УДК 621.372.061: 518

М.Ю. Ракушев, к.т.н., пров. н.с.
Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

АПРОКСИМАЦІЯ ТА СТІЙКІСТЬ МЕТОДУ ЗМІЩЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ТЕЙЛОРІВСЬКИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ

Наведено результати дослідження апроксимації, стійкості та як наслідок – збіжності обчислювальних схем розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь, що розроблені на основі зміщених диференціально-тейлорівських перетворень.

Вступ. У багатьох практичних задачах, які виникають в таких областях, як хімічна кінетика, процеси управління та теорія електричних кіл, виникає завдання розв'язку задачі Коші для жорсткого диференціального рівняння [5, 9]. Одним з можливих варіантів розв'язання такої задачі є використання математичного апарату диференціально-тейлорівських (ДТ) перетворень [6]. ДТ-перетворення – це формалізований операційний метод, який дозволяє рекурентно, без внесення методичної похибки числового диференціювання, визначати відрізок ряду Тейлора локального розв'язку диференціального рівняння. Така властивість методу дає змогу будувати обчислювальні схеми розв'язання задачі Коші з покращеними, порівняно з традиційними числовими методами, показниками за критерієм "точність–обчислювальна складність" [1, 2, 8].

Аналіз останніх досліджень. Розв'язок задачі Коші для жорсткого диференціального рівняння здійснюється одним з неявних числових методів інтегрування звичайних диференціальних рівнянь шляхом розробки неявної обчислювальної схеми [9]. Неявні обчислювальні схеми характеризуються порядком точності та областю стійкості, з аналізу яких робиться висновок про їх результуючу збіжність [7, 9]. Бажаною властивістю обчислювальної схеми для розв'язку задачі Коші є її А-стійкість [9].

Питання розробки неявних обчислювальних схем на основі ДТ-перетворень (далі ДТ-обчислювальні схеми) розглянуті в [3], де показано, що серед усіх ДТ-обчислювальних схем немає А-стійких з порядком точності вище 2-го. Зараз розроблений новий вид ДТ-перетворень – зміщені ДТ-перетворення. Цей вид ДТ-перетворень, як стверджується у [1], дозволяє розробляти неявні ДТ-обчислювальні схеми з підвищеною точністю за рахунок взаємного компенсування відкинутих відрізків ряду Тейлора у прямій і зворотній моделях. У відомій літературі немає досліджень щодо стійкості й відповідно збіжності зміщених ДТ-обчислювальних схем.

Формулювання цілей статті. Практика рішення диференціальних рівнянь методом ДТ- перетворень показує, що область застосування цього методу перекриває область застосування математично класичних числових методів [8]. Серед традиційних числових методів розв'язку задачі Коші є А-стійкі з будь яким порядком точності – це неявні методи Рунге-Кутта оптимального порядку [9]. Можливим шляхом створення А-стійких ДТ-обчислювальних схем з порядком точності вище 2-го може бути використання відносно нового виду ДТ-перетворень – зміщених ДТ-перетворень. Виходячи з вищевикладеного, *метою статті* є дослідження апроксимації, стійкості та як наслідок – збіжності обчислювальних схем розв'язку задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь, що розроблені на основі зміщених ДТ-перетворень.

Викладення основного матеріалу. Задача Коші для звичайного диференціального рівняння записується у вигляді:

$$\frac{du(t)}{dt} = f(u, t), \quad u(0) = u_0, \quad t > 0, \tag{1}$$

де $u = u(t)$ – невідома функція, яку необхідно знайти;

u_0 – початкова умова;

t – незалежна змінна;

$f(u, t)$ – задана функція, яка задовольняє умову Липшиця [7, 9].

Припустимо, що розв'язок задачі (1) існує, він єдиний та відповідає необхідним властивостям гладкості.

ДТ-перетвореннями називають функціональні перетворення вигляду [1, 6]:

$$Z(k) = \frac{H^k}{k!}\left[\frac{d^k z(t)}{dt^k}\right]_{t_*}, \quad z(t) = \sum_{k=0}^{k_{max}}\left(\frac{t - t_*}{H}\right)^k Z(k), \tag{2}$$

де t – аргумент, за яким проводиться перетворення;

t_* – значення аргументу, при якому проводиться перетворення;

k – цілочисловий аргумент k = 0, 1,…;

$Z(k)$ – дискретна функція за аргументом k;

H – відрізок аргументу, на якому розглядається функція $z(t)$.

Вирази (2) визначають пряме та обернене перетворення. Диференціальне зображення $Z(k)$ прийнято називати диференціальним спектром або Р-спектром, а значення функції $Z(k)$ за конкретних значень аргументу k – дискретами диференціального спектра або Р-дискретами.

Обчислювальна схема числового розв'язку задачі (1) на основі зміщених ДТ-перетворень – це ітераційна обчислювальна схема, в якій значення функції у n + 1-й точці розраховується так, щоб сума відрізка ряду Тейлора, обчисленого в ній, дорівнювала на середині інтервалу $[t_n, t_{n+1}]$ сумі відрізка ряду Тейлора, обчисленого в попередній точці n [1]:

$$\sum_{k=0}^{k_{\max}}\left(\frac{1}{2}\right)^k Y_n(k)=\sum_{k=0}^{k_{\max}}\left(-\frac{1}{2}\right)^k Y_{n+1}(k), \tag{3}$$

де $Y_n(k)$, $Y_{n+1}(k)$ – диференціальний спектр розв'язку задачі (1) у відповідних точках обчислювальної сітки $\omega_n=\{t_n=n\tau,\ n=0,1,2,\ldots\}$ з кроком $\tau=t_{n+1}-t_n$;

$k_{\max}$ – максимальний номер дискрети Р-спектра, що бере участь у відновленні.

Використовуючи (3), можна послідовно (починаючи з $n=0$) знайти розв'язок (1), тобто визначити на ω_n значення сіткової функції y_n, яке приймається за наближене значення шуканої функції $u(t_n)\approx y_n$.

Розпишемо дискрети диференціального спектра в (3), використовуючи пряме перетворення з (2), та введемо заміну $k_{\max}=m$:

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{\tau^k}{k!}y_n^{(k)}=\sum_{k=0}^{m}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{\tau^k}{k!}y_{n+1}^{(k)}. \tag{4}$$

За аналогією з традиційними числовими методами [7, 9] визначимо похибку апроксимації або нев'язку зміщеної ДТ-обчислювальної схеми, яка є результатом підстановки точного розв'язку задачі (1) – $u_n=u(t_n)$ в обчислювальну схему (4). Для цього зробимо підстановку у вигляді [7]:

$$u_{n+1}=\sum_{s=0}^{p}\frac{\tau^s}{s!}u_n^{(s)}\Rightarrow u_{n+1}^{(k)}=\sum_{s=0}^{p-k}\frac{\tau^s}{s!}u_n^{(k+s)},\qquad p>m.$$

З урахуванням вищезазначеного похибка апроксимації зміщеної ДТ-обчислювальної схеми буде мати вигляд (множник $1/\tau$ з'являється за рахунок приведення обчислювальної схеми (4) до канонічного вигляду числового методу відповідно до [7]):

$$\psi_n=\frac{1}{\tau}\left(\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{\tau^k}{k!}u_n^{(k)}-\sum_{k=0}^{m}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\frac{\tau^k}{k!}u_{n+1}^{(k)}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\psi_n=\frac{1}{\tau}\left(\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{\tau^k}{k!}u_n^{(k)}-\sum_{k=0}^{m}\sum_{s=0}^{p-k}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k\frac{\tau^k}{k!}\frac{\tau^s}{s!}u_n^{(k+s)}\right]\right),$$

використовуючи підстановку $s+k=d\Rightarrow s=d-k$, отримаємо

$$\psi_n=\frac{1}{\tau}\left(\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{\tau^k}{k!}u_n^{(k)}-\sum_{k=0}^{m}\sum_{d=k}^{p}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k\frac{\tau^k}{k!}\frac{\tau^{d-k}}{(d-k)!}u_n^{(d)}\right]\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\psi_n=\frac{1}{\tau}\left(\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{\tau^k}{k!}u_n^{(k)}-\sum_{d=0}^{p}\frac{\tau^d}{d!}u_n^{(d)}\sum_{k=0}^{\min(d,m)}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k\frac{d!}{k!(d-k)!}\right]\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\psi_n=\frac{1}{\tau}\left(\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{\tau^k}{k!}u_n^{(k)}-\sum_{d=0}^{p}\frac{\tau^d}{d!}u_n^{(d)}\sum_{k=0}^{\min(d,m)}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k\frac{d!}{k!(d-k)!}\right]\right),$$

змінимо індекс у першій сумі з k на d, тоді

$$\psi_n=\frac{1}{\tau}\left(\sum_{d=0}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^d\frac{\tau^d}{d!}u_n^{(d)}-\sum_{d=0}^{p}\frac{\tau^d}{d!}u_n^{(d)}\sum_{k=0}^{\min(d,m)}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k\frac{d!}{k!(d-k)!}\right]\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_n = \frac{1}{\tau}\left(\sum_{d=0}^{m}\frac{\tau^d}{d!}u_n^{(d)}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^d - \sum_{k=0}^{d}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{d!}{k!(d-k)!}\right]\right\} - \right.$$

$$\left. - \sum_{d=m+1}^{p}\frac{\tau^d}{d!}u_n^{(d)}\sum_{k=0}^{m}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{d!}{k!(d-k)!}\right]\right).$$

Враховуючи властивості біноміальних коефіцієнтів [4] $\sum_{k=0}^{d}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{d!}{k!(d-k)!}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^d$, отримаємо:

$$\Rightarrow \psi_n = \frac{1}{\tau}\left(\sum_{d=0}^{m}\frac{\tau^d}{d!}u_n^{(d)}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^d - \left(\frac{1}{2}\right)^d\right\} - \sum_{d=m+1}^{p}\frac{\tau^d}{d!}u_n^{(d)}\sum_{k=0}^{m}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{d!}{k!(d-k)!}\right]\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_n = -\frac{1}{\tau}\left(\sum_{d=m+1}^{p}\frac{\tau^d}{d!}u_n^{(d)}\sum_{k=0}^{m}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{d!}{k!(d-k)!}\right]\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_n \approx -\frac{1}{\tau}\left(\sum_{d=m+1}^{p+2}\frac{\tau^d}{d!}u_n^{(d)}\sum_{k=0}^{m}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{d!}{k!(d-k)!}\right]\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_n \approx \begin{cases} -\frac{1}{\tau}\frac{1}{2^m}\frac{\tau^{m+1}}{(m+1)!}u_n^{(m+1)}, \text{ якщо } m - \text{парне} \\ -\frac{1}{\tau}\frac{m+1}{2^{m+1}}\frac{\tau^{m+2}}{(m+2)!}u_n^{(m+2)}, \text{ якщо } m - \text{непарне} \end{cases}. \tag{5}$$

Аналіз залежності (5) показує, що зміщені ДТ-обчислювальні схеми (3) апроксимують вихідне диференціальне рівняння (1) і мають не гірший за $k_{\max}$-й порядок апроксимації:

$$\psi_n = \begin{cases} O\left(\tau^{k_{\max}}\right), \text{ якщо } k_{\max} - \text{парне} \\ O\left(\tau^{k_{\max}+1}\right), \text{ якщо } k_{\max} - \text{непарне} \end{cases}. \tag{6}$$

Після дослідження апроксимації перейдемо до розгляду питань стійкості зміщених ДТ-обчислювальних схем розв'язку задачі Коші (3). Для цього знайдемо області їх стійкості шляхом дослідження розв'язку модельного диференціального рівняння [7, 9]:

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \tag{7}$$

де λ – довільне комплексне число.

Застосуємо зміщену ДТ-обчислювальну схему (3) до модельного рівняння (7):

$$\sum_{k=0}^{k_{\max}}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}y_{n+1} = \sum_{k=0}^{k_{\max}}\left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}y_n. \tag{8}$$

Знайдемо розв'язок (8) у вигляді $y_n = q^n$ [7, 9]:

$$\sum_{k=0}^{k_{\max}}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\frac{\mu^k}{k!}q^{n+1} = \sum_{k=0}^{k_{\max}}\left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{\mu^k}{k!}q^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \frac{\sum_{k=0}^{k_{\max}}\left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{\mu^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{k_{\max}}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\frac{\mu^k}{k!}}, \tag{9}$$

де $\mu = \tau\lambda$ – комплексний параметр.

Рівняння (9) – це характеристичне рівняння зміщеної ДТ-обчислювальної схеми, з якого можна визначити область стійкості методу зміщених ДТ-перетворень розв'язання задачі Коші для звичайного диференціального рівняння. Область стійкості числового методу визначається як частина комплексної площини $\mu = \mathrm{Re}\{\mu\} + j\,\mathrm{Im}\{\mu\}$, на якій виконується умова [7, 9]:

$$|q| < 1. \tag{10}$$

Для отримання області стійкості відповідно до (9) достатньо зробити підстановку $q = \exp\{j\varphi\}$, яка є граничною до умови (10), та скористатися будь-яким середовищем математичного моделювання. Результати наведено на рис. 1, де область стійкості зображена зафарбованою.

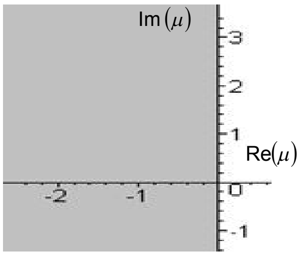

Рис. 1. Область стійкості обчислювальних схем розв'язку задачі Коші на основі зміщених ДТ перетворень

Аналіз рис. 1 показує, що область стійкості обчислювальних схем на основі зміщених ДТ-перетворень (3) включає всю ліву напівплощину $\mathrm{Re}(\mu) < 0$, тобто вони є А-стійкими [7, 9].

Приклад. Розв'яжемо задачу Коші для жорсткого нелінійного диференціального рівняння хімічної реакції [5]:

$$\begin{cases} u_1' = -0{,}013u_1 - 10^3 u_1 u_3 \\ u_2' = -2{,}5 \cdot 10^3 u_2 u_3 \\ u_3' = -0{,}013u_1 - 10^3 u_1 u_3 - 2500 u_2 u_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_1(0) = 1 \\ u_2(0) = 1 \\ u_3(0) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_1(10) = ? \\ u_2(10) = ? \\ u_3(10) = ? \end{cases}. \tag{10}$$

Зміщена ДТ-обчислювальна схема (3) для задачі (10) з врахуванням властивостей ДТ-перетворень [6] запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} t_n = nH, \quad Y_{1,n=0}(0) = 1, \quad Y_{2,n=0}(0) = 1, \quad Y_{3,n=0}(0) = 1 \\ Y_{1,n}(k+1) = \dfrac{H}{k+1}\left(-0{,}013Y_{1,n}(k) - 10^3 Y_{1,n}(k) * Y_{3,n}(k)\right) \\ Y_{2,n}(k+1) = \dfrac{H}{k+1}\left(-2{,}5 \cdot 10^3 Y_{2,n}(k) * Y_{3,n}(k)\right) \\ Y_{3,n}(k+1) = \dfrac{H}{k+1}\left(-0{,}013Y_{1,n}(k) - 10^3 Y_{1,n}(k) * Y_{3,n}(k) - 2500 Y_{2,n}(k) * Y_{3,n}(k)\right) \end{cases}, \tag{11}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{k_{\max}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k Y_{1,n} = \sum\limits_{k=0}^{k_{\max}} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^k Y_{1,n+1} \\ \sum\limits_{k=0}^{k_{\max}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k Y_{2,n} = \sum\limits_{k=0}^{k_{\max}} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^k Y_{2,n+1} \\ \sum\limits_{k=0}^{k_{\max}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k Y_{3,n} = \sum\limits_{k=0}^{k_{\max}} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^k Y_{3,n+1} \end{cases}, \tag{12}$$

де $Y_{1,n}(k), Y_{2,n}(k), Y_{3,n}(k)$ – диференціальний спектр розв'язку задачі (10) у точці n;

$*$ – позначення операцій алгебраїчної згортки, наприклад $S(k) * Q(k) = \sum\limits_{l=0}^{k} S(k-l) \cdot Q(l)$.

Використовуючи (11) та (12), можна послідовно (починаючи з $n = 0$) знайти шуканий розв'язок задачі (10), при цьому нелінійне рівняння (12) на кожному кроці необхідно розв'язувати одним з ітераційних методів розв'язку нелінійних алгебраїчних рівнянь, наприклад методом Ньютона чи простої ітерації. Результати розрахунків наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Результати розрахунку зміщеною ДТ-обчислювальною схемою

k_{max}	H	u_1	u_2	u_3
2	2,5 10^{-4}	0,877546377729103	0,12241598164966	-3,76406212784041 10^{-5}
	1 10^{-4}	0,877546366915849	0,122415992466651	-3,76406175172835 10^{-5}
8	2,5 10^{-4}	0,877546367302521	0,122415992079861	-3,76406176517729 10^{-5}
	1 10^{-4}	0,877546366791355	0,122415992591173	-3,7640617473986 10^{-5}

Аналіз даних табл. 1 показує, що зміщена ДТ-обчислювальна схема залишається стійкою при зміні як порядку її точності, так і кроку обчислювальної сітки. Тобто наведений приклад наочно ілюструє апроксимацію та стійкість і як наслідок – збіжність обчислювальної схеми розв’язку задачі Коші для жорсткого нелінійного диференціального рівняння, що розроблена на основі зміщених ДТ-перетворень.

Висновки. Результати дослідження обчислювальних схем розв’язку задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь, що розроблені на основі зміщених ДТ-перетворень, доводять, що зміщені ДТ-обчислювальні схеми апроксимують вихідне диференціальне рівняння з порядком апроксимації, не гіршим ніж $k_{\max}$ (6), є А-стійкими і тому збігаються.

Таким чином, у статті викладено дослідження апроксимації, стійкості та як наслідок – збіжності обчислювальних схем розв’язку задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь, що розроблені на основі зміщених диференціально-тейлорівських перетворень. Наведені результати є чітким теоретичним обґрунтуванням можливості використання методу зміщених диференціально-тейлорівських перетворень для розв’язку диференціальних рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Баранов Г.Л., Баранов В.Л., Жуков І.А., Алексєєва Л.О.* Диференціальні перетворення для комп’ютерного моделювання: Навч. посіб. – К.: Нац. ав. ун., 2002. – 106 с.
2. *Ковбасюк С.В., Ракушев М.Ю.* Прогнозирование неуправляемого движения космического аппарата методом дифференциальных преобразований // Двойные технологии. – 2003. – № 4. – С. 16–20.
3. *Коваль Н.В., Семагина Э.П.* Об устойчивости алгоритмов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом дифференциального преобразования // Теоретическая электротехника. – 1985. – Вып. 39. – С. 108–118.
4. *Корн Г., Корн К.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1974. – 831 с.
5. *Петренко А.И., Смирнов А.М., Гумен Б.Н.* Сравнительное исследование неявных методов интегрирования систем дифференциальных уравнений при решении модельных задач // Электронное моделирование. – 1981. – № 3. – С. 8–16.
6. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – К.: Наукова думка, 1986. – 159 с.
7. *Самарський А. А., Гулин А.В.* Численные методы: Учеб. пособие для вузов.– М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. – 432 с.
8. *Семагина Э.П.* Об эффективности Т-преобразований при численном решении дифференциальных уравнений // Электронное моделирование. – 1981. – № 4. – С. 103–104.
9. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1979.

РАКУШЕВ Михайло Юрійович – кандидат технічних наук, провідний науковий співробітник науково-дослідного центру Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:
– балістико-навігаційне забезпечення управління польотом космічних апаратів;
– математичне моделювання та диференціальні перетворення.

Подано 04.05.2007