $|x| > L$.

Отже слід визначити розв'язання $\{V, W\}$, яке обмежене за $x \to \pm\infty$. Разом з тим, являє інтерес і більш вузька задача – знаходження розв'язків $\{V, W\}$, корті обертаються в нулі за $x \to \pm\infty$ разом із усіма похідними.

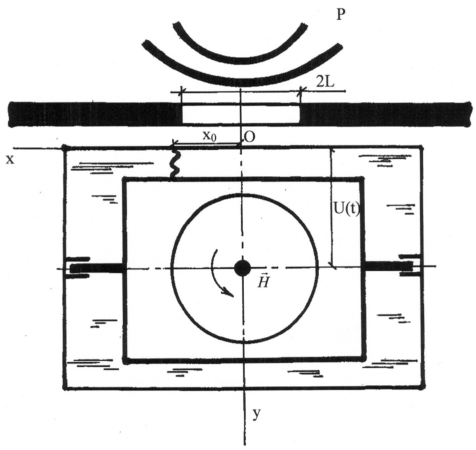

Рис. 1. Дифракція акустичної хвилі на щілині довжиною $2L$

Наведемо задану функцію $F(x_0, x, \beta, t)$, а також шукані функції $V(x_0, x, \beta, t)$, $W(x_0, x, \beta, t)$ у формі тригонометричних рядів Фур'є за змінною β $(0 \le \beta \le 2\pi)$ [8, 9]:

$$F(x, x_0, \beta, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m(x) \exp(im\beta);$$

$$V(x, x_0, \beta, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} V_m(x) \exp(im\beta); \tag{2}$$

$$W(x, x_0, \beta, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} W_m(x) \exp(im\beta).$$

Коефіцієнти Фур'є цих рівнянь (їх комплексні амплітуди) залежать також від інших параметрів системи (1). Але, з метою уникнення громіздкості запису, це не знайшло відображення в позначеннях.

Підстановка співвідношень (2) в рівняння (1) приводить до системи двох звичайних диференіальних рівнянь відносно змінних $V_m(x)$ та $W_m(x)$:

$$\left(\omega^2\rho - m^2\right)V_m(x) + \frac{1-\sigma}{2}V_m''(x) + imW_m(x) = 0;$$

$$imV_m(x) + \left(\omega^2\rho + 1 + \frac{c^2m^4}{r^4}\right)W_m(x) - \frac{2c^2m^2}{r^2}W_m''(x) + c^2W_m^{IV}(x) = F_m(x), \tag{3}$$

$m = 0, \pm1, \pm2, ...$

Якщо $m = 0$, то система (3) розпадається на два незалежних рівняння:

$$\frac{1-\sigma}{2}V_0''(x) + \omega^2\rho V_0(x) = 0;$$

$$c^2W_0^{IV} + \left(\omega^2\rho + 1\right)W_0(x) = F_0(x).$$

Наведемо позначення:

$$\frac{2\omega^2\rho}{1-\sigma} = \lambda^2; \quad \frac{\omega^2\rho + 1}{c^2} = 4\mu^4. \tag{4}$$

Тоді

$$V_0''(x) + \lambda^2V_0(x) = 0;$$

$$W_0^{IV}(x) + 4\mu^4W_0(x) = c^{-2}F_0(x) \tag{5}$$

і розв'язок першого з рівнянь цієї системи буде мати вигляд:

$$V_0(x) = A_0\cos(\lambda x) + B_0\sin(\lambda x), \tag{6}$$

тобто обмежені за всіх значень $x \to \pm\infty$.

Якщо поставити задачу $V_0(x) \to 0$, то отримаємо:

$$A_0 = B_0 = 0 \text{ і } V_0(x) \equiv 0.$$

Щоб виділити який-небудь інший єдиний розв'язок достатньо задати значення функцій $V_0(x')$ та $V_0'(x')$ в якій-небудь точці x' осі $-\infty < x < +\infty$.

Загальний розв'язок другого рівняння системи (5) запишемо за значеннями коренів його характеристичного рівняння:

$$k^4 + 4\mu^4 = 0\,. \tag{7}$$

Тоді

$$k_{1,2} = \mu(1 \pm i); \;\; k_{3,4} = -\mu(1 \mp i) \tag{8}$$

і

$$W_{01}(x) = \exp(\mu x)\left(a_1 \cos \mu x + a_2 \sin \mu x\right) + \exp(-\mu x)\left(a_3 \cos \mu x + a_4 \sin \mu x\right). \tag{9}$$

Розв'язок однорідного рівняння:

$$W_0^{IV}(x) + 4\mu^4 W_0(x) = 0$$

позначимо через $g(x)$ і будемо шукати реакцію динамічної системи на одиничний імпульс при таких початкових умовах:

$$g(0) = g'(0) = g''(0) = 0\,,\;\; g'''(0) = 1\,. \tag{10}$$

Для зручності розв'язок запишемо в комплексній формі:

$$g(x) = C_1 \exp(k_1 x) + C_2 \exp(k_2 x) + C_3 \exp(k_3 x) + C_4 \exp(k_4 x), \tag{11}$$

що призводить до такої системи чотирьох лінійних рівнянь відносно постійних C_i:

$$\begin{aligned} &C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0\,; \\ &k_1 C_1 + k_2 C_2 + k_3 C_3 + k_4 C_4 = 0\,; \\ &k_1^2 C_1 + k_2^2 C_2 + k_3^2 C_3 + k_4^2 C_4 = 0\,; \\ &k_1^3 C_1 + k_2^3 C_2 + k_3^3 C_3 + k_4^3 C_4 = 1\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Головний визначник системи (визначник Вандермонда) має вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 & k_4^2 \\ k_1^3 & k_2^3 & k_3^3 & k_4^3 \end{vmatrix} = (k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_4 - k_1)(k_3 - k_2)(k_4 - k_2)(k_4 - k_3)\cdot$$

Тоді часткові визначники запишуться у вигляді:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k_2 & k_3 & k_4 \\ 0 & k_2^2 & k_3^2 & k_4^2 \\ 1 & k_2^3 & k_3^3 & k_4^3 \end{vmatrix} = -(k_3 - k_2)(k_4 - k_2)(k_4 - k_3);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ k_1 & 0 & k_3 & k_4 \\ k_1^2 & 0 & k_3^2 & k_4^2 \\ k_1^3 & 1 & k_3^3 & k_4^3 \end{vmatrix} = (k_3 - k_1)(k_4 - k_1)(k_4 - k_3);$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2 & 0 & k_4 \\ k_1^2 & k_2^2 & 0 & k_4^2 \\ k_1^3 & k_2^3 & 1 & k_4^3 \end{vmatrix} = -(k_2 - k_1)(k_4 - k_1)(k_4 - k_2);$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & 0 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 & 0 \\ k_1^3 & k_2^3 & k_3^3 & 1 \end{vmatrix} = (k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_3 - k_2),$$

що дозволяє визначити довільні сталі:

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{8\mu^3 i(1+i)};$$

$$C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{8\mu^3 i(1-i)};$$

$$C_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{8\mu^3 i(1-i)};$$

$$C_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = -\frac{1}{8\mu^3 i(1+i)}.$$

Таким чином, розв'язок однорідного рівняння можна записати у вигляді:

$$g(x) = \frac{1}{8\mu^3 i}\left\{\frac{\exp[\mu x(1+i)]}{1+i} - \frac{\exp[-\mu x(1+i)]}{1+i} + \frac{\exp[-\mu x(1-i)]}{1-i} - \frac{\exp[\mu x(1-i)]}{1-i}\right\}. \quad (13)$$

Нескладно перевірити дотримання умов (10):

$$g(0) = 0;\ g'(0) = 0;\ g''(0) = 0,$$

$$g'''(0) = \frac{1}{8i}\left[(1+i)^2 + (1+i)^2 - (1-i)^2 - (1-i)^2\right] = 1.$$

Для зручності подальших обчислень виразу (13) надамо речову форму:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{16\mu^3 i}\{\exp(\mu x)[(1-i)\exp(i\mu x) - (1+i)\exp(-i\mu x)] + \\ &\quad + \exp(-\mu x)[(1+i)\exp(i\mu x) - (1-i)\exp(-i\mu x)]\} = \\ &= \frac{1}{8\mu^3}\left[\exp(\mu x)(\sin\mu x - \cos\mu x) + \exp(-\mu x)(\sin\mu x + \cos\mu x)\right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Частковий розв'язок $W_{02}(x)$ другого рівняння системи (5) побудуємо у вигляді:

$$\begin{aligned} W_{02}(x) &= c^{-2}\int_0^x F_0(\xi)g(x-\xi)d\xi = \\ &= \frac{1}{8\mu^3 c^2}\exp(\mu x)\int_0^x \exp(-\mu\xi)F_0(\xi)[\sin\mu(x-\xi) - \cos\mu(x-\xi)]d\xi + \\ &+ \frac{1}{8\mu^3 c^2}\exp(-\mu x)\int_0^x \exp(\mu\xi)F_0(\xi)[\sin\mu(x-\xi) + \cos\mu(x-\xi)]d\xi = \\ &= -\frac{1}{8\mu^3 c^2}\exp(\mu x)\Big\{(\cos\mu x)\int_0^x \exp(-\mu\xi)F_0(\xi)(\sin\mu\xi + \cos\mu\xi)d\xi + \\ &+ (\sin\mu x)\int_0^x \exp(-\mu\xi)F_0(\xi)(\sin\mu\xi - \cos\mu\xi)d\xi\Big\} - \\ &- \frac{1}{8\mu^3 c^2}\exp(-\mu x)\Big\{(\cos\mu x)\int_0^x \exp(\mu\xi)F_0(\xi)(\sin\mu\xi - \cos\mu\xi)d\xi - \\ &- (\sin\mu x)\int_0^x \exp(\mu\xi)F_0(\xi)(\sin\mu\xi + \cos\mu\xi)d\xi\Big\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3 c^2}\int_0^x \exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi + \frac{\pi}{4}\right)d\xi = J_1(x); \\ &\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3 c^2}\int_0^x \exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi - \frac{\pi}{4}\right)d\xi = J_2(x); \\ &\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3 c^2}\int_0^x \exp(\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi - \frac{\pi}{4}\right)d\xi = J_3(x); \\ &-\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3 c^2}\int_0^x \exp(\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi - \frac{\pi}{4}\right)d\xi = J_4(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Тоді вираз (15) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} W_{02}(x) &= -\exp(\mu x)[(\cos\mu x)J_1(x) + (\sin\mu x)J_2(x)] - \\ &- \exp(-\mu x)[(\cos\mu x)J_3(x) + (\sin\mu x)J_4(x)]. \end{aligned} \quad (17)$$

З урахуванням (9), повний розв'язок другого рівняння системи (5) буде таким:

$$\begin{aligned}&W_0(x)=W_{01}(x)+W_{02}(x)=\\&=-\exp(\mu x)\{[a_1-J_1(x)](\cos\mu x)+[a_2-J_2(x)](\sin\mu x)\}+\\&+\exp(-\mu x)\{[a_3-J_3(x)](\cos\mu x)+[a_4-J_4(x)](\sin\mu x)\}.\end{aligned}\tag{18}$$

Розв'язки шукаємо обмежені при $x\to\pm\infty$, тобто на кінцях нескінченої оболонки. Тоді, враховуючи, що носій функції $F(x)$ кінцевий, то при $|x|>L$ функція $F(x)$ буде дорівнювати нулю, тобто

$$F(x)=0\text{ , якщо }|x|>L.\tag{19}$$

Слід зазначити, що

$$J_1(x)=\text{const}=B_1;\ J_2(x)=\text{const}=B_2\text{, якщо }x>L;\tag{20}$$

$$J_3(x)=\text{const}=B_3;\ J_4(x)=\text{const}=B_4\text{, якщо }x<-L.\tag{21}$$

Тоді вираз (18), із урахуванням співвідношень (20) і (21), перетвориться:

$$\begin{aligned}&W_0(x)=\exp(\mu x)\{[B_1-J_1(x)](\cos\mu x)+[B_2-J_2(x)](\sin\mu x)\}+\\&+\exp(-\mu x)\{[B_3-J_3(x)](\cos\mu x)+[B_4-J_4(x)](\sin\mu x)\}=\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\exp(\mu x)\Big\{(\cos\mu x)\int_x^L\exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi+\frac{\pi}{4}\right)d\xi+\\&+(\sin\mu x)\int_x^L\exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi-\frac{\pi}{4}\right)d\xi\Big\}-\\&-\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\exp(-\mu x)\Big\{(\cos\mu x)\int_{-L}^x\exp(\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi-\frac{\pi}{4}\right)d\xi+\\&+(\sin\mu x)\int_{-L}^x\exp(\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi+\frac{\pi}{4}\right)d\xi\Big\},\end{aligned}\tag{22}$$

де $-\infty<x<+\infty$.

Уточнимо поведінку побудованого розв'язку поза носієм збурюючої сили $F(x)$, тобто поза вікном, через яке проходить хвиля тиску ($-L\le x\le L$). Іншими словами, перевіримо, чи обмежений розв'язок при $x\to\pm\infty$.

Якщо $L<x<+\infty$, то виконуються співвідношення:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_x^L\exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi\pm\frac{\pi}{4}\right)d\xi=0;\tag{23}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_{-L}^x\exp(\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi-\frac{\pi}{4}\right)d\xi=\\&=-\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_{-L}^L\exp(\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi-\frac{\pi}{4}\right)d\xi=\text{const}\overset{def}{=}p_1;\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_{-L}^x\exp(\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi+\frac{\pi}{4}\right)d\xi=\\&=-\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_{-L}^L\exp(\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi+\frac{\pi}{4}\right)d\xi=\text{const}\overset{def}{=}p_2.\end{aligned}\tag{25}$$

В цьому випадку

$$W_0(x)=\exp(-\mu x)(p_1\cos\mu x+p_2\sin\mu x),\ L<x<+\infty.\tag{26}$$

Якщо $-\infty<x<L$, то:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_{-L}^x\exp(\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi\pm\frac{\pi}{4}\right)d\xi=0;\tag{27}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_x^L\exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi+\frac{\pi}{4}\right)d\xi=\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_{-L}^L\exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi+\frac{\pi}{4}\right)d\xi=\text{const}\overset{def}{=}q_1;\end{aligned}\tag{28}$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_x^L \exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi-\frac{\pi}{4}\right)d\xi =$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}\mu^3c^2}\int_{-L}^{L} \exp(-\mu\xi)F_0(\xi)\sin\left(\mu\xi+\frac{\pi}{4}\right)d\xi = \mathrm{const} \stackrel{def}{=} q_2;$$

З урахуванням вищесказаного, отримуємо:

$$W_0(x)=\exp(\mu x)(q_1\cos\mu x+q_2\sin\mu x), -\infty < x < L. \tag{29}$$

З виразів (27) і (29) випливає, що побудований розв'язок (22) експоненційно прямує до нуля при $x\to\pm\infty$ разом з усіма своїми похідними по змінній x. Інших розв'язків, окрім (22), обмежених на всій осі $-\infty < x < +\infty$, друге рівняння системи (5) не має.

Висновки. Отримана закономірність пружного руху поверхні оболонкової частини дозволяє перш за все провести якісний і кількісний аналіз явища. По-друге, прогнозувати переміщення підвісу гіроскопа в площині шпангоута залежно від параметрів багатофазного підвісу, маючи на меті кінцевий орієнтир – зменшення похибки приладу.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Погрешности гироскопического интегратора линейных ускорений в натурных условиях / В.В. Карачун, В.Н. Мельник, В.Г. Лозовик, А.А. Одинцов / Под ред. В.В. Карачуна. – К.: Корнейчук, 2001. – 144 с.
2. *Карачун В.В., Каюк Я.Ф., Мельник В.Н.* Волновые задачи поплавкового гироскопа. – К.: Корнейчук, 2007. – 228 с.
3. *Карачун В.В.* О рассеянии энергии в механических системах при акустическом нагружении. – В кн.: Рассеяние энергии при колебаниях механических систем: Материалы XV Респ. научн. конф. – 1989. – Киев: Наук. думка. – С. 245–249.
4. *Karachun V.V.* Vibration of a plate under acoustic load. Engineering, Technology Applied Science. PA, USA. – Vol. 20. – № 37 (11 September 1989). – Pp. 324–328.
5. *Karachun V.V., Yankovoy V.V., Kolosov V.N.* To the Aspect of Influence of Acoustic Emission of Space Apparatus March Engines to the Elements of Construction. Proceeding of Fourth Ukraine-Russia-China symposium on space science and technolodgy. Ukraine, September 12–17. – 1996. – P. 721.
6. *Карачун В.В., Мельник В.М.* Коливання і хвилі в імпедансних системах інерціальної навігації / / Доповіді Нац. акад. наук України. – 2007. – № 5. – С. 63–70.
7. Патент 39599 А, Україна, G10 K11/16. Шумозахисний кожух / В.В. Карачун, М.С. Тривайло, В.М. Мельник. – 200116168. – Заявл. 01.11.2000. Опубл.15.06.2001. –Бюл. № 5. – 1 с.
8. *Василенко Н.В.* Теория колебаний: Учебное пособие. – К.: Выща школа, 1992. – 430 с.
9. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.

КЛАДУН Олена Анатоліївна – аспірант Національного технічного університету України "КПІ".
Наукові інтереси:
– динаміка механічних систем приладів.

Подано 21.06.2007