

О.М. Безвесільна, д.т.н., проф.
 Національний технічний університет України "КПІ"

ВИЗНАЧЕННЯ СТІЙКОСТІ ВИМІРЮВАЧА ЛІНІЙНИХ ПРИСКОРЕНЬ

В статті розв'язано задачу дослідження стійкості нового вимірювача лінійних прискорень, який представляє собою важкий симетричний гіроскоп у тристепеневому кардановому підвісі з вертикально розташованою віссю обертання зовнішньої рамки. Визначено рівняння руху приладу. Наведено чисельний приклад визначення стійкості вимірювача лінійних прискорень.

Постановка проблеми в загальному вигляді. Аналіз існуючих досліджень і публікацій. Ефективність гравіметричних досліджень для забезпечення пошуку корисних копалин, вимірювання форми Землі, розв'язання задач картографії великою мірою залежить від характеристик чутливих елементів авіаційних гравіметричних систем, гравіметрів. В [1] запропоновано новий тип гравіметра – вимірювач лінійних прискорень, який має значні переваги перед найбільш відомими гравіметрами інших типів: струнним та сильно демпфованим [1, 2]. Однак, в літературі [3, 4, 5] відсутні відомості щодо рівнянь руху такого гравіметра та дослідження його стійкості.

Метою проведених досліджень є дослідження стійкості нового вимірювача лінійних прискорень [1], який побудований на основі симетричного тристепеневого гіроскопа і призначений для вимірювання прискорення сили ваги при гравіметричних дослідженнях.

Викладення основного матеріалу досліджень. Розв'яжемо задачу визначення стійкості вимірювача лінійних прискорень (ВЛП), що представляє собою важкий симетричний гіроскоп у тристепеневому кардановому підвісі з вертикально розташованою віссю обертання зовнішньої рамки (рис. 1). Центр мас рухомої частини приладу зміщений щодо осі кожуха гіромотора на відстань l . Орієнтація головної осі ВЛП в земній системі координат забезпечується системами горизонтальної й азимутальної корекції, що здійснюються на основі сигналів від гіровертикалі (ГВ) і гірокомпаса (ГК) за допомогою електричних датчиків кута (ДУ) і датчиків моменту (ДМ). Ці датчики мають пропорційні характеристики.

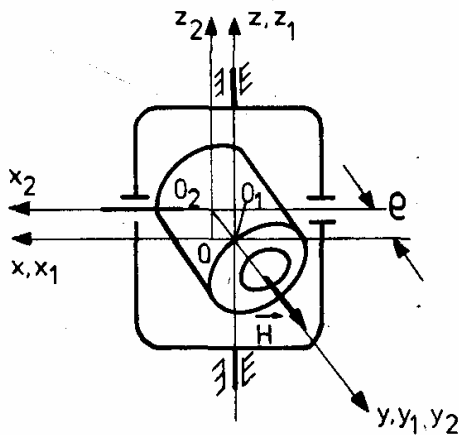


Рис. 1. Новий вимірювач лінійних прискорень, побудований на основі симетричного тристепеневого гіроскопа

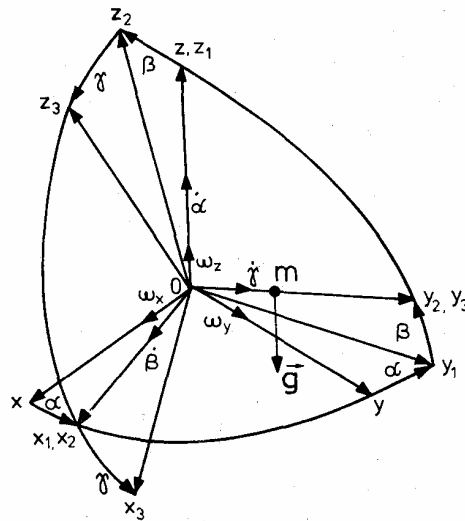


Рис. 2. Системи координат для визначення рівняння руху ВЛП

Введемо такі системи координат (рис. 2): $0xyz$ – система координат, жорстко пов'язана з об'єктом; $0x_i y_i z_i$, $i = 1, 2, 3$ – система координат, пов'язана з зовнішньою ($i = 1$), внутрішньою ($i = 2$) рамками і ротором ($i = 3$) гіроскопа. Позначимо через α, β, γ кути повороту гіроскопа.

Запишемо проєкції кутових швидкостей елементів гіроскопа на осі, пов'язані з зовнішньою, внутрішньою рамками і ротором у вигляді:

$$\begin{aligned} \omega_{x1} &= \omega_x \cos\alpha + \omega_y \sin\alpha; \\ \omega_{y1} &= \omega_y \cos\alpha - \omega_x \sin\alpha; \\ \omega_{z1} &= \dot{\alpha} + \omega_z; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \omega_{x2} &= \dot{\beta} + \omega_{x1}; \\ \omega_{y2} &= \omega_{z1} \sin \beta + \omega_{y1} \cos \beta; \\ \omega_{z2} &= \omega_{z1} \cos \beta - \omega_{y1} \sin \beta; \\ \omega_{x3} &= \omega_{x2} \cos \gamma - \omega_{z2} \sin \gamma; \\ \omega_{y3} &= \omega_{y2} + \dot{\gamma}; \\ \omega_{z3} &= \omega_{z2} \cos \gamma + \omega_{x2} \sin \gamma. \end{aligned}$$

Врахуємо такі тотожності:

$$\frac{\partial \omega_{x1}}{\partial \alpha} = \omega_{y1}; \quad \frac{\partial \omega_{y1}}{\partial \alpha} = -\omega_{x1}; \quad \frac{\partial \omega_{z1}}{\partial \alpha} = 1; \quad \frac{\partial \omega_{x1}}{\partial \omega_x} = \cos \alpha; \quad \frac{\partial \omega_{y1}}{\partial \omega_y} = \cos \alpha. \quad (2)$$

Для впорядкування диференціальних рівнянь руху ВЛП скористаємося теоремою про зміну кінетичного моменту [7]:

$$\frac{d\bar{k}_i}{dt} + \bar{\omega}_i \times \bar{k}_i = \bar{M}_i - [m\bar{\rho} \times \bar{w}]_i. \quad (3)$$

В цій формулі \bar{k}_i ($i = 1, 2, 3$) – кінетичний момент i -го тіла рухомої системи ВЛП щодо центра має 0; $\bar{\omega}_i$ – кутова швидкість переносного руху рухомої системи координат; \bar{M}_i – головний момент зовнішніх сил, прикладених до системи щодо центра мас 0; $\bar{\rho}$ ($0, l, 0$) – зсув щодо точки 0; \bar{w}_i – лінійне прискорення об'єкта.

Далі за відомою методикою [8] отримаємо диференціальні рівняння руху ВЛП, що досліджується. В результаті маємо такі рівняння:

$$\begin{aligned} \alpha(p) &= [(Bp^2 + n_2 p)M_{n1} + (Hp + k_1)(mgl - M_{n2})] \Delta^{-1}; \\ \beta(p) &= [(Ap^2 + n_1 p)(M_{n2} - mgl) + (Hp + n_2)M_{n1}] \Delta^{-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

де $\Delta = a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4; \quad a_0 = AB; \quad a_1 = Bn_1 + An_2;$
 $a_2 = H^2 + n_1 n_2; \quad a_3 = H(k_1 + k_2); \quad a_4 = k_1 k_2.$

В системі рівнянь (4) α і β – кути повороту гіроскопа щодо осей зовнішньої та внутрішньої рамок; H – кінетичний момент гіроскопа; A, B – моменти інерції; n_1, n_2 – коефіцієнти сил в'язкого тертя; k_1, k_2 – передаточні коефіцієнти каналів корекції і вимірів, що діють по осях підвісу гіроскопа; mgl – маятниковий момент; M_{n1}, M_{n2} – моменти-перешкоди, що діють по осях підвісу гіроскопа; $p = d/dt$ оператор диференціювання.

Відповідно до критерію Гурвіца, для забезпечення стійкості даної системи необхідно, щоб

$$\begin{aligned} a_i &> 0, \quad (i = 0, 1, \dots, 4); \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 &> 0; \quad a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 &> 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Як видно з рівнянь (4) і (5), стійкість ВЛП визначається параметрами $H, A, B, k_1, k_2, n_1, n_2$. Для вивчення впливу конструктивних параметрів ВЛП на його стійкість побудуємо області стійкості для деяких з цих параметрів.

Перепишемо умови стійкості (5) для коефіцієнтів k_1, k_2 у такому вигляді:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &< a_1 a_2 (a_0 H)^{-1}; \\ k_1 k_2 &< (k_1 + k_2) H [a_1 a_2 - a_0 H (k_1 + k_2)] a_1^{-2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Розв'яжемо систему нерівностей (6) графічно (рис. 3), де графік першого рівняння системи (5) є пряма 1, а другого – гіпербола 2.

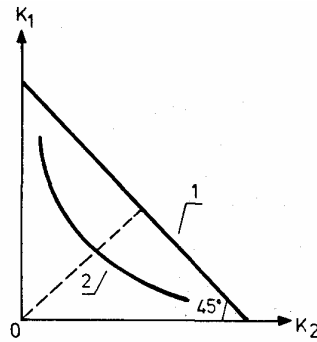


Рис. 3. Визначення області стійкості ВЛП по параметрах k_1, k_2

При $k_1 = k_2 = k$ нерівності (6) приймуть вигляд:

$$k < 2Ha_1a_2(4a_0H^2)^{-1}; \quad k < 2Ha_1a_2(a_1^2 + 4a_0H^2)^{-1}. \tag{7}$$

Із системи нерівностей (7) видно, що друга нерівність є більш суворю, тобто область стійкості буде визначатися гіперболою. З урахуванням виразів для a_0, a_1, a_2 зрозуміло, що для розширення області стійкості по k необхідно збільшувати A, B, n_1, n_2 і зменшувати H , що може призвести до зниження точності ВЛП.

Запишемо умови стійкості (5) для кінетичного моменту H :

$$\begin{aligned} a_1(H^2 + n_1n_2) - a_0H(k_1 + k_2) &> 0; \\ H(k_1 + k_2)[a_1(H^2 + n_1n_2) - a_0H(k_1 + k_2)] - a_4a_1^2 &> 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Із системи нерівностей (8) друга нерівність є більш суворю. Будемо вважати, що перша нерівність виконується. Тоді умова стійкості може бути записана у формі:

$$fH^3 - rH^2 + zH - g > 0, \tag{9}$$

де $f = a_1(k_1 + k_2); \quad r = a_0(k_1 + k_2)^2; \quad z = a_1(k_1 + k_2)n_1n_2; \quad g = a_4a_1^2.$

Перепишемо (9) у вигляді:

$$fH^2 - rH + z > g \cdot H^{-1} \tag{10}$$

і розв'яжемо нерівність (10) графічно (рис. 4), де крива 1 відповідає рівнянню $y = gH^{-1}$, крива 2 – $y = fH^2 - rH + z$.

З (10) видно, що розширенню області стійкості по H сприяє збільшення передаточних коефіцієнтів k_1, k_2 каналів корекції і вимірів, а також зменшення коефіцієнтів сил в'язкого тертя n_1, n_2 .

Умови стійкості (5) по параметрах n_1 і n_2 в окремому випадку $n_1 = n_2 = n$ мають вигляд:

$$n^3 - a_4a_3^{-1}(A + B)n^2 + H^2n - a_0a_3(A + B^{-1}) > 0. \tag{11}$$

Перепишемо (11) у формі:

$$n^2 - a_4a_3^{-1}(A + B)n + H^2 > a_0a_3(A + B^{-1})n^{-1}. \tag{12}$$

Цю нерівність також розв'яжемо графічно (рис. 5), де крива 1 відповідає рівнянню $y = a_0a_3[(A + B)n]^{-1}$, крива 2 – $y = n^2 - a_4a_3^{-1}(A + B)n + H^2$. В результаті одержимо область стійкості по параметру n .

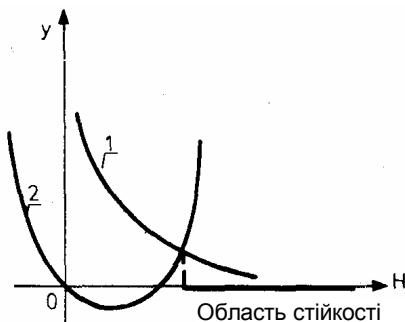


Рис. 4. Визначення області стійкості ВЛП по параметру H

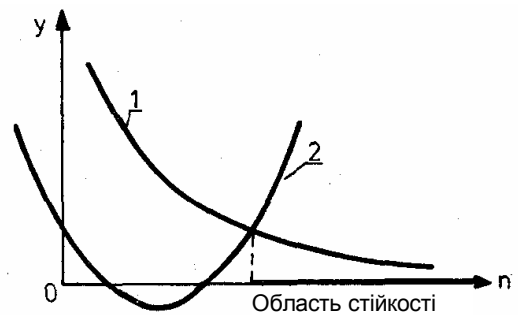


Рис. 5. Визначення області стійкості ВЛП по параметру n

Умови стійкості (5) для параметрів A і B можуть бути записані у вигляді:

$$a_3 a_2 (B n_1 + A n_2) - a_3^2 A B - a_4 (B n_1 + A n_2)^2 > 0. \quad (13)$$

Прийнявши $A = B$, з (13) легко отримати область стійкості по параметру A :

$$A < a_2 a_3 (n_1 + n_2) \left[a_4 (n_1 + n_2)^2 + a_3 \right]^{-1}. \quad (14)$$

Якщо в розглянутих випадках не приймати спрощень типу $k_1 = k_2$, $n_1 = n_2$, $A = B$, то тоді можна досліджувати стійкість по одному параметру, а інший – задавати.

Розглянемо стійкість системи для таких значень параметрів ВЛП [6]:

$$H = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}; \quad n_1 = n_2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с};$$

$$k_1 = k_2 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}; \quad A = B = 0,55 \cdot 10^1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2.$$

Умови стійкості (5) в цьому випадку матимуть вигляд:

$$\begin{cases} 2kH [2An(H^2 + n^2) - 2kHA^2] - 4A^2n^2 > 0; \\ 2An(H^2 + n^2) - 2kHA^2 > 0; \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} Ak < Hn; \\ Ak < (nH^2 + n^2)H^{-1}. \end{cases} \quad (15)$$

Видно, що перша нерівність системи (15) є більш суворою. Таким чином, умова стійкості ВЛП може бути записана у формі:

$$Ak < Hn.$$

ВЛП буде зберігати стійкість при значеннях параметрів, що лежать в таких областях: $A < 2 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$; $K < 18 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}$; $n > 1,38 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$; $H > 0,55 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

Порівнявши ці значення із заданими значеннями параметрів, можна зробити висновок, що прилад стійкий і знаходиться достатньо далеко від межі стійкості.

Висновки. В статті досліджено стійкість ВЛП, який представляє собою важкий симетричний гіроскоп у трестепеневому кардановому підвісі з вертикально розташованою віссю обертання зовнішньої рамки. Цей прилад призначений для вимірювання прискорення сили ваги при гравіметричних дослідженнях. Отримано залежності стійкості приладу від його конструктивних параметрів. Доведено, що прилад стійкий.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Безвесільна О.М.* Вимірювання прискорень: Підручник. – К.: Либідь, 2001. – 350 с.
2. *Безвесільна О.М.* Вимірювання гравітаційних прискорень: Підручник. – Житомир: ЖІТІ, 2002. – 264 с.
3. *Лозинская А.М.* Наставление по гравиметрической съемке с борта самолета. Принципы построения аппаратуры, методика измерений и камеральной обработки материалов. – М.: Изд-во ВНИИГеофизика, 1973. – 63 с.
4. Гравиразведка: Справочник геофизика / Под ред. Е.А. Мудрецової. – М.: Недра, 1981. – 397 с.
5. *Пантелеев В.Л.* Основы морской гравиметрии. – М.: Недра, 1983. – 268 с.
6. *Арутюнов С.С.* Систематические погрешности маятниковых акселерометров, обусловленные вибрацией основания // Известия вузов. Приборостроение. – 1968. – № 4. – С. 104–108.
7. *Ишлинский А.Ю.* Механика гироскопических систем. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 482 с.
8. *Луниц Я.Л.* Ошибки гироскопических приборов. – Л.: Судостроение, 1968. – 230 с.

БЕЗВЕСІЛЬНА Олена Миколаївна – Заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор кафедри приладобудування Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”.

Наукові інтереси:

- вимірювальні перетворювачі;
- гравіметрія.

Подано 17.01.2007

Безвесільна О.М. Визначення стійкості вимірювача лінійних прискорень
Безвесильная Е.Н. Определение устойчивости измерителя линейных ускорений
Bezvesilnaya E.N. The definition of a stability of a measuring instrument of linear accelerations

УДК 531.383

Визначення стійкості вимірювача лінійних прискорень / О.М. Безвесільна

В статті вирішено задачу дослідження стійкості нового вимірювача лінійних прискорень, який представляє собою важкий симетричний гіроскоп у триступеновому кардановому підвісі з вертикально розташованою віссю обертання зовнішньої рамки. Визначено рівняння руху приладу. Наведено чисельний приклад визначення стійкості вимірювача лінійних прискорень.

УДК 531.383

Определение устойчивости измерителя линейных ускорений / Е.Н. Безвесильная

В статье решена задача исследования устойчивости нового измерителя линейных ускорений, который представляет собой тяжелый симметричный гироскоп в трехступенном кардановом подвесе с вертикально расположенной осью вращения внешней рамки. Определены уравнения движения прибора. Приведен численный пример определения устойчивости измерителя линейных ускорений.

УДК 531.383

The definition of a stability of a measuring instrument of linear accelerations / E.N. Bezvesilnaya

In a paper the research problem of a stability of a new measuring instrument of linear accelerations is decided. This device based on heavy symmetric gyroscope in three-degree gimbal with the vertically located axes of rotation of an exterior framework. The equations of driving of a device are defined. The numerical example of the definition of a stability of a measuring instrument of linear accelerations is reduced.