

В.І. Лаврик, д.т.н., проф.

І.А. Скуратівська, аспір.

Національний університет "Кієво-Могилянська Академія"

АНАЛІЗ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ЯКОСТІ ПОВЕРХНЕВОГО СТОКУ ПРОМИСЛОВИХ ТЕРИТОРІЙ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧНОГО ТА ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Стаття присвячена проблемі оцінки якості поверхневого стоку з територій промислових підприємств гірничовидобувної промисловості. На основі представлених математичних моделей поверхневого стоку вивчається динаміка концентрації розчиненого кисню як основного показника якості води водного об'єкта з врахуванням процесів, які найтісніше пов'язані з кругообігом кисню водної екосистеми. За результатами досліджень сформульовані пропозиції щодо більш ефективного керування водовідвідною системою підприємств.

Вступ. Україна за запасами водних ресурсів, які доступні для користування, належить до найменш забезпечених серед європейських держав. Середньорічна водозабезпеченість в Україні нижче норми в 15 разів, при цьому споживання свіжої води на одиницю виробленої продукції перевищують цей показник, порівняно до Франції, у 2,5 рази, Німеччини – у 4,3, Великої Британії та Швеції – у 4,2 [2, 10]. Розвиток сучасного виробництва супроводжується зростаючим використанням водних ресурсів. Зокрема об'єкти гірничовидобувної промисловості вирізняються значним перевищенням об'ємів стічних вод над об'ємами водоспоживання [8]. Промисловість світу включає у виробничий процес близько 20 % води, яку використовує людство. Таке споживацьке відношення до цього природного ресурсу, призвело до проблеми, яка наразі виходить на перше місце. Кількість якісної води невпинно зменшується. Відбулося таке залучення водних ресурсів в господарський обіг, що вони перетворилися на головний лімітуючий компонент соціально-економічного розвитку країни [10]. Дві третини питного водопостачання в Україні забезпечується за рахунок поверхневих вод. Вони формуються на площі водозбору. Внаслідок свого гіпсометричного розташування водні об'єкти (річки, озера, водосховища, канали) є кінцевою ланкою стокової акумуляції більшої частини рухомих техногенних речовин, що утворюються на площі водозбору. Якість води водного об'єкта дає можливість отримати інформацію про рівень забруднення цілого регіону, який включає дану водну систему. Тому оцінка якості поверхневого стоку урбанізованих територій є сьогодні досить актуальна.

Аналіз наукових досліджень та публікацій. Серед показників якості води особливе місце відводиться концентрації розчиненого кисню (РК) та концентрації легкоокислюваної органічної речовини. Як відомо [9], мірою кількості у воді органічної речовини та інтенсивності її деструкції є величина біохімічної потреби кисню (БПК), яку невірно інколи ототожнюють з біохімічним споживанням кисню (БСК) при деструкції органічної речовини. Оскільки існує тісний зв'язок між кількістю (концентрацією) в воді розчиненого кисню і наявністю органічної речовини [7], то при дослідженні гідробіологічних і гідрохімічних процесів доцільно застосовувати методи математичного та імітаційного моделювання. Представлені в даній статті результати є продовженням досліджень, розпочатих в роботі [5]. Тому лише коротко наведемо основні положення щодо математичної моделі та процесів, які знайшли в ній своє відображення.

Постановка задачі. Дослідимо динаміку концентрації РК та БПК при проходженні водним потоком вздовж відвідної системи, яка складається із басейнів самоочищення та водотоків.

Результати досліджень. Кожний з елементів водовідвідної системи характеризується набором параметрів, які пов'язані з процесами, що відбуваються на площі водозбору та внутрішньобасейновими процесами. Зокрема враховуються процеси водообміну, розбавлення та трансформації [3, 4]. У водотоках ці процеси більш інтенсивні, що відображається в різних значеннях відповідних параметрів.

Для побудови диференціальних рівнянь, які описують динаміку РК та БПК, використаємо закон динамічної рівноваги у такому вигляді:

$$\frac{dm}{dt} = P + R, \quad (1)$$

де P описує швидкість надходження речовини у басейні за рахунок вхідних потоків (у випадку відкритої системи); R – швидкість витікання або трансформації речовини.

На основі співвідношення (1) побудовано [6] рівняння динаміки РК та БПК в басейні самоочищення.

$$W \frac{dC_{PK}}{dt} = \sum_{k=1}^n q_k c_{PK}^k - C_{PK} \sum_{k=1}^n q_k + \beta W (C_{PK}^* - C_{PK}) - \alpha W C_{BPK}; \tag{2}$$

$$W \frac{dC_{BPK}}{dt} = \sum_{k=1}^n q_k c_{BPK}^k - C_{BPK} \sum_{k=1}^n q_k - \alpha W C_{BPK}, \tag{3}$$

де c_{PK}^k, c_{BPK}^k – концентрації відповідно РК та BPK, які надходять до басейну самоочищення з вхідним потоком q_k із k -го каналу чи водотоку; C_{PK}, C_{BPK} – концентрації РК та BPK в басейні самоочищення об’ємом W ; α – коефіцієнт трансформації забруднюючої речовини (органічного забруднення); C_{PK}^* – концентрація кисню у воді при повному насиченні (рівноважна концентрація розчиненого у воді кисню при даному атмосферному тиску та при даній температурі води); β – коефіцієнт аерації.

У водотоці швидкості протікання процесів деструкції вважаються значно меншими, ніж швидкості течії між басейнами, тому для обчислення концентрації компонентів можна використати стаціонарні моделі [6]:

$$\begin{aligned} v \frac{dc_{BPK}}{dx} + \alpha c_{BPK} &= 0; \\ v \frac{dc_{PK}}{dx} + \beta (c_{PK} - C_{PK}^*) + \alpha c_{BPK} &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

де c_{BPK}, c_{PK} – концентрації BPK і РК у водотоці відповідно; v – швидкість течії у водотоці; x – просторова координата, яка змінюється від початку водотоку ($x = 0$) до його закінчення ($x = L$).

Розв’язуючи рівняння (4), отримаємо значення концентрації BPK в точці $x = L$

$$\begin{aligned} c_{BPK}(x = L) &= c_{BPK}^0 e^{-\alpha \frac{L}{v}}; \\ c_{PK}(x = L) &= \left(c_{PK}^0 - C_{PK}^* + \frac{\alpha}{\beta - \alpha} c_{BPK}^0 \right) e^{-\beta \frac{L}{v}} + C_{PK}^* - \frac{\alpha}{\beta - \alpha} c_{BPK}^0 e^{-\alpha \frac{L}{v}}, \end{aligned} \tag{5}$$

де c_{BPK}^0 та c_{PK}^0 – концентрація органічного забруднення та розчиненого кисню на вході у водоток. Слід зауважити, що способів сполучень басейнів самоочищення між собою в поєднанні із зовнішніми надходженнями стічних стоків зростає зі збільшенням кількості басейнів. Дослідивши структури з’єднання басейнів самоочищення і водотоків, можна побудувати типову математичну модель трансформації забруднюючої речовини. Властивості таких транспортних систем та трансформаційні процеси, які супроводжують стік до основної водойми, можна описати на прикладі аналізу водовідвідної системи з трьох басейнів самоочищення, які з’єднані між собою водотоками. Цікаво дослідити вплив на процеси самоочищення різних способів розміщення басейнів самоочищення, зокрема таких, як показано на рис. 1 (схема I–II). Зі стаціонарності моделі у водотоці впливає, що вихідний потік з одного басейну після проходження каналу слід враховувати зі сталим множником. Зокрема концентрації BPK та РК після виходу з k -го басейна самоочищення, проходження каналу знайдемо за формулами (5), які запишемо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} C_{BPK}^{k+1}(t + \tau) &= C_{BPK}^{k0} e^{\alpha \frac{L}{v}}; \\ C_{PK}^{k+1}(t + \tau) &= C_{PK}^{k0} e^{-\beta \frac{L}{v}} + \delta, \end{aligned} \tag{6}$$

де $\tau = \frac{L}{v}$ – час проходження забрудненням водотоку, стала $\delta = C_{PK}^* \left(1 - e^{-\beta \frac{L}{v}} \right) +$

$$+ \frac{\alpha}{\beta - \alpha} C_{BPK}^{k0} \left(e^{-\beta \frac{L}{v}} - e^{-\alpha \frac{L}{v}} \right).$$

З математичної точки зору, співвідношення (6) визначають лінійні перетворення величин. Розглянемо більш детально випадок, коли довжина водотоків невелика. У такому разі на процеси самоочищення будуть впливати лише басейни. А при переході від одного басейна до іншого величини концентрацій не зазнаватимуть лінійних перетворень виду (6).

Маючи за мету порівняти результати імітаційного моделювання представлених схем, розглянемо чотири вхідні зовнішні потоки $q_i, i = 1, 2, 3, 4$ до водовідвідної системи та встановимо ідентичні умови

протікання процесів у басейнах. Зокрема $W_i = W$, $C_{PK}^1 = C_{PK}^2 = C_{PK}^3 = C_{PK}^4$, $C_{БПК}^1 = C_{БПК}^2 = C_{БПК}^3 = C_{БПК}^4$, $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$.

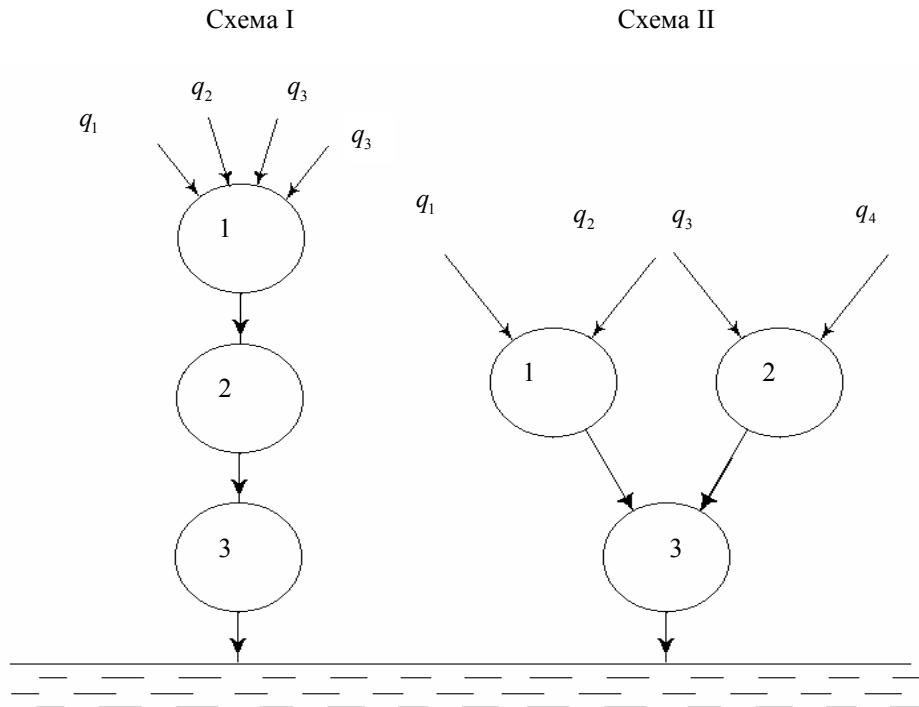


Рис. 1. Схеми розміщення басейнів самоочищення та водотоків

Для опису динаміки БПК при розташуванні басейнів самоочищення за схемою I на основі співвідношення (3) будемо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dC_{БПК}^1}{dt} &= \frac{q_1 C_{БПК}^1 + q_2 C_{БПК}^2 + q_3 C_{БПК}^3 + q_4 C_{БПК}^4}{W_1} - \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) C_{БПК}^1}{W_1} - \alpha_1 C_{БПК}^1 ; \\ \frac{dC_{БПК}^2}{dt} &= \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) C_{БПК}^1}{W_2} - \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) C_{БПК}^2}{W_2} - \alpha_2 C_{БПК}^2 ; \\ \frac{dC_{БПК}^3}{dt} &= \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) C_{БПК}^2}{W_3} - \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) C_{БПК}^3}{W_3} - \alpha_3 C_{БПК}^3 . \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогічно для динаміки РК отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{dC_{PK}^1}{dt} &= \frac{q_1 C_{PK}^1 + q_2 C_{PK}^2 + q_3 C_{PK}^3 + q_4 C_{PK}^4}{W_1} - \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) C_{PK}^1}{W_1} + \\ &+ \beta_1 (C_{PK1}^* - C_{PK}^1) - \alpha_1 C_{БПК}^1 ; \\ \frac{dC_{PK}^2}{dt} &= \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) C_{PK}^1}{W_2} - \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) C_{PK}^2}{W_2} + \beta_2 (C_{PK2}^* - C_{PK}^2) - \alpha_2 C_{БПК}^2 ; \\ \frac{dC_{PK}^3}{dt} &= \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) C_{PK}^2}{W_3} - \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) C_{PK}^3}{W_3} + \beta_3 (C_{PK3}^* - C_{PK}^3) - \alpha_3 C_{БПК}^3 . \end{aligned} \quad (8)$$

Для опису динаміки БПК та РК при розташуванні басейнів самоочищення за схемою II використаємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dC_{БПК}^1}{dt} &= \frac{q_1 C_{БПК}^1 + q_2 C_{БПК}^2}{W_1} - \frac{(q_1 + q_2) C_{БПК}^1}{W_1} - \alpha_1 C_{БПК}^1 ; \\ \frac{dC_{БПК}^2}{dt} &= \frac{q_3 C_{БПК}^3 + q_4 C_{БПК}^4}{W_2} - \frac{(q_3 + q_4) C_{БПК}^2}{W_2} - \alpha_2 C_{БПК}^2 ; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dC_{БПК}^3}{dt} &= \frac{(q_1 + q_2)C_{БПК}^1 + (q_3 + q_4)C_{БПК}^2}{W_3} - \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)C_{БПК}^3}{W_3} - \alpha_3 C_{БПК}^3 ; \\
 \frac{dC_{РК}^1}{dt} &= \frac{q_1 C_{РК}^1 + q_2 C_{РК}^2}{W_1} + \beta_1 (C_{РК1}^* - C_{РК}^1) - \frac{(q_1 + q_2)C_{РК}^1}{W_1} - \alpha_1 C_{БПК}^1 ; \\
 \frac{dC_{РК}^2}{dt} &= \frac{q_3 C_{РК}^3 + q_4 C_{РК}^4}{W_2} + \beta_2 (C_{РК2}^* - C_{РК}^2) - \frac{(q_3 + q_4)C_{РК}^2}{W_2} - \alpha_2 C_{БПК}^2 ; \\
 \frac{dC_{РК}^3}{dt} &= \frac{(q_1 + q_2)C_{РК}^1 + (q_3 + q_4)C_{РК}^2}{W_3} + \beta_3 (C_{РК3}^* - C_{РК}^3) - \frac{(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)C_{РК}^3}{W_3} - \alpha_3 C_{БПК}^3 .
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Оберемо такі значення параметрів моделей $C_{РК}^1 = 1$ кг/м³, $C_{БПК}^1 = 1$ кг/м³, $W = 5$ м³, $q_1 = q_3 = 4$ м³/добу, $q_2 = q_4 = 3$ м³/добу, які є тестовими, та $C_{РК}^* = 5$ кг/м³, $\alpha = 0,02$ доба⁻¹, $\beta = 0,03$ доба⁻¹, які відповідають значенням параметрів для природних поверхневих вод [1, 2]. Оскільки динамічні системи (7)–(10) є лінійними, то можна знайти їх аналітичний розв'язок. Однак він є доволі громіздким, тому на даному етапі вивчення проблеми використаємо альтернативний спосіб знаходження розв'язку – числовий. Проінтегруємо динамічні системи (7)–(10) методом Рунне–Кутта при початкових умовах $C_{РК}^0 = 0$ кг/м³, $C_{БПК}^0 = 3$ кг/м³ (рис. 1). З аналізу графіків рис. 1, а та б випливає, що динаміка БПК залежить від способу розташування басейнів, що, за суттю, характеризує структуру водозбірної площі, та простежується як в різних значеннях стаціонарних концентрацій, так і в характері зміни концентрації в останньому басейні.

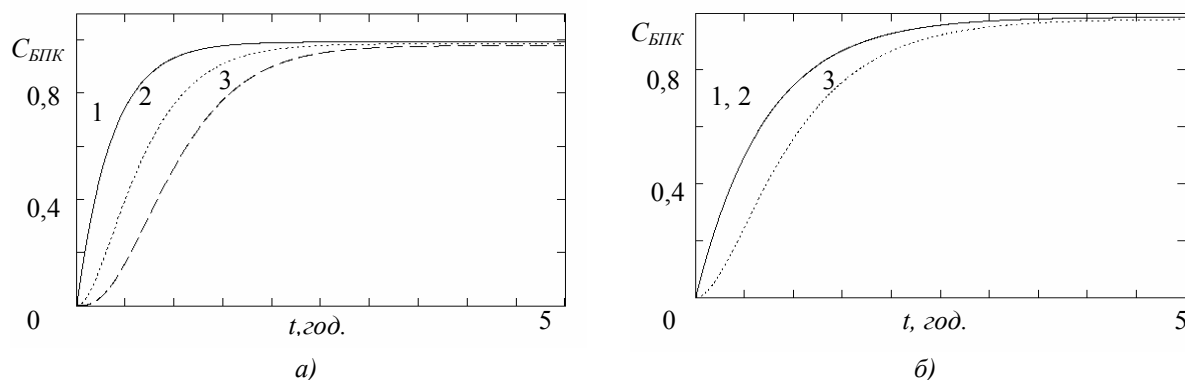


Рис. 2. Динаміка БПК у трьох басейнах: а – за схемою I; б – схемою II. Траєкторії 1, 2, 3 відповідають значенню концентрації у відповідних басейнах самоочищення

Відмінність динаміки РК, обрахованої для схем I та II (рис. 2), також мають аналогічні більш виражені відмінності (порівняно на рис. 3, а та б).

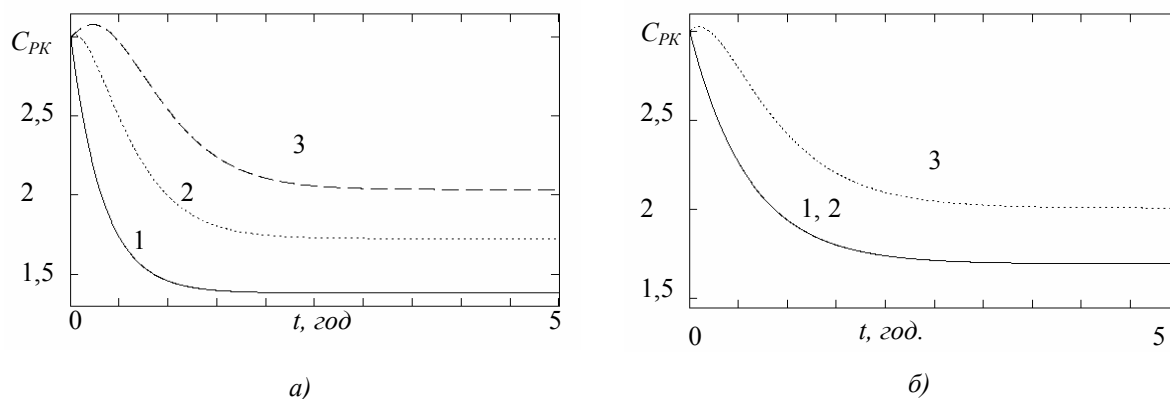


Рис. 3. Динаміка РК у трьох басейнах:
за схемою I (а) та схемою II (б)

Для оцінки трансформуючої здатності схем водотоків введемо величини трансформації:

$$\Omega_{БПК}(t) = \frac{C_{БПК}^3 \sum_{k=1}^4 q_k}{\sum_{k=1}^4 q_k C_{БПК}^k};$$

$$\Omega_{РК}(t) = \frac{C_{РК}^3 \sum_{k=1}^4 q_k}{\sum_{k=1}^4 q_k C_{РК}^k}.$$
(11)

У випадку лінійних динамічних систем (7)–(10) динаміку коефіцієнта Ω можна отримати не тільки у числовому вигляді, але й у вигляді аналітичної формули. Обчисливши стаціонарні значення концентрацій з систем рівнянь (7)–(10) шляхом прирівнювання правих частин співвідношень до нуля та підставивши у формулу (11), наприклад, для схеми I, отримуємо такі стаціонарні значення коефіцієнтів:

$$\overline{\Omega}_{БПК} = \left(\frac{Q}{\alpha W + Q} \right)^3 \frac{\sum_{k=1}^4 q_k c_{БПК}^k}{Q};$$

$$\overline{\Omega}_{РК} = \frac{(Q + \alpha W)^3 \left(Q^2 \sum_{k=1}^4 q_k c_{РК}^k + \beta C_{РК}^* W (3Q^2 + 3\beta QW + \beta^2 W^2) \right)}{(Q + \alpha W)^3 (Q + \beta W)^3} -$$

$$\frac{Q^2 \sum_{k=1}^4 q_k c_{РК}^k \{ Q^2 (1 + 2W) + W^2 (\beta^2 + \alpha^2 W + \alpha \beta W) + QW (3\alpha W + 2\beta + \beta W) \}}{(Q + \alpha W)^3 (Q + \beta W)^3}$$

де $Q = \sum_{k=1}^4 q_k$.

З аналізу графіка рис. 4, а випливає, що у початковий проміжок часу коефіцієнт трансформації $\Omega_{БПК}(t)$, обчислений за схемою II, більший, ніж $\Omega_{БПК}(t)$ схеми I. Однак в наступні моменти часу спостерігається протилежний випадок. При цьому з часом стаціонарні значення $\Omega_{БПК}$ співпадають по обох схемах.

Коефіцієнт зміни розчиненого кисню має більш складну динаміку: спостерігається утворення локального максимуму та точки перегину. Стаціонарні значення $\Omega_{РК}$ схем I та II не співпадають, при цьому коефіцієнт зміни кисню за схемою I на всьому проміжку часу більший, ніж за схемою II.

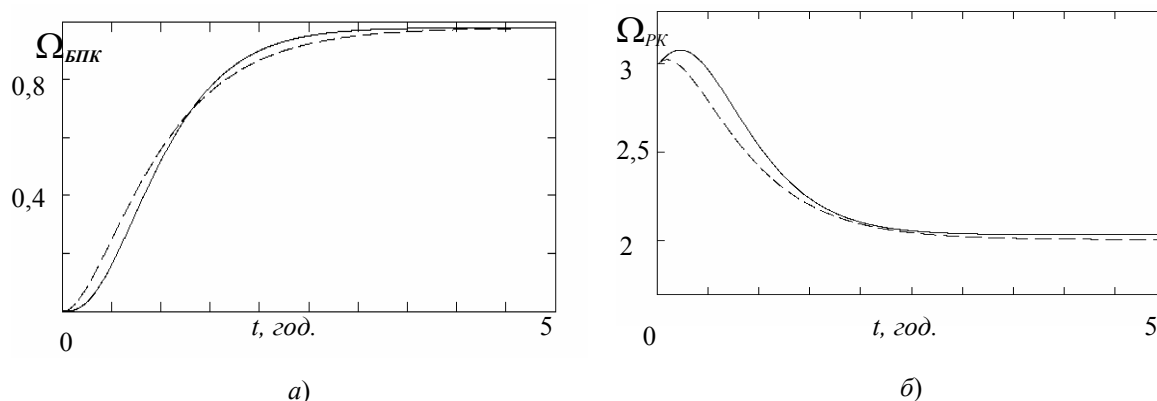


Рис. 4. Коефіцієнти трансформації: а – БПК; б – РК. Суцільною лінією позначена динаміка в схемі I, штриховою – в схемі II.

На основі проведених імітаційних експериментів можна зробити такі **висновки**:

1. Запропоновані математичні моделі дозволяють дослідити динаміку концентрації органічної речовини від моменту скиду до моменту надходження у основну водойму з врахуванням структури водостічної системи.

2. Запропоновано алгоритм оцінки трансформуючої здатності водовідвідної системи, що надає можливість розв'язання оберненої задачі про встановлення маси скидів органічного походження.

Отримані результати дозволяють ефективно врахувати структуру площі водозбору через моделювання системи водотоків та басейнів самоочищення. Очевидно, що аналогічним чином можна описати як завгодно складний граф, який зображає мережу водотоків. При цьому можна враховувати додаткові внутрішньоводоймні процеси: вплив динаміки фітопланктону, динаміки біогенних елементів (азоту, фосфору) тощо.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Вишневецький В.І., Косоветь О.У. Гідрологічні характеристики річок України. – Рівне, 2003. – 403 с.
2. Еколого-економічні проблеми довкілля Житомирщини / За ред. П.П. Михайленка. – Житомир, 2001. – 320 с.
3. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології. – К.: НУКМА, 2002. – 203 с.
4. Лаврик В.І. Сучасна методологія розв'язання фундаментальних і прикладних проблем гідроекології // Екологія довкілля та безпека життєдіяльності. – 2001. – № 1. – С. 20–23.
5. Лаврик В.І., Скуратівська І.А. Математичне та імітаційне моделювання процесів формування та регулювання поверхневого стоку територій гірничих підприємств // Вісник ЖДТУ / Технічні науки. – 2004. – Випуск II (29). – С. 234–239.
6. Лаврик В.І., Скуратівська І.А. Прогнозування та керування якістю поверхневого стоку за допомогою імітаційного математичного моделювання // НАУКОВІ записки. – 2004. – Т. 29 / Біологія та екологія. – С. 51–57.
7. Оксіюк О.П., Жукинський В.М., Лаврик В.І., Чернявська А.П. Методики екологічної оцінки та нормування якості поверхневих вод України // Екологія довкілля та безпека життєдіяльності. – 2003. – № 3. – С. 18–29.
8. Певзнер М.Е., Мальшев А.А., Мельников А.Д., Ушань В.П. Горное дело и охрана окружающей среды. – М.: Издательство Московского государственного горного университета, 2001. – 300 с.
9. Родзиллер Д.И. Прогноз качества воды водоемов-приемников сточных вод. – М.: Стройиздат, 1984. – 264 с.
10. Состояние окружающей среды в Европе: Вторая оценка. Обзор. Европейское агентство по охране окружающей среды. – Люксембург: Отдел официальных публикаций Европейского сообщества, 1998. – 43 с.

ЛАВРИК Володимир Іванович – доктор технічних наук, професор кафедри математики та екології Національного університету “Києво-Могилянська академія”.

Наукові інтереси:

- прикладна математика;
- математичне моделювання в екології.

СКУРАТИВСЬКА Інна Антонівна – аспірант кафедри екології Національного університету “Києво-Могилянська академія”.

Наукові інтереси:

- математичне моделювання в екології.

E-mail: skurativska@ukr.net

Подано 26.12.2006