

**РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ МЕТОДОМ ЕКВІВАЛЕНТНОЇ ЗАМІНИ ДЖЕРЕЛ ЖИВЛЕННЯ**

В роботі розглянуто можливості спрощення складних електричних кіл методом еквівалентної заміни ідеалізованих джерел напруги з послідовними внутрішніми опорами і джерел струму з паралельними внутрішніми провідностями. Проведено порівняльний розрахунок електричних кіл методами еквівалентної заміни джерел живлення, вузлових потенціалів та контурних струмів. Останній не вирізняється складністю розрахунків. Наведено приклад розрахунку складного електричного кола із заміною еквівалентних джерел живлення та з'єднаних зіркою пасивних і активних елементів на еквівалентний трикутник.

**Постановка задачі.** Сучасний напрямок розвитку енергозберігаючих і безвідходних технологій вимагає подальшого ускладнення технологічних процесів, збільшення їх складових. Це визначає відповідне ускладнення моделюючих електронних та електричних схем. Набувають також подальшого ускладнення електричні мережі, електричні та електронні пристрої і системи. Аналіз їх роботи не створює принципових труднощів. Але з ускладненням електричних схем зростає кількість незалежних змінних, які визначають їх роботу, і відповідно кількість незалежних рівнянь, які їх описують. Це ускладнює їх розв'язок.

Процеси, які відбуваються в електричних колах, визначаються діючими джерелами електричної енергії, які представляють у вигляді ідеалізованих джерел напруги  $E_i$  з послідовно увімкненими внутрішніми опорами  $R_i$ , або джерел струму  $J_i$  з паралельними внутрішніми провідностями  $G_i$ . Якщо  $J_i = E_i/R_i$ ,  $G_i = 1/R_i$ , обидва представлення джерел живлення є еквівалентними і можуть бути використані одне замість другого. Такі заміни дозволяють спростити електричне коло, зменшити кількість джерел живлення, перетворити складне коло в просте – спростити розрахунок електричного кола.

**Основна частина.** Еквівалентні перетворення описані різними авторами, але як допоміжний засіб при розрахунку електричних схем. Такі перетворення можуть бути використані як ефективний метод розрахунку складних електричних кіл. Нижче наведено приклади застосування методу еквівалентної заміни джерел живлення порівняно з іншими методами розрахунку електричних кіл.

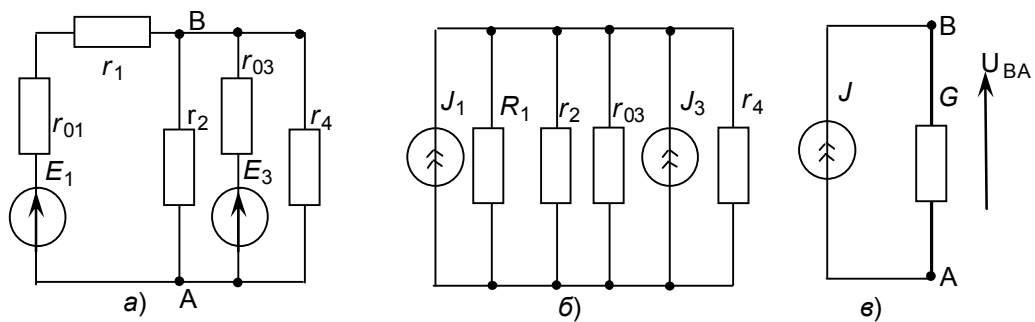


Рис. 1. Електрична схема кола: з двома джерелами напруги – а; з двома еквівалентними джерелами струму – б; з еквівалентним джерелом струму – в

Елементи електричного кола, зображеного на рис. 1, мають такі параметри:  $E_1 = 100$  В,  $E_2 = 60$  В,  $r_{01} = 2$  Ом,  $r_1 = 6$  Ом,  $r_2 = 10$  Ом,  $r_{03} = 1$  Ом,  $r_4 = 20$  Ом.

Для розрахунку цього кола методом еквівалентної заміни джерел живлення вважаємо, що внутрішній опір джерела  $E_1$  є  $R_1 = r_{01} + r_1$  і знаходимо сили струмів еквівалентних джерел струму  $J_1$  та  $J_3$ , зображених на рис. 1, б):

$$J_1 = E_1 / (r_{01} + r_1) = 100 / 8 = 12,5 \text{ А}, \quad J_3 = E_3 / r_{03} = 60 / 2 = 30 \text{ А}.$$

Паралельно з'єднані джерела струму  $J_1$  та  $J_3$  і резистори  $R_1$ ,  $r_2$ ,  $r_{03}$  та  $r_4$ , можна замінити еквівалентними, як показано на рис. 1, в):

$$J = J_1 + J_3 = 42,5 \text{ А}, \quad G = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_{03}} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{20} = 0,775 \text{ Ом}^{-1}.$$

Напруга  $U_{BA}$  в схемі рис. 1, в є напругою, яка діє також і в схемі рис. 1, а):

$$U_{BA} = J/G = 42,5/0,775 = 54,8 \text{ В.}$$

За обчисленим значенням напруги знаходимо невідомі струми:

$$J_1 = \frac{E_1 - U_{AB}}{r_{03} + r_1} = \frac{45,2}{8} = 5,65 \text{ А}, \quad J_2 = \frac{U_{AB}}{r_2} = \frac{54,8}{10} = 5,48 \text{ А},$$

$$J_3 = \frac{E_3 - U_{AB}}{r_{03}} = \frac{5,2}{2} = 2,6 \text{ А}, \quad J_4 = \frac{U_{AB}}{r_4} = \frac{54,8}{20} = 2,74 \text{ А}.$$

Перевірка:  $J_1 + J_3 = J_2 + J_4$ ;  $8,25 \text{ А} \approx 8,22 \text{ А}$ .

Для порівняння виконаємо розрахунок цього ж кола методом двох вузлів. Потенціал одного з вузлів, наприклад  $A$ , приймаємо нульовим  $\varphi_A = 0$ . Потенціал другого вузла  $B$  визначаємо з рівняння:

$$\varphi_B = I_{BB}/G_{BB}.$$

Тут  $I_{BB}$  – власний струм вузла, який є алгебраїчною сумою відношень електрорушійних сил (ЕРС) гілок, які сходяться у вузлі  $B$ , до опорів цих гілок;  $G_{BB}$  – власна провідність вузла  $B$  – сума провідностей всіх гілок, які сходяться у вузлі  $B$ :

$$I_{BB} = \frac{E_1}{r_{01} + r_1} + \frac{E_3}{r_3} = 42,5 \text{ А}, \quad G_{BB} = \frac{1}{r_{01} + r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = 0,775 \text{ Ом}^{-1},$$

$$\varphi_B = 42,5/0,775 = 54,8 \text{ В} = U_{BA}.$$

Це співпадає з попереднім розрахунком. Розрахунок струмів не відрізняється від попереднього.

Перший розрахунок з використанням еквівалентної заміни джерел живлення не складніший за другий, недоліком якого є необхідність використання додаткових понять власного струму вузла і власної провідності вузла.

Розглянемо більш складне електричне коло, зображене на рис. 2. Воно має 6 віток, 4 вузли та 3 незалежні контури. Елементи кола мають такі параметри:

$$E_1 = 10 \text{ В}, E_2 = 12 \text{ В}, E_3 = 14 \text{ В}, E_4 = 16 \text{ В}, E_5 = 18 \text{ В}, E_6 = 20 \text{ В},$$

$$r_1 = 5 \text{ Ом}, r_2 = 6 \text{ Ом}, r_3 = 7 \text{ Ом}, r_4 = 8 \text{ Ом}, r_5 = 9 \text{ Ом}, r_6 = 10 \text{ Ом}.$$

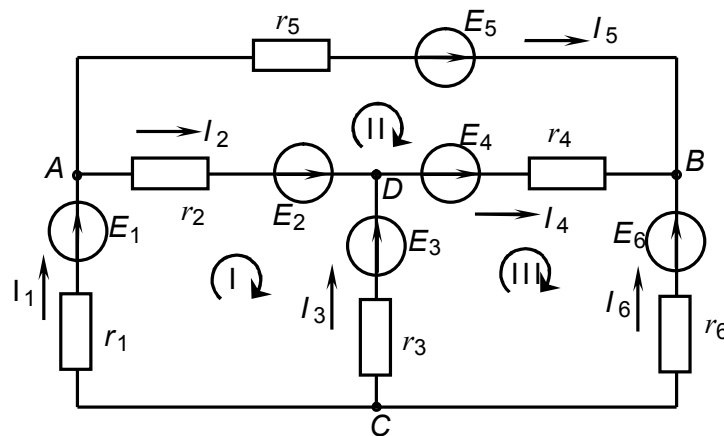


Рис. 2. Електрична схема кола з 4-ма вузлами і 3-ма незалежними контурами

Для визначення струмів в електричному колі (рис. 2) попередньо виконуємо заміну віток кола  $r_2E_2$ ,  $r_3E_3$  і  $r_4E_4$ , які з'єднані зіркою, еквівалентним трикутником – вітками  $r_{23}E_{23}$ ,  $r_{34}E_{34}$  і  $r_{24}E_{24}$ , відповідно до схеми рис. 3. Опори резисторів, з'єднаних трикутником, знаходимо за правилами перетворення пасивних “зірки” і “трикутника”:

$$r_{23} = \frac{1}{g_{23}} = \frac{r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4}{r_4} = \frac{146}{8} = 18,25 \text{ Ом}, \quad r_{24} = 20,9 \text{ Ом}, \quad r_{34} = 24,3 \text{ Ом}.$$

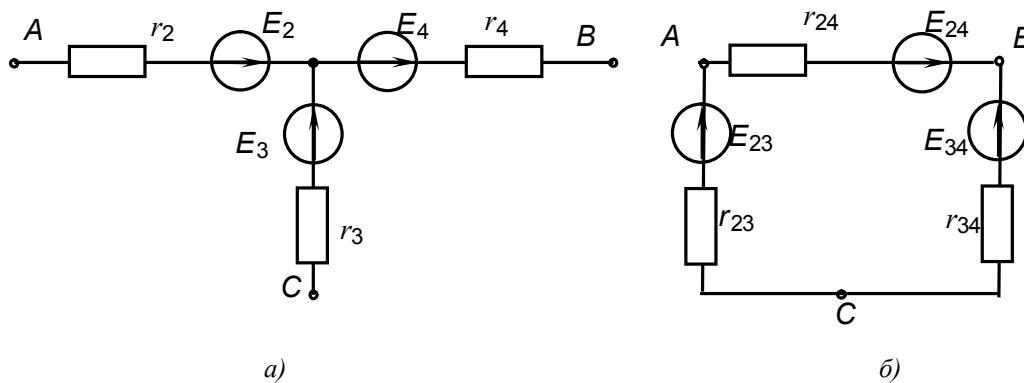


Рис. 3. Електричні схеми віток, з'єднаних "зіркою" – а і еквівалентних їм віток, з'єднаних "трикутником" – б

Значення еквівалентних ЕРС "трикутника" знаходимо з умови еквівалентності напруг на затискачах "зірки" і "трикутника" в режимі холостого ходу, при їх відключенні від інших елементів кола, зображеного на рис. 2:

$$E_{24} = E_2 + E_4 = 28 \text{ В}; \quad E_{23} = -E_2 + E_3 = 2 \text{ В}; \quad E_{34} = E_3 + E_4 = 30 \text{ В}.$$

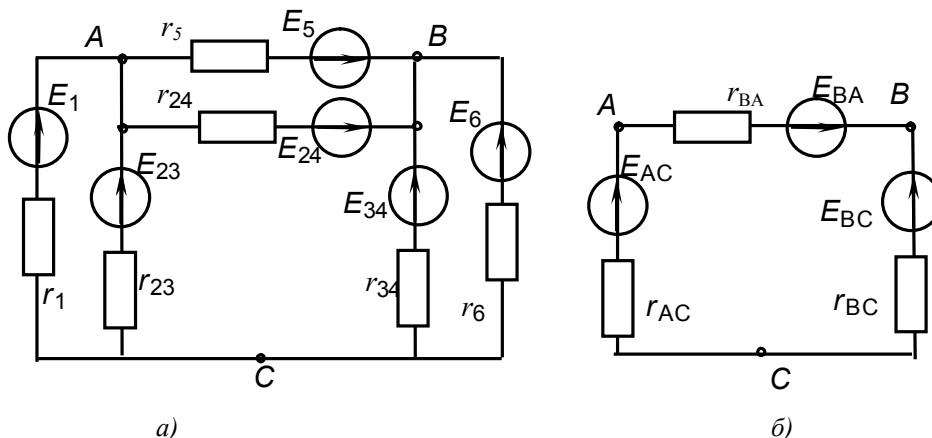


Рис. 4. Схема електрична кола з еквівалентним "трикутником" – а, після спрощення – б,

Одержане після заміни зірки" електричне коло, зображене на рис. 4, а має 6 віток, в кожній з яких є джерело напруги з послідовно увімкненим резистором, який можна вважати внутрішнім опором джерела живлення. Кожну з віток, як це показано на рис. 5, для віток з ЕРС  $E_1$  та  $E_{23}$ , можна замінити еквівалентним джерелом струму з паралельно увімкненою провідністю, як це показано на рис. 5, а, б, а кожні дві паралельно з'єднані вітки, можна замінити еквівалентним джерелом сумарної сили струму з паралельно увімкненою сумарною провідністю, показаними на рис. 5, в, яка також може бути замінена еквівалентним джерелом напруги з послідовно увімкненим резистором, як це показано на рис. 5, г:

$$r_{AC} = r_1 \cdot r_{23} / (r_1 + r_{23}) = 5 \cdot 18,23 / (5 + 18,23) = 3,92 \text{ Ом},$$

$$J_1 = E_1 / r_1 = 10 / 5 = 2 \text{ А}, \quad J_{23} = E_{23} / r_{23} = 2 / 18,25 \text{ А}, \quad J_{AC} = J_1 + J_{23} = 3,11 \text{ А},$$

$$E_{AC} = J_{AC} \cdot r_{AC} = 3,11 \cdot 3,92 = 8,27 \text{ В}.$$

Подібно замінюємо інші дві пари паралельних віток еквівалентними джерелами напруги з відповідними внутрішніми опорами, як показано на рис 4, б:

$$E_{AB} = (E_5 / r_5 + E_{24} / r_{24}) \cdot r_{AB} = 21,0 \text{ В}, \quad E_{BC} = (E_6 / r_6 + E_{34} / r_{34}) \cdot r_{BC} = 22,9 \text{ В},$$

$$r_{AB} = r_5 \cdot r_{24} / (r_5 + r_{24}) = 6,29 \text{ Ом}, \quad r_{BC} = r_6 \cdot r_{34} / (r_6 + r_{34}) = 7,08 \text{ Ом}.$$

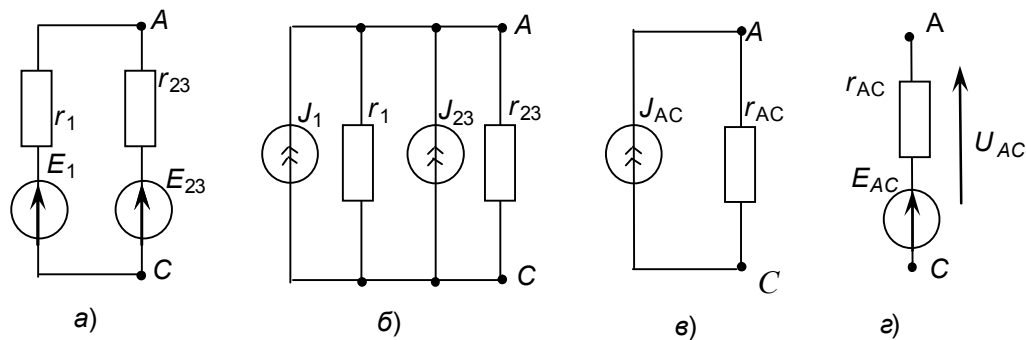


Рис. 5. Електрична схема двох паралельно з'єднаних віток з джерелами напруги — а; еквівалентних їм двох паралельно з'єднаних віток з джерелами струму — б; еквівалентної вітки з одним джерелом струму — в та еквівалентної вітки з джерелом напруги — г

Електричне коло, зображене на рис. 4, б, еквівалентне електричному колу, зображеному на рис. 3, при спрощенні якого залишилися незмінними потенціали точок А, В і С. В колі протікає струм  $I$ , який можна визначити за законом Ома:

$$I = \frac{E_{AC} + E_{AB} - E_{BC}}{r_{AC} + r_{AB} + r_{BC}} = \frac{8,27 + 21,0 - 22,9}{6,29 + 3,92 + 7,08} = \frac{6,38}{17,29} = 0,369 \text{ А.}$$

Визначаємо напруги  $U_{AC}$ ,  $U_{BC}$ ,  $U_{BA}$ :

$$\begin{aligned} U_{AC} &= E_{AC} - I \cdot r_{AC} = 8,27 - 0,369 \cdot 3,92 = 6,82 \text{ В,} \\ U_{BC} &= E_{BC} + I \cdot r_{BC} = 22,9 + 0,369 \cdot 7,08 = 25,51 \text{ В,} \\ U_{AB} &= E_{AB} - I \cdot r_{AB} = 21,0 - 0,369 \cdot 6,29 = 18,69 \text{ В.} \end{aligned}$$

Оскільки точки А, В і С схеми рис. 5, в співпадають з відповідними точками схеми рис. 2, визначені напруги є напругами, які діють в схемі рис. 2. За значеннями обчислених напруг визначаємо струми  $I_1$ ,  $I_5$  та  $I_6$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= (E_1 - U_{AC}) / r_1 = 3,18 / 5 = 0,636 \text{ А,} \quad I_5 = (E_5 - U_{BA}) / r_5 = -0,076 \text{ А,} \\ I_6 &= (E_6 - U_{BC}) / r_6 = -0,551 \text{ А.} \end{aligned}$$

Інші струми в електричному колі рис. 3 визначаємо за І законом Кірхгофа:

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1 - I_5 = 0,636 + 0,076 = 0,712 \text{ А,} \\ I_3 &= -(I_1 + I_6) = -0,085 \text{ А,} \\ I_4 &= -(I_5 + I_6) = 0,627 \text{ А.} \end{aligned}$$

Для перевірки проведеного розрахунку струмів методом еквівалентної заміни джерел живлення проведемо розрахунок методом контурних струмів. Вибрані незалежні контури кола і напрями їх обходу показані на рис. 2. Система рівнянь для визначення контурних струмів  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$  має вигляд:

$$\begin{aligned} r_{11}I_{11} + r_{12}I_{22} + r_{13}I_{33} &= E_{11}, \\ r_{21}I_{11} + r_{22}I_{22} + r_{23}I_{33} &= E_{22}, \\ r_{31}I_{11} + r_{32}I_{22} + r_{33}I_{33} &= E_{33}. \end{aligned}$$

Тут  $r_{11}$ ,  $r_{22}$ ,  $r_{33}$  — власні опори контурів,  $r_{12} = r_{21}$ ,  $r_{13} = r_{31}$ ,  $r_{23} = r_{32}$  — взаємні опори контурів,  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $E_{33}$  — власні ЕРС контурів:

$$\begin{aligned} r_{11} &= r_1 + r_2 + r_3 = 18, \quad r_{22} = r_2 + r_4 + r_5 = 23, \quad r_{33} = r_3 + r_4 + r_6 = 25, \\ r_{12} &= r_{21} = -r_2 = -6, \quad r_{13} = r_{31} = -r_3 = -7, \quad r_{23} = r_{32} = -r_4 = -8, \\ E_{11} &= E_1 + E_2 - E_3 = 8, \quad E_{22} = E_5 - E_4 - E_2 = -10, \quad E_{33} = E_3 + E_4 - E_6 = 10. \end{aligned}$$

Контурні струми знаходимо за правилом Крамера:

$$I_{11} = \Delta_1 / \Delta, \quad I_{22} = \Delta_2 / \Delta, \quad I_{33} = \Delta_3 / \Delta.$$

Тут  $\Delta$  — визначник системи рівнянь,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  — визначники, у яких відповідний стовпчик визначника  $\Delta$  замінено стовпчиком з вільних членів системи рівнянь;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 18 & -6 & -7 \\ -6 & 23 & -8 \\ -7 & -8 & 25 \end{vmatrix} = 18 \cdot 23 \cdot 25 - 6 \cdot 7 \cdot 8 - 6 \cdot 7 \cdot 8 - 23 \cdot 7 \cdot 7 - 8 \cdot 8 \cdot 18 - 6 \cdot 6 \cdot 25 = 6499.;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & -6 & -7 \\ -10 & 23 & -8 \\ 10 & -8 & 25 \end{vmatrix} = 4188,; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 18 & 8 & -7 \\ -6 & -10 & -8 \\ -7 & 10 & 25 \end{vmatrix} = -502,; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 18 & -6 & 8 \\ 6 & 23 & -10 \\ 7 & -8 & 10 \end{vmatrix} = 3592.$$

Контурні струми:  $I_{11} = 0,634$  А,  $I_{22} = -0,077$  А,  $I_{33} = 0,553$  А.

За величинами контурних струмів визначаємо струми у вітках електричного кола:

$$I_1 = I_{11} = 0,634, \quad I_2 = I_{11} - I_{22} = 0,711, \quad I_3 = -I_{11} + I_{33} = -0,081,$$

$$I_4 = -I_{22} + I_{33} = 0,630, \quad I_5 = I_{22} = -0,077, \quad I_6 = -I_{33} = -0,553.$$

Одержані результати добре співпадають з результатами розрахунку методом еквівалентної заміни джерел живлення.

**Висновки.** Проведений в роботі аналіз і виконані розрахунки свідчать про можливість використання для розрахунку електричних кіл методу еквівалентної заміни джерел живлення нарівні з іншими методами розрахунку складних електричних кіл. Метод еквівалентної заміни джерел живлення не потребує використання абстрактних понять, як власні та взаємні опори або провідності та ін., виконувани при розрахунку перетворення мають просту фізичну інтерпретацію, обчислення – помірну складність. В роботі використано перетворення активного триполюсника зі з'єднаними „зіркою” елементами в еквівалентний „трикутник”. Доцільність проведеного розрахунку еквівалентних ЕРС за умови еквівалентності напруг на затискачах триполюсників у режимі холостого ходу підтверджена результатами розрахунків.

#### ЛІТЕРАТУРА:

1. *Атабеков Г.И.* Теоретические основы электротехники. – Ч. 1. – М: Энергия, 1978. – 320 с.
2. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М: Высшая школа, 1984. – 559 с.
3. *Матханов П.Н.* Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. – М: Высшая школа, 1981. – 333 с.
4. *Каргополова Н.П.* Теорія електричних і магнітних кіл. – Ч. 1. – Житомир: ЖІТІ, 1999. – 239 с.
5. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. – М: Наука, 1964. – 608 с.

ЩЕНКО Василь Антонович – кандидат технічних наук, доцент кафедри автоматизації і комп'ютеризованих технологій Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– електроніка.

Подано 17.02.2007

Ищенко В.А. Розрахунок електричних кіл методом еквівалентної заміни джерел живлення.

Ищенко В.А. Расчет электрических цепей методом эквивалентной замены источников питания.

Ischenko V.A. Computation of the electrical circuits by the method of the equivalent substitution of the sources of power supply.

УДК 621.3.011.712

**Розрахунок електричних кіл методом еквівалентної заміни джерел живлення. / Ищенко В.А.**

В роботі розглянуто можливості спрощення складних електричних кіл методом еквівалентної заміни ідеалізованих джерел напруги з послідовними внутрішніми опорами і джерел струму з паралельними внутрішніми провідностями. Проведено порівняльний розрахунок електричних кіл методами контурних струмів, вузлових потенціалів та еквівалентної заміни джерел живлення. Останній не відрізняється складністю розрахунків. Наведено приклад розрахунку складного електричного кола із заміною еквівалентних джерел живлення та з'єднання пасивних і активних елементів зіркою еквівалентним трикутником.

УДК 621.3.011.712

**Расчет электрических цепей методом эквивалентной замены источников питания. / Ищенко В.А.**

В работе рассмотрено возможности упрощения сложных электрических цепей методом эквивалентной замены идеализирующих источников напряжения с последовательными внутренними сопротивлениями и источников тока с параллельными внутренними сопротивлениями. Проведено сравнительный расчет электрических цепей методами контурных токов, узловых потенциалов и эквивалентной замены источников питания. Первые два метода используют специфические понятия контурных токов, узловых потенциалов, собственных и взаимных сопротивлений и проводимостей. Последний метод не отличается сложностью расчетов. Показан пример расчета сложной электрической цепи с заменой эквивалентных источников питания и соединения пассивных и активных элементов звездой эквивалентным треугольником.

УДК 621.3.011.712

**Computation of the electrical circuits by the method of the equivalent substitution of the sources of power supply. / Ischenko V.A.**

The possibilities of simplification of the complex electrical circuits by the method of the equivalent substitution of the idealized voltage's sources with consecutive internal resistances and current's sources with parallel internal conductivity are considered in the given paper. The comparative computation of the electrical circuits by the methods of the loop currents, nodal potential and equivalent substitution of the sources of power supply were carried out. The last method isn't difficult in calculations. The computation of the complex electrical circuits with the substitution of the equivalent sources of power supply and the connection of the passive and active elements by the star equivalent to the triangle are given as an example.