

ПРИЛАДИ. РАДІОТЕХНІКА ТА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ

УДК 629.783

О.В. Андрєєв, к.т.н., доц.

Житомирський державний технологічний університет

О.М. Мукомел, викл.

П.П. Топольницький, к.т.н., доц.

С.П. Фриз, к.т.н., доц.

Житомирський військовий інститут радіоелектроніки ім. С.П. Корольова

МЕТОДИКА ПЕРЕВІРКИ АДЕКВАТНОСТІ РОЗРОБЛЕНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗА ДАНИМИ ПРОВЕДЕНИХ ВИМІРЮВАНЬ

Запропоновано методику перевірки адекватності моделі за даними вимірів параметрів, що моделюються. Наведені приклади застосування запропонованої методики для перевірки адекватності розроблених моделей за даними вимірювань телеметричних параметрів системи енергопостачання космічного апарата "Січ-1".

Аналіз останніх досліджень. Під час проведення досліджень, здебільшого для перевірки правильності запропонованих рішень, використовують створені математичні моделі [1–4]. При цьому отриманні результати оцінки ефективності через математичне моделювання можливо вважати правильними лише у разі підтвердження адекватності моделі, що використовувалась при моделюванні, реальному поведженню процесів, що досліджуються. Через недостатність апріорних даних щодо параметрів моделі та наявність похибок вимірів при проведенні експериментів, результати моделювання зазвичай відрізняються від реального поведження процесів, що досліджуються. Тому процедури перевірки адекватності базуються на контролі похибок моделювання. Наприклад у [3] запропоновано як осереднений показник якості моделі використовувати середній квадрат похибки моделювання. Враховуючи випадковий характер похибок моделювання, застосовують також довірчі оцінки параметрів, що характеризують якість моделі [3, 4]. Математично задачі перевірки адекватності моделей зазвичай формують як задачі перевірки статистичних гіпотез [4–8].

Отже **метою статті** є розробка методики перевірки адекватності моделі в умовах, коли як результати проведених експериментів використовуються виміри параметрів, що моделюються:

Припустимо, що модель динаміки зміни реального параметра описується рівнянням

$$x(t) = Q_M(t, \mu),$$

де Q_M – відомий оператор перетворення;

t – поточний час;

μ – деяка сукупність параметрів моделі.

Нехай проведені вимірювання реального параметра і в результаті отримана вибірка y_1, y_2, \dots, y_n , а модель вимірювань описується рівнянням:

$$y(t) = x(t) + \varepsilon(t),$$

де $\varepsilon(t)$ – похибка вимірів.

Процес $\varepsilon(t)$ задовольняє умовам стаціонарності з нульовим середнім і дисперсією σ_ε^2 . Тоді висновок про адекватність моделі реальному поведженню параметра може бути зроблений на основі аналізу статистичних властивостей процесу $b(t) = y(t) - x(t, \tilde{\mu})$.

Оцінки $\tilde{\mu}$ отримуються у припущенні, що модель з деякою точністю адекватно описує реальне поведження параметра. Якщо оцінки $\tilde{\mu}$ є спроможними, то статистичні властивості процесів $b(t)$ і $\varepsilon(t)$ із збільшенням обсягу вибірки будуть все більш схожими. Тому як основну гіпотезу H_0 приймають гіпотезу, яка стверджує, що для адекватної моделі статистичні властивості процесів $b(t)$ та $\varepsilon(t)$ повинні бути тотожними. В цьому випадку вирішальне правило зазвичай синтезують на основі критеріїв перевірки статистичних гіпотез, що виходять із властивостей математичного очікування і дисперсії стаціонарного процесу $\varepsilon(t)$ [4]. Якщо дисперсія похибок вимірів апріорно невідома, то найбільш простий критерій перевірки адекватності моделі полягає у послідовній перевірці гіпотез $H_0 : E\{b(t)\} = m_\varepsilon$ і $H_0 : E\{b^2(t)\} = \text{const}$, яка впливає із стаціонарності процесу вимірювань $\varepsilon(t)$ [4,5].

Якщо похибки вимірів розподілені за нормальним законом, то для перевірки гіпотези $H_0 : m_b = m_\varepsilon$ можливо використовувати той факт, що для адекватної моделі статистика $t_b = \frac{(b^* - m_b)}{S_b} \sqrt{n-1}$ підкоряється розподіленню Стюдента з $(n-1)$ -м ступенем волі. Якщо $\frac{(b^* - m_b)}{S_b} \sqrt{n-1} > t(\alpha, n-1)$, то гіпотезу H_0 слід відхилити. Квантілі $t(\alpha, n-1)$ для різних значень n та рівняння значущості α табульовані, а значення b^* та S_b розраховуються за виразами:

$$b^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i; \quad S_b^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (b_i - b^*)^2.$$

Перевірку гіпотези $H_0 : E\{b^2(t)\} = \text{const}$ можливо провести у наступній послідовності [4]:

Вибірка $b(t)$ розбивається на дві приблизно однакові групи, які не перетинаються, $b_1, \dots, b_\ell; b_{\ell+1}, \dots, b_n$;

Для кожної групи розраховуються значення:

$$S_I^2 = \frac{1}{\ell-1} \sum_{i=1}^{\ell} (b_i - b_i^*)^2; \quad S_{II}^2 = \frac{1}{n-\ell-1} \sum_{i=\ell+1}^n (b_i - b_{II}^*)^2;$$

$$b_i^* = \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} b_i; \quad b_{II}^* = \frac{1}{n-\ell} \sum_{i=\ell+1}^n b_i.$$

Знаходиться величина статистики Фішера:

$$F = \max \left[\frac{S_I^2}{S_{II}^2}; \frac{S_{II}^2}{S_I^2} \right].$$

Визначаються ступені волі:

$$\left. \begin{matrix} k_1 = \ell - 1 \\ k_2 = n - \ell - 1 \end{matrix} \right\}, \quad \text{при } S_I^2 > S_{II}^2; \quad \left. \begin{matrix} k_1 = n - \ell - 1 \\ k_2 = \ell - 1 \end{matrix} \right\}, \quad \text{при } S_I^2 < S_{II}^2.$$

Для визначених k_1, k_2 та заданому рівню значущості α визначають критичне значення $F^+(\alpha, k_1, k_2)$;

Якщо $F < F^+(\alpha, k_1, k_2)$, то гіпотезу $H_0 : E\{b^2(t)\} = \text{const}$ слід рахувати дійсною при довірчій ймовірності $1 - 2\alpha$. В іншому випадку гіпотезу H_0 слід відкинути.

Таким чином, якщо обидві гіпотези $H_0 : E\{b(t)\} = 0$, та $H_0 : E\{b^2(t)\} = \text{const}$ є дійсними, то можна зробити висновок про адекватність моделі до реального поведження параметра, що досліджується.

Як реальний параметр для перевірки адекватності візьмемо телеметричний параметр (ТМП) “ТН-1” системи електропостачання космічного апарата (КА) “Січ-1”, який характеризував зміну струму навантаження. Для аналізу адекватності згідно з наведеною методикою був обраний інтервал вимірів параметра “ТН-1” з номерами $k = \overline{200, 1000}$. Значення отриманих на інтервалі $k = \overline{200, 1000}$ вимірів параметра “ТН-1”, разом із значеннями, що моделювались, наведені на рис. 1.

Для реалізації наведеної методики весь інтервал аналізу був поділений на підінтервали обсягом 200 вимірів. Результати перевірки адекватності моделі реальному поведженню ТМП на інтервалі аналізу, наведені у табл. 1. Аналіз даних, наведених у табл. 1, дозволяє зробити висновок, що модель адекватна реальному поведженню ТМП, тому що статистики F та t_b для всіх під інтервалів не перевищують з довірчою ймовірністю 0,999 критичного значення $F^+(\alpha, k_1, k_2) = 1,4$ та $t(\alpha, n) = 3,29$ відповідно [9].

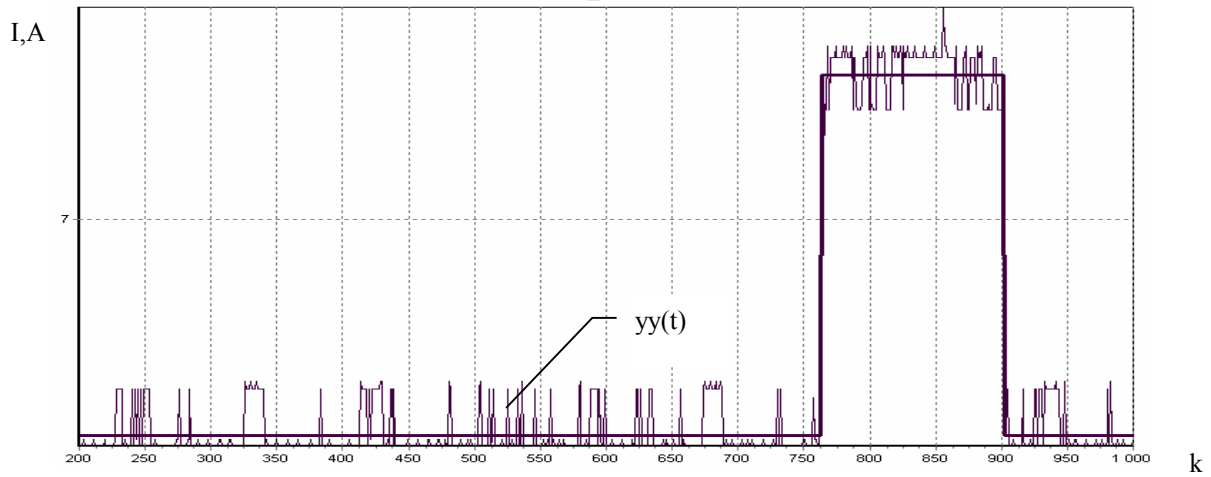


Рис. 1. Виміри та модельне значення параметра “ТН-1”

Таблиця 1

Результати перевірки адекватності моделі

№ ділянки	№ вимірів	b^*, A	t_b	S_b, A	F	
1	200,...,400	0,00064	0,26	0,03516	1,23	1,11
2	401,...,600	0,0016	0,71	0,03165		
3	601,...,800	0,001	0,47	0,03	1,12	1,12
4	801,...,1000	0,0018	0,8	0,0318		

Підвищення вірогідності визначення значення ТМП за даними отриманих вимірів можливо на етапі обробки вимірів через використання певних методів оцінювання .

При цьому, якщо оцінка ТМП проведена правильно, то згідно з методикою, що використовувалась для перевірки адекватності моделі, також можливо стверджувати, що процес $b(t) = \hat{x}(t) - y(t)$ буде мати ті самі статистичні властивості, що і $\varepsilon(t)$. Результати оцінювання параметра ТН-1 за даними вимірів на інтервалі $k = \overline{200, 1000}$ наведені на рис. 2, а значення статистики $S(k)$, що характеризує суттєві зміни параметра – на рис. 3.

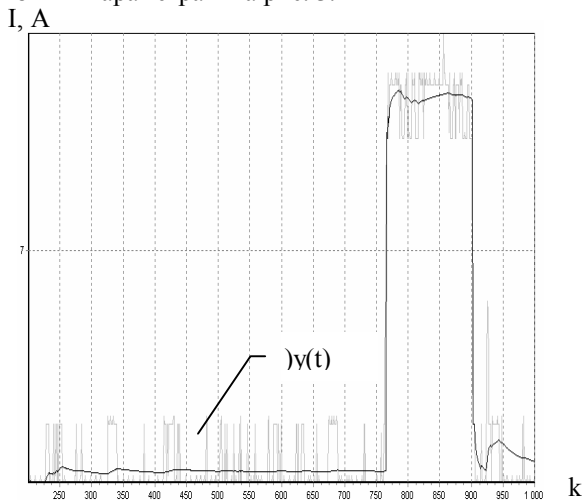


Рис. 2. Оцінка ТМП “ТН-1”

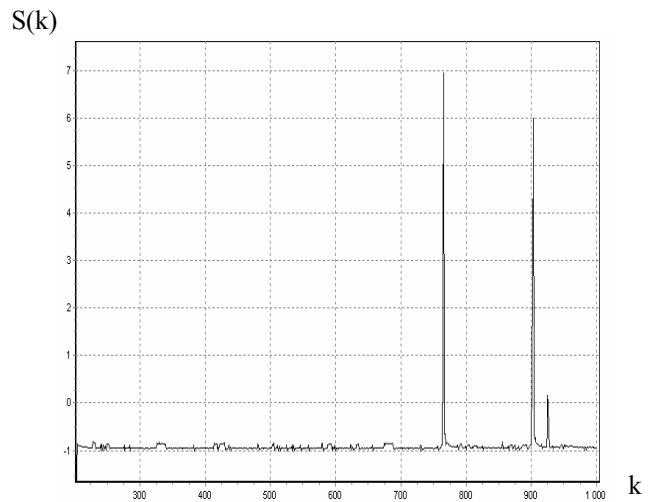


Рис. 3. Значення статистики $S(k)$

Результати перевірки стаціонарності процесу $b(t)$ згідно з вищевикладеною методикою наведені у табл. 2. Аналіз наведених у табл. 2 даних дозволяє зробити висновок, що, як і для випадку перевірки адекватності моделі, статистики F та t_b^ϵ для відповідних під інтервалів також не перевищують критичних значень з довірчою ймовірністю 0,999.

Таблиця 2

Перевірка стаціонарності $b(t)$

№ ділянки	№ вимірів	\check{b}^*, A	t_b^ϵ	$S_{b_i}^\epsilon, A$	F	
1	200, ..., 400	0,00065	0,26	0,03491	1,25	1,3
2	401, ..., 600	-0,0013	-0,59	0,03125		
3	601, ..., 800	0,0024	0,93	0,0362	1,03	
4	801, ..., 1000	-0,0018	-0,71	0,0357		

Аналіз наведених на рис. 3 даних дозволяє стверджувати, що на інтервалі вимірів $k = \overline{200, 1000}$ перевищення граничного значення прийняття рішення 4,5 статистикою $S(k)$, яка розраховується за даними отриманих вимірів і являє собою логарифм відношення апостеріорних щільностей розподілу ймовірностей для випадків наявності та відсутності змін у поведженні параметра, відмічається лише у моменти, що відповідають вимірам з номерами 767 та 904. Отже інші зміни значення параметра “ТН-1” на інтервалі $k = \overline{200, 1000}$ можливо вважати несуттєвими.

Значення вимірів та оцінок \hat{I} телеметричного параметра “ТС-1”, що характеризував зміни струму сонячної батареї КА “Січ-1”, наведені на рис. 4.

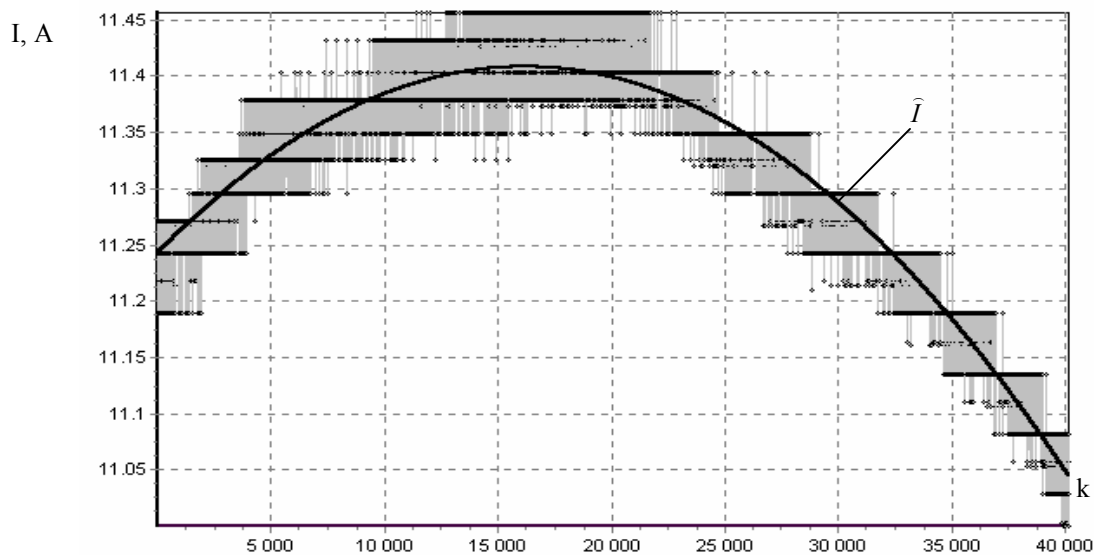


Рис. 4. Виміри та оцінки ТМП “ТС-1”.

Фільтрація вимірів телеметричного параметру “ТС-1” проводилась за допомогою полінома другого ступеня у зв’язку з тим, що він належить до параметрів, що повільно змінюються.

Для проведення перевірки правильності оцінювання значень ТМП за допомогою поліному другого ступеня весь обсяг вибірки $\check{b}(t)$ був поділений на дві приблизно однакові групи, які не перетинаються $k = \overline{1, 20000}$ та $k = \overline{20001, 40000}$. Результати розрахунків, що були проведені для перевірки стаціонарності процесу $\check{b}(t)$ згідно з вищевикладеною методикою, наведені у табл. 3. Аналіз наведених у табл. 3 даних дозволяє зробити висновок, що статистики F та t_b^ϵ для відповідних підінтервалів не перевищують критичних значень з довірчою ймовірністю 0,999. Отже процес $\check{b}(t)$ є стаціонарним, що свідчить про те, що оцінки ТМП “ТС-1” фактично відповідають дійсному значенню параметра.

Таблиця 3

Перевірка стаціонарності $b^{\check{}}(t)$ при проведенні оцінювання ТМП "ТС-1"

№ ділянки	№ вимірів	$b^{\check{}}, A$	t_b^{ϵ}	$S_b^{\epsilon} A$	F
1	1, ..., 20000	0,00051	2,89	0,0249	1,004
2	20001, ..., 40000	0,00056	3,168	0,0250	

Висновки. Таким чином, методика перевірки адекватності моделі, в умовах, коли як результати проведених експериментів використовуються виміри параметрів, що моделюються, базується на статистичній теорії перевірки гіпотез. При цьому вважалось, що похибки вимірів являють випадковий стаціонарний процес і розподілені за нормальним законом з нульовим математичним очікуванням та визначеною, але апріорно, невідомою дисперсією. Через застосування статистичної теорії перевірки гіпотез доведено, що запропонована методика може бути використана як для визначення адекватності розроблених моделей, так і правильності проведення оцінювання параметрів за даними отриманих вимірів.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 399 с.
2. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1971. – 326 с.
3. Белов Ю.А., Диденко В.П., Козлов Н.Н. и др. Математическое обеспечение сложного эксперимента. – Т. 2. – Математические модели при измерениях. – Киев: Наук. думка, 1983. – 264 с.
4. Железнов И.Г. Сложные технические системы (оценка характеристик): Учеб. пособие для техн. вузов. – М.: Высш. школа, 1984. – 119 с.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – Учебное пособие для вузов. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 2000. – 383 с.
6. Огарков М.А. Методы статистического оценивания параметров случайных процессов. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 208 с.
7. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул: Учебное пособие для вузов. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1988. – 239 с.
8. Жовинский А.Н., Жовинский В.Н. Инженерный экспресс-анализ случайных процессов. – М.: Энергия, 1979. – 112 с.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Под ред. И.Г. Арамановича. – М.: Наука, 1984. – 832 с.

АНДРЕЄВ Олександр Володимирович – кандидат технічних наук, доцент кафедри радіотехніки Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– обробка інформації в інформаційно-вимірювальних системах.

МУКОМЕЛ Олександр Миколайович – викладач кафедри космічних систем Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– прийом та обробка телеметричної інформації.

ТОПОЛЬНИЦЬКИЙ Павло Петрович – кандидат технічних наук, доцент, начальник кафедри космічних систем Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– моделювання вимірів у радіотехнічних системах.

ФРИЗ Сергій Петрович – кандидат технічних наук, доцент кафедри космічних систем Житомирського військового інституту радіоелектроніки ім. С.П. Корольова.

Наукові інтереси:

– математичне моделювання у інформаційно-вимірювальних системах.

Подано 29.01.2007

Андреев О.В., Мукомел О.М., Топольницький П.П., Фриз С.П. Методика перевірки адекватності розроблених математичних моделей за даними проведених вимірювань

Andreev O. V., Mukomel O.M., Topolnicky P.P., Friz S.P. A technique of check of adequacy of the developed mathematical models on the data of measurements.

Андреев А.В., Мукомел О.М., Топольницький П.П., Фриз С.П. Методика проверки адекватности разработанных математических моделей по данным измерений.

УДК 629.783

Методика перевірки адекватності розроблених математичних моделей за даними проведених вимірювань / О.В. Андреев, О.М. Мукомел, П.П. Топольницький, С.П. Фриз

Запропоновано методику перевірки адекватності моделі за даними вимірів параметрів, що моделюються. Наведені приклади застосування запропонованої методики для перевірки адекватності розроблених моделей за даними вимірювань телеметричних параметрів системи енергопостачання космічного апарата "Січ-1".

УДК 629.783

Методика проверки адекватности разработанных математических моделей по данным измерений / А.В. Андреев, **О.М. Мукомел**, П.П. Топольницький, С.П. Фриз

Предложена методика проверки адекватности модели по данным измерений моделируемых параметров. Приведены примеры применения предложенной методики для проверки адекватности разработанных моделей по измерениям телеметрических параметров системы энергоснабжения космического аппарата "Сич-1".

УДК 629.783

A technique of check of adequacy of the developed mathematical models on the data of measurements / O.V. Andreev, O.M. Mukomel, P.P. Topolnicky, S.P. Friz

The technique of check of adequacy to model on the data of measurements of simulated parameters is offered. The examples of application of the offered technique for check of adequacy of the developed models on measurements of telemetering parameters of system of power supply of a space vehicle "Sich-1" are given.