УДК 519.67

С.І. Яремчук, к.ф.-м.н., проф.
Р.В. Бурда, аспір.
Житомирський державний технологічний університет

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗМІЩЕННЯ ОБ'ЄКТІВ З ВИКОРИСТАННЯМ АЛГОРИТМУ СПУСКУ ЗІ СТАЦІОНАРНОЇ ТОЧКИ

Розроблено алгоритм спуску зі стаціонарної точки у випадку двічі неперервно диференційованої функції цілі, який застосовано до задачі оптимізації розміщення об'єктів.

Вступ. При розв'язанні задач математичного програмування, в тому числі й в задачах оптимізації розміщення геометричних об'єктів в заданій області, часто виникає ситуація, коли отриманий розв'язок є стаціонарною точкою, яка не є точкою глобального або локального мінімуму. Така проблема має місце при застосуванні багатьох методів, в яких для знаходження вектора спуску використовується градієнт функції цілі. До таких методів відносяться, наприклад, методи градієнтного спуску, метод Ньютона та інші.

Аналіз джерел дослідження. Проблемі розміщення геометричних об'єктів присвячено багато робіт. Більшість з них розглядає задачи щільного розміщення об'єктів, розв'язання яких зводиться до розв'язання задач лінійного програмування [1–5].

Більш загальний випадок цієї проблеми, коли до функції цілі висувається лише вимога бути диференційованою, розглянуто у [6, 7]. У них множина допустимих розв'язків представляється у вигляді об'єднання опуклих підмножин. На підмножинах розв'язуються відповідні підзадачі. Розв'язок підзадачі здійснюється за допомогою методу G-проекцій [6] і модифікації методу можливих напрямків [7]. Для перебору вказаних підзадач використовуються розроблені авторами методи. Але у зв'язку з особливостями вихідної задачі знайдені таким чином розв'язки в більшості випадків не співпадають з глобальним мінімумом. В роботі [8] запропоновано метод штрафних функцій, який не потребує розв'язання зазначених підзадач. Його недоліком є те, що зупинка роботи методу відбувається в будь-якій стаціонарній точці, більшість з яких є сідловими.

В даній роботі запропоновано алгоритм, що дає можливість знайти напрямок спуску в сідловій точці, який застосовано до розв'язання задачі оптимізації розміщення прямокутних об'єктів в прямокутній області.

Постановка проблеми. Розглянемо наступну задачу оптимізації. Нехай в двовимірному евклідовому просторі є область Ω, що містить геометричні об'єкти $D_1, D_2 \ldots, D_m$. Область і об'єкти мають прямокутну форму. Розміщення геометричних об'єктів задається вектором $Z = \left(Z^1, Z^2 \ldots, Z^i \ldots, Z^m\right)$, де $Z^i\left(\xi_i, \eta_i\right)$ – координати полюсу i -го геометричного об'єкта. Розміри i -го об'єкта – d_i, h_i, а області – a, b. Об'єкти не можуть перетинатися між собою і виходити за межі області Ω. Потрібно знайти таке розміщення об'єктів (вектор Z^*), при якому сума відстаней від заданої точки $P \in \Omega$ до полюсу кожного джерела була максимальною. Математична модель цієї задачі має вигляд:

$$\chi(Z) = -\sum_{i=1}^{m} \left\| Z^i - P \right\|^2 \to \min ; \tag{1}$$

$$\left(\xi_i \geq \frac{d_i}{2}\right) \wedge \left(\eta_i \geq \frac{h_i}{2}\right) \wedge \left(\xi_i \leq a - \frac{d_i}{2}\right) \wedge \left(\eta_i \leq b - \frac{h_i}{2}\right) \forall i \in [1:m]; \tag{2}$$

$$\left|\xi_i - \xi_j\right| \geq d_{ij} \vee \left|\eta_i - \eta_j\right| \geq h_{ij}, \forall i, j \in [1:m] i \neq j, \tag{3}$$

де

$$d_{ij} = \frac{d_i - d_j}{2}, h_{ij} = \frac{h_i - h_j}{2}, i, j \in [1:m]. \tag{4}$$

Умова невиходу геометричного об'єкта D_i за межі області Ω задана виразом (2), а умова неперетину геометричних фігур між собою – виразом (3).

Задача (1)–(3) є задачею умовної оптимізації та може бути розв'язана за допомогою існуючих методів умовної оптимізації (метод можливих напрямків, проекції градієнта та ін.). Застосування цих методів потребує розбиття множини допустимих розв'язків, що визначається умовами (2), (3), на опуклі підмножини, а також додаткового математичного апарату для їх перебору. Кількість опуклих підмножин можна визначити за формулою $r = 4^{C_m^2}$ [7]. При кількості об'єктів $m > 6$ практично неможливо зробити перебір, оскільки кількість підмножин більше ніж 10^9 [7]. Тому пропонується задачу (1)–(3) розв'язувати методом штрафних функцій [8], який дозволяє замінити розв'язання задачі умовної оптимізації розв'язанням послідовності задач безумовної оптимізації.

В даному випадку отримаємо послідовність задач:

$$f(Z,C) = -\sum_{i=1}^{m} \left\| Z^i - P \right\|^2 + \Phi(Z,C) \to \min\ , \tag{5}$$

де C – параметр методу.

Функція штрафу $\Phi(Z,C)$ повинна задавати штраф на вихід об'єкта за межі області, а також на перетин об'єктів між собою.

Наприклад, за функцію штрафу можна обрати таку функцію:

$$\Phi(Z,C) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m} R(D_i, D_j, C) + \sum_{i=1}^{m} R_\Omega(D_i, C), \tag{6}$$

де $R(D_i, D_j, C)$ задає штраф на перетин об'єктів D_i та D_j між собою, а $R_\Omega(D_i, C)$ – на вихід об'єкта D_i за межі області Ω. З використанням апарату R-функцій Рвачова ці функції можна побудувати таким чином:

$$\begin{aligned} R\left(D_i, D_j, C\right) = \exp[(((\xi_i - \xi_j)^2 - d_{ij}^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 - h_{ij}^2 + \\ + \sqrt{((\xi_i - \xi_j)^2 - d_{ij}^2)^2 + ((\eta_i - \eta_j)^2 - h_{ij}^2)^2}\,) \times \\ \times(((\xi_i - \xi_j)^2 - d_{ij}^2)^2 + ((\eta_i - \eta_j)^2 - h_{ij}^2)^2))]\ ; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} R_\Omega\left(D_i, C\right) = \exp[-C(\xi_i - \frac{d_i}{2})] + \exp[-C(\eta_i - \frac{h_i}{2})] + [-C(a - \xi_i - \frac{d_i}{2})] + \\ + \exp[-C(b - \eta_i - \frac{h_i}{2})]. \end{aligned} \tag{8}$$

Функція цілі (5) має стаціонарні точки, серед яких багато сідлових. Покажемо це на наступному прикладі. Нехай маємо вхідні дані, показані на рис. 1.

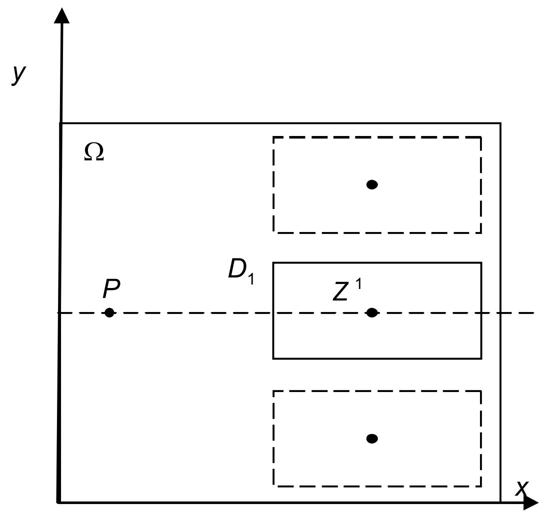

Рис. 1

При деякому значенні параметра C об'єкт D_1 не зможе рухатися праворуч паралельно осі абсцис через різке збільшення функції штрафу. З іншого боку, рух ліворуч призведе до збільшення вихідної функції цілі (1), і, як наслідок, функції (5), оскільки функція штрафу при цьому залишиться незмінною. В той же час рух об'єкта паралельно осі ординат в будь-який бік призведе до зменшення функції (5). Тобто отримана точка є сідловою, і градієнт функції цілі в ній дорівнює нулю. У цьому випадку потрібно застосувати метод спуску зі стаціонарної точки. А це, в свою чергу, дозволить розв'язати поставлену задачу із кращим значенням функції цілі (отримане розміщення може відповідати одному з прямокутників, які зображені пунктиром).

Мета статті. Розробити алгоритм спуску зі стаціонарної точки у випадку двічі неперервно диференційованої функції цілі та використати його в задачі оптимізації розміщення об'єктів.

Викладення основного матеріалу. Маємо задачу оптимізації:

$$f(x) \to \min, \ x \in R^n, \tag{9}$$

де $f(x)$ – двічі неперервно диференційована в R^n.

Нехай $\nabla f(x^*) = 0$, тобто в точці x^* виконуються необхідні умови локального екстремуму [9]. Із достатньої умови локального екстремуму випливає, що коли матриця $f''(x^*)$ визначена додатно, то точка x^* є точкою локального мінімуму.

Нехай точка x^* є стаціонарною і матриця других похідних $f''(x^*)$ є невизначеною або від'ємно визначеною. Це означає, що існує вектор спуску g та λ_0, для яких виконується нерівність:

$$f(x^* + \lambda g) < f(x^*), \forall \lambda \in (0; \lambda_0]. \tag{10}$$

Коли матриця $f''(x^*)$ визначена від'ємно, як g можна обрати будь-який вектор з R^n, норма якого дорівнює одиниці [1]. Якщо матриця других похідних невизначена, g ($\|g\| = 1$) знаходиться з умови:

$$\left(f''(x^*)g, g\right) < 0. \tag{11}$$

Оберемо із матриці $f''(x^*)$ m однойменних рядків та стовпчиків таким чином, щоб утворена матриця $B_{m\times m}$ була невизначеною мінімального порядку. Тобто для матриці $B_{m\times m}$ не повинно існувати невизначеної підматриці. Координатам вектора g, які не відповідають обраним рядкам та стовпчикам, присвоюємо значення, що дорівнює нулю. Тоді із (11) отримаємо нерівність:

$$(B_{m\times m} z, z) < 0. \tag{12}$$

Вектор z відповідає перенумерованим координатам вектора g, яким не було присвоєно значення, що дорівнює нулю.

Матриця $B_{m-1\times m-1}$ буде визначена або невід'ємно, або від'ємно, оскільки матриця $B_{m\times m}$ – невизначена матриця, яка не містить в собі невизначених підматриць.

Якщо матриця $B_{m-1\times m-1}$ визначена від'ємно, то за розв'язок можна обрати будь-який вектор z [10] за умови, що $z_m = 0$. Оскільки необхідно, щоб норма вектора g дорівнювала одиниці, то норма вектора z повинна бути такою ж. Наприклад, можна обрати як $z^* = z^*(1, 0, 0..., 0)$.

Якщо матриця $B_{m-1\times m-1}$ визначена невід'ємно, присвоїмо $z_m = 1$. Тоді нерівність (12) перетвориться у таку:

$$\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-1} b_{ij} z_i z_j + \sum_{i=1}^{m-1} b_{im} z_i + \sum_{j=1}^{m-1} b_{mj} z_j + b_{mm} < 0. \tag{13}$$

Оскільки матриця $B_{m-1\times m-1}$ визначена невід'ємно, ліва частина нерівності (15) представляє собою опуклу функцію. Тому дана нерівність може бути розв'язана з використанням існуючих методів математичного програмування з модифікацією на випадок необмеженості функції цілі знизу. Розв'язок нерівності (13) задовольнятиме також нерівності (12), але може не задовольняти умові $\|z\| = 1$.

Припустимо, що z' задовольняє умові (13), але норма z' не дорівнює одиниці. Тоді за розв'язок оберемо вектор z^*, координати якого знаходяться за формулою:

$$z^* = \left(\frac{z'_1}{\sqrt{z'_1 + ... + z'_{m-1} + 1}}, ..., \frac{z'_{m-1}}{\sqrt{z'_1 + ... + z'_{m-1} + 1}}, \frac{1}{\sqrt{z'_1 + ... + z'_{m-1} + 1}} \right). \tag{14}$$

Всім координатам вектора g, яким не було присвоєно значення, що дорівнює нулю, присвоюються відповідні координати вектора z^*. Отриманий вектор буде вектором спуску зі стаціонарної точки.

Висновки. Таким чином, в даній статті розроблено алгоритм спуску зі стаціонарної точки, який можна застосувати до задачі оптимізації розміщення об'єктів прямокутної форми. У випадку, коли матриця других похідних функції в стаціонарній точці визначена невід'ємно, необхідно проводити додаткові дослідження.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Стоян Ю.Г., Гиль Н.И.* Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов. – К.: Наукова думка, 1976. – 248 с.

2. *Fernadez de la Vega W., Lueker G.S.* Bin packing can be solved within 1+e in linear time. – Combinatorica, 1981. – № 1 – Pp. 349–355.
3. *Rarmarkar N., Karp R.M.* An Efficient approximation Scheme for the One-Dimensional Bin-Packing problem. – FOCS, 1981. – Pp. 321–320.
4. *Магас С.Л.* Об оптимальном раскрое полосы прямоугольными заготовками // Труды III респ. конф. "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе" (Канев, 14–16 сент. 1982 г.). – К.: Ин-т кибернетики АН Украины, 1982. – С. 92–93.
5. *Новожилова М.В.* Решение задачи поиска глобального екстремума линейной функции цели на структуре линейных неравенств. – Харьков, 1988. – 45 с. (Препр./ АН Украины. Ин-т. пробл. машиностроения № 292).
6. *Яремчук С.І., Рудюк Л.В.* Алгоритм розв'язання задачі розміщення прямокутників в прямокутній області // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. – 2005. – № 2. – С. 339–343.
7. *Яремчук С.І., Шаповалов Ю.О.* Модифікація методу можливих напрямків для задачі оптимізації розміщення // Вісник Хмельницького національного університету. – 2005. – № 5. – Ч. 1. – Т. 2. – С. 146–151.
8. *Яремчук С.І., Жовновський Д.О.* Застосування методу штрафних функцій для розв'язання задач оптимального розміщення джерел фізичних полів // Математичне моделювання. – Дніпродз. держ. техн. ун-т, 1998. – С. 37–39.
9. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 1. – М.: Наука, 1970. – 607 с.
10. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 431 с.

ЯРЕМЧУК Світлана Іванівна – кандидат фізако-математичних наук, профессор кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси

– екстремальні задачі;

– математичне моделювання.

БУРДА Роман Вадимович – аспірант кафедри програмного забезпечення обчислювальної техніки Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– методи оптимізації;

– комп'ютерне моделювання.

Подано 26.10.2006