УДК 531.383

О.О. Добржанський, аспір.
Житомирський державний технологічний університет

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ ГІРОСКОПІЧНОГО ДАТЧИКА ГРАВІТАЦІЙНОГО ПРИСКОРЕННЯ

(Представлено д.т.н., проф. Безвесільною О.М.)

В статті розглянуто варіант вирішення проблеми опису динаміки гіроскопічного датчика гравітаційного прискорення на базі гіроскопічного інтегратора лінійних прискорень, встановленого на рухомій платформі. Розроблена математична модель, яка враховує в загальному вигляді параметри руху платформи, тяжіння Землі, взаємне розміщення елементів приладу, масу гіромотора гіроскопа та рамок підвісу.

1. Постановка проблеми. Перспективним напрямком досліджень у галузях традиційного застосування гіроскопічних технологій є пошук шляхів підвищення точності гіроскопічних приладів. Водночас існують сучасні державні науково-дослідні програми під керівництвом Міністерства освіти і науки України, що стосуються нетрадиційного застосування гіроскопічних приладів: «Узагальнення та розвиток теорії та експериментальних основ створення гравіметричних засобів вимірювання з динамічним настроюванням», «Розробка та дослідження нового високоточного гравіметра для прецизійних навігаційних гравіметричних систем», які як альтернативу розглядають створення гравіметра на основі однороторного інтегруючого датчика гравітаційного прискорення (ОІДГП). ОІДГП ідентичний за конструкцією гіроскопічному інтегратору лінійних прискорень (ГІЛП) [1], [2]. Дослідження за даним напрямком потребують можливості достовірного прогнозування динаміки реакцій ОІДГП на різного роду збурення. Таку можливість забезпечує метод математичного моделювання.

2. Аналіз останніх досліджень. У доступних інформаційних джерелах математичні моделі гіроскопічних приладів розглядаються на основі наближених прецесійних рівнянь та із суттєвими спрощеннями: нехтуванням маси рамок підвісу та припущенням про рівність нулю першої локальної похідної кінетичного моменту кількості руху [3], [4]. В [4] дано пояснення про слабкість прецесійної теорії для точних досліджень гіроскопів і необхідність застосування в повному вигляді теореми про зміну кінетичного моменту кількості руху системи матеріальних точок.

3. **Загальна проблема.** Науковий інтерес представляє така математична модель (ММ) ОІДГП на рухомій платформі, яка б відображала динаміку руху основних елементів ОІДГП з урахуванням першої похідної кінетичного моменту, динамічних змін кута розходження рамок підвісу, змін моментів інерції елементів відносно головних осей.

4. Цілі статті. Описати основні етапи розробки ММ динаміки ОІДГП для випадку встановлення даного приладу на рухомій платформі. ММ представити у вигляді функцій:

$$\begin{cases} \alpha = f_\alpha\left(\alpha, \beta, \vec{\omega}, \vec{W}, t, M\left[m_i\right], M_r\left[\vec{r}_i\right], \vec{g}\right) \\ \beta = f_\beta\left(\alpha, \beta, \vec{\omega}, \vec{W}, t, M\left[m_i\right], M_r\left[\vec{r}_i\right], \vec{g}\right) \end{cases}, \qquad (1)$$

де α – кут повороту зовнішньої рамки ОІДГП відносно рухомої платформи; β – кут повороту внутрішньої рамки ОІДГП відносно зовнішньої рамки; $f_\alpha(\ldots)$, $f_\beta(\ldots)$ – функції, що описують динаміку α і β в часі; $\vec{\omega}$ – вектор миттєвої кутової швидкості рухомої платформи, де встановлено ОІДГП, відносно власної системи координат; $\vec{W}$ – вектор миттєвого абсолютного лінійного прискорення рухомої платформи; $M_m\left[m_i\right]$ – сукупність m_i мас *i*-тих матеріальних точок елементів ОІДГП; $M_r\left[\vec{r}_i\right]$ – сукупність векторів розташування *i*-тих матеріальних точок із масиву M_m відносно заданих центрів; $\vec{g}$ – вектор прискорення сили тяжіння в місці розташування ОІДГП на рухомій платформі.

5. Основна частина.

5.1. Припущення. Всі елементи ОІДГП абсолютно тверді тіла, між якими існує механічний зв'язок (підшипникові вузли) та електромеханічний зв'язок (система корекції за перпендикулярністю рамок); ОІДГП жорстко закріплений на рухомій платформі; головні елементи ОІДГП: підшипники зовнішнього підвісу, зовнішня рамка, підшипники внутрішнього підвісу, гіромотор (ротор + кожух); відцентрові моменти головних елементів відносно осей власних систем координат дорівнюють нулю; товщину ротора прийняти нульовою; центр мас гіромотора розміщений на осі обертання ротора; центр мас ротора лежить на осі його обертання; центр мас зовнішньої рамки співпадає з центром мас гіромотора при взаємо-перпендикулярному положенні осі обертання ротора та площини зовнішньої рамки; проекції кутових швидкостей та прискорень достатньо малі, щоб знехтувати їх добутками.

5.2. Визначення систем координат основних елементів ОІДГП та їх взаємного розташування.

$Gxyz$ – система координат ротора; $O_1X_1Y_1Z_1$ – кожуха; $OX_2Y_2Z_2$ – зовнішньої рамки; $O_0\xi_0\eta_0\varsigma_0$ – Землі (опорна: нерухома відносно нерухомих зірок); $0_n\xi\eta\varsigma$ – рухомої платформи; точки G, O, O_0, k співпадають з центрами мас відповідно ротора, зовнішньої рамки, Землі, кожуха; $Gxyz$ нерухома відносно $O_1X_1Y_1Z_1$; z співпадає з Z_1;

$$\left|\overline{O_1G}\right| = l_1,\ \left|\overline{O_1k}\right| = l_2,\ \left|\overline{O_1O}\right| = l,\ Y_1 \| Y_2 \| y, \tag{2}$$

X_2 співпадає з ξ; O співпадає з O_n; η_0 співпадає з віссю обертання Землі.

5.3. Складання рівнянь для осей зовнішнього та внутрішнього підвісу за теоремою про зміну кінетичного моменту системи матеріальних точок:

$$\tilde{d}\vec{K} / dt + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{M} - m_c \cdot (\vec{\rho} \times \vec{W}). \tag{3}$$

Якщо існує нерухома опорна система координат, а відносно неї змінює своє положення рухома система координат: $\vec{W}$ – вектор абсолютного лінійного прискорення центру рухомої системи; $\vec{\omega}$ – вектор кутової швидкості рухомої системи відносно нерухомої; $\vec{K}$ – кінетичний момент кількості руху рухомої системи координат відносно її центра; $\tilde{d}\vec{K} / dt$ – похідна вектора $\vec{K}$, обчислена відносно рухомої системи координат; m_c – маса рухомої системи; $\vec{M}$ – момент зовнішніх сил відносно центра рухомої системи координат; $\vec{\rho}$ – радіус вектор центру мас рухомої системи проведений з її центра.

Необхідно задіяти метод перерізів: розгляд окремо систем: «рухома платформа + ОІДГП» (1*), «зовнішня рамка + кожух + ротор» (2*), «кожух + ротор» (3*). Зміни в системі 2* не здійснюють якогось суттєвого впливу на систему 1*. Тобто вплив 1* на 2* набагато порядків більший ніж 2* на 1*. Саме тому $\vec{\omega}_{\xi\eta\varsigma}$ та $\vec{W}_{0_n}$ можливо вважати незалежними вхідними величинами для системи 2*, при визначенні $\vec{\omega}_{X_2Y_2Z_2}$ та $\vec{W}_0$. Вплив положення кожуха і ротора на рух зовнішньої рамки очевидний, тому ці елементи розглядаються як одна механічна система 2*, яка визначає вже $\vec{\omega}_{X_1Y_1Z_1}$ та $\vec{W}_{0_1}$. Останні служать вхідними величинами для системи 3*.

Рівняння (3) відносно осі Y_1 внутрішнього підвісу для системи 3* (центр в т.O_1):

$$\begin{aligned}\tilde{d}\left(\vec{K}_{0_1}\right)_{Y_1} / dt + \omega_{Z_1} \cdot \left(\vec{K}_{0_1}\right)_{X_1} - \omega_{X_1} \cdot \left(\vec{K}_{0_1}\right)_{Z_1} = \left(\vec{M}_{0_1}\right)_{Y_1} - \\ -\Big[\left(m_k \cdot \left(\vec{r}_{0_1.c.к}\right)_{Z_1} + m_г \cdot \left(\vec{r}_{0_1.c.г}\right)_{Z_1}\right) \cdot \left(\vec{W}_{0_1}\right)_{X_1} - \\ -\left(m_k \cdot \left(\vec{r}_{0_1.c.к}\right)_{X_1} + m_г \cdot \left(\vec{r}_{0_1.c.г}\right)_{X_1}\right) \cdot \left(\vec{W}_{0_1}\right)_{Z_1}\Big],\end{aligned} \tag{4}$$

рівняння (3) відносно осі X_2 зовнішнього підвісу для системи 2* (центр в т.O):

$$\begin{aligned}\tilde{d}\left(\vec{K}_0\right)_{X_2} / dt + \omega_{Y_2} \cdot \left(\vec{K}_0\right)_{Z_2} - \omega_{Z_2} \cdot \left(\vec{K}_0\right)_{Y_2} = \left(\vec{M}_0\right)_{X_2} - \\ \Big[\left(m_p \cdot \left(\vec{r}_{0.c.p}\right)_{Y_2} + m_k \cdot \left(\vec{r}_{0.c.к}\right)_{Y_2} + m_г \cdot \left(\vec{r}_{0.c.г}\right)_{Y_2}\right) \cdot \left(\vec{W}_{0_1}\right)_{Z_2} - \\ -\left(m_p \cdot \left(\vec{r}_{0.c.p}\right)_{Z_2} + m_k \cdot \left(\vec{r}_{0.c.к}\right)_{Z_2} + m_г \cdot \left(\vec{r}_{0.c.г}\right)_{Z_2}\right) \cdot \left(\vec{W}_0\right)_{Y_2}\Big],\end{aligned} \tag{5}$$

де $m_г$, $m_к$, $m_р$ – маси відповідно ротора гіроскопа, кожуха, зовнішньої рамки; $\left(\vec{r}_{0.c.г}\right)_{Y_2}$ – проекція на Y_2 радіус-вектора центра мас ротора гіроскопа, проведеного з центра O; (інші позначення розшифровуються аналогічно).

5.4. Визначення кінетичних моментів окремо для кожного елемента відносно центрів координат зовнішнього та внутрішнього підвісу.

Рівняння (5), (4) містять проекції вектора $\vec{K}_0$ (відносно центра O) на осі системи $OX_2Y_2Z_2$ та вектора $\vec{K}_{0_1}$ (відносно центра O_1) на осі системи $O_1X_1Y_1Z_1$. $\vec{K}_0$ визначається для системи 2*, а $\vec{K}_{0_1}$ – для 3*. Властивості визначення моментів кількості руху та конструкція ОІДГП дозволяють здійснити розподіл за елементами (індекси: г – ротор гіроскопа; к – кожух; р – зовнішня рамка) та за причинами руху даних елементів (індекси: $\vec{\omega}_{X_1}$, $\vec{\omega}_{Y_1}$, $\vec{\omega}_{Z_1}$, $\vec{\omega}_{X_2}$, $\vec{\omega}_{Y_2}$, $\vec{\omega}_{Z_2}$ – елементи (проекції) кутових швидкостей;

$\dot{\beta}$ – швидкість повороту гіромотора (системи $O_1X_1Y_1Z_1$) відносно зовнішньої рамки (системи $OX_2Y_2Z_2$); $\dot{\gamma}$ – швидкість обертання ротора гіроскопа):

$$\vec{K}_0 = \vec{K}_{0.г} + \vec{K}_{0.к} + \vec{K}_{0.p}, \quad (6)$$

$$\vec{K}_{0.г} = \vec{K}_{0.г}^{\omega_{X2}} + \vec{K}_{0.г}^{\omega_{Y2}} + \vec{K}_{0.г}^{\omega_{Z2}} + \vec{K}_{0.г}^{\dot{\beta}} + \vec{K}_{0.г}^{\dot{\gamma}}, \quad (7)$$

$$\vec{K}_{0.к} = \vec{K}_{0.к}^{\omega_{X2}} + \vec{K}_{0.к}^{\omega_{Y2}} + \vec{K}_{0.к}^{\omega_{Z2}} + \vec{K}_{0.к}^{\dot{\beta}}, \quad (8)$$

$$\vec{K}_{0.p} = \vec{K}_{0.p}^{\omega_{X2}} + \vec{K}_{0.p}^{\omega_{Y2}} + \vec{K}_{0.p}^{\omega_{Z2}}. \quad (9)$$

При визначенні $\vec{K}_{0_1}$ враховуються тільки елементи системи 3*:

$$\vec{K}_{0_1} = \vec{K}_{0_1.г} + \vec{K}_{0_1.к}, \quad (10)$$

$$\vec{K}_{0_1.г} = \vec{K}_{0_1.г}^{\omega_{X1}} + \vec{K}_{0_1.г}^{\omega_{Y1}} + \vec{K}_{0_1.г}^{\omega_{Z1}} + \vec{K}_{0_1.г}^{\dot{\gamma}}, \quad (11)$$

$$\vec{K}_{0_1.к} = \vec{K}_{0_1.к}^{\omega_{X1}} + \vec{K}_{0_1.к}^{\omega_{Y1}} + \vec{K}_{0_1.к}^{\omega_{Z1}}. \quad (12)$$

Розкриємо для прикладу деякі вектори:

$$\vec{K}_{0.г}^{\omega_{X2}} = \int_{m_г} \left(\vec{r}_{0.г} \times \vec{V}^{\omega_{X2}}\right) dm_г = \int_{m_г} \left(\vec{r}_{0.г} \times \left(\vec{\omega}_{X_2} \times \vec{r}_{0.г}\right)\right) dm_г, \quad (13)$$

$$\vec{K}_{0.г}^{\dot{\beta}} = \int_{m_г} \left(\vec{r}_{0.г} \times \vec{V}^{\dot{\beta}}\right) dm_г = \int_{m_г} \left(\vec{r}_{0.г} \times \left(\vec{\dot{\beta}} \times \vec{r}_{0_1.г}\right)\right) dm_г, \quad (14)$$

$$\vec{K}_{0.г}^{\dot{\gamma}} = \int_{m_г} \left(\vec{r}_{0.г} \times \vec{V}^{\dot{\gamma}}\right) dm_г = \int_{m_г} \left(\vec{r}_{0.г} \times \left(\vec{\dot{\gamma}} \times \vec{r}_{G.г}\right)\right) dm_г. \quad (15)$$

При підстановці в (4), (5) необхідне представлення в проекціях:

$$\begin{aligned}
\vec{K}_{0.г}^{\omega_{X2}} &= \int_{m_г} \left(\vec{r}_{0.г} \times \vec{V}^{\omega_{X2}}\right) dm_г = \\
&= \int_{m_г} \left[\left(\vec{r}_{0.г}\right)_{Z_2} \cdot \left(\vec{\omega}_{X_2} \times \vec{r}_{0.г}\right)_{X_2} - \left(\vec{r}_{0.г}\right)_{X_2} \cdot \left(\vec{\omega}_{X_2} \times \vec{r}_{0.г}\right)_{Z_2}\right] dm_г = \\
&= \int_{m_г} \Big\{ \left(\vec{r}_{0.г}\right)_{Z_2} \cdot \left[\left(\vec{\omega}_{X_2}\right)_{Y_2} \cdot \left(\vec{r}_{0.г}\right)_{Z_2} - \left(\vec{\omega}_{X_2}\right)_{Z_2} \cdot \left(\vec{r}_{0.г}\right)_{Y_2}\right] - \\
&\qquad - \left(\vec{r}_{0.г}\right)_{X_2} \cdot \left[\left(\vec{\omega}_{X_2}\right)_{X_2} \cdot \left(\vec{r}_{0.г}\right)_{Y_2} - \left(\vec{\omega}_{X_2}\right)_{Y_2} \cdot \left(\vec{r}_{0.г}\right)_{X_2}\right] \Big\} dm_г = \\
&= -\int_{m_г} \left(\vec{r}_{0.г}\right)_{X_2} \cdot \left(\vec{\omega}_{X_2}\right)_{X_2} \cdot \left(\vec{r}_{0.г}\right)_{Y_2} dm_г = -\omega_{X_2} \cdot \int_{m_г} \left(\vec{r}_{0.г}\right)_{X_2} \cdot \left(\vec{r}_{0.г}\right)_{Y_2} dm_г = -\omega_{X_2} \cdot I_{г.X_2Y_2}.
\end{aligned} \quad (16)$$

При знаходженні $\vec{K}_0$ та $\vec{K}_{0_1}$ виникають подібні (16) інтеграли:

$$\int_{m_p} \left[\left(\vec{r}_{0.p}\right)_{X_2} \cdot \left(\vec{r}_{0.p}\right)_{X_2} + \left(\vec{r}_{0.p}\right)_{Y_2} \cdot \left(\vec{r}_{0.p}\right)_{Y_2}\right] dm_p = I_{p.Z_2}, \quad (17)$$

$$\int_{m_к} \left[\left(\vec{r}_{0_1.к}\right)_{Y_1} \cdot \left(\vec{r}_{0_1.к}\right)_{Y_1} + \left(\vec{r}_{0_1.к}\right)_{Z_1} \cdot \left(\vec{r}_{0_1.к}\right)_{Z_1}\right] dm_к = I_{к.X_1}, \quad (18)$$

$$\int_{m_к} \left[\left(\vec{r}_{0.к}\right)_{X_2} \cdot \left(\vec{r}_{0.к}\right)_{Z_2}\right] dm_к = I_{к.X_2Z_2}, \quad (19)$$

$$\int_{m_г} \left[\left(\vec{r}_{0.г}\right)_{Y_2} \cdot \left(\vec{r}_{0.г}\right)_{Y_2} + \left(\vec{r}_{0.г}\right)_{Z_2} \cdot \left(\vec{r}_{0.г}\right)_{Z_2}\right] dm_г = I_{г.X_2}, \quad (20)$$

$$\int_{m_г} \left[\left(\vec{r}_{0.г}\right)_{Y_2} \cdot \left(\vec{r}_{G.г}\right)_{Y_2}\right] dm_г = I_{г.0Y_2-GY_2}, \quad (21)$$

$$\int_{m_к} \left[\left(\vec{r}_{0.к}\right)_{Y_2} \cdot \left(\vec{r}_{0_1.к}\right)_{Z_2}\right] dm_к = I_{к.0Y_2-0_1Z_2}. \quad (22)$$

Інтеграли (17), (18) не змінюються в часі, оскільки взяті за векторами, розташованими в нерухомих відносно елементів системах координат, їх суть – осеві моменти інерції. Інтеграли (19), (20) з'являються при визначенні $\vec{K}_{0.к}^{\omega_{X2}}$, $\vec{K}_{0.к}^{\omega_{Y2}}$, $\vec{K}_{0.к}^{\omega_{Z2}}$, $\vec{K}_{0.г}^{\omega_{X2}}$, $\vec{K}_{0.г}^{\omega_{Y2}}$, $\vec{K}_{0.г}^{\omega_{Z2}}$. Інтеграли (21), (22) – при визначенні $\vec{K}_{0.г}^{\dot{\beta}}$,

$\vec{K}^{\dot{\gamma}}_{0.г}$, $\vec{K}^{\dot{\beta}}_{0.к}$. Інтеграли (19)–(22) непостійні в часі, оскільки ротор та кожух змінюють положення відносно $OX_2Y_2Z_2$. Далі подібні інтеграли позначатимемо аналогічно (17)–(22).

5.5. Визначення осьових моментів інерції через моменти інерції відносно осей систем координат, заданих для кожного елемента.

Застосуємо співвідношення між проекціями векторів:

$$\left(\vec{r}_{0_1.к}\right)_{X_2} = \left(\vec{r}_{0_1.к}\right)_{X_1} \cdot \cos\beta + \left(\vec{r}_{0_1.к}\right)_{Z_1} \cdot \sin\beta = \left(\vec{r}_{0.к}\right)_{X_2}, \quad (23)$$

$$\left(\vec{r}_{0_1.к}\right)_{Y_2} = \left(\vec{r}_{0_1.к}\right)_{Y_1} = \left(\vec{r}_{0.к}\right)_{Y}, \quad (24)$$

$$\left(\vec{r}_{0_1.к}\right)_{Z_2} = \left(\vec{r}_{0_1.к}\right)_{Z_1} \cdot \cos\beta - \left(\vec{r}_{0_1.к}\right)_{X_1} \cdot \sin\beta = \left(\vec{r}_{0.к}\right)_{Z_2} + l, \quad (25)$$

$$\left(\vec{r}_{0_1.г}\right)_{X_1} = \left(\vec{r}_{G.г}\right)_{x} = \left(\vec{r}_{G.г}\right)_{X_1} = \left(\vec{r}_{G.г}\right)_{X_2} / \cos\beta, \quad (26)$$

$$\left(\vec{r}_{0_1.г}\right)_{Y_1} = \left(\vec{r}_{G.г}\right)_{y} = \left(\vec{r}_{G.г}\right)_{Y_1} = \left(\vec{r}_{G.г}\right)_{Y_2}, \quad (27)$$

$\left(\vec{r}_{0_1.г}\right)_{Z_1} = l$, $\left(\vec{r}_{G.г}\right)_{z} = 0$, (ротор плоский; див. припущення), (28)

$$\left(\vec{r}_{0.г}\right)_{X_2} = l_1 \cdot \sin\beta + \left(\vec{r}_{G.г}\right)_{x} \cdot \cos\beta = \left(\vec{r}_{0_1.г}\right)_{X_2}, \quad (29)$$

$$\left(\vec{r}_{0.г}\right)_{Z_2} = -l + l_1 \cdot \cos\beta - \left(\vec{r}_{G.г}\right)_{x} \cdot \sin\beta = -l + \left(\vec{r}_{0_1.г}\right)_{Z_2}. \quad (30)$$

Визначимо наприклад $\left(\vec{K}_0\right)_{X_2}$:

$$\begin{aligned}\left(\vec{K}_0\right)_{X_2} &= \omega_{X_2} \cdot \left(I_{р.X_2} + I_{к.X_2} + I_{г.X_2}\right) + \omega_{Y_2} \cdot \left(-I_{р.Y_2X_2} - I_{к.Y_2X_2} - I_{г.Y_2X_2}\right) + \\ &+ \omega_{Z_2} \cdot \left(-I_{р.Z_2X_2} - I_{к.Z_2X_2} - I_{г.Z_2X_2}\right) + \dot{\beta} \cdot \left(-I_{к.0Y_2-0_1X_2} - I_{г.0Y_2-0_1X_2}\right) + \\ &+ \dot{\gamma} \cdot \left(I_{г.0Y_2-GY_2} \cdot \sin\beta - I_{г.0Z_2-GX_2} \cdot \cos\beta + I_{г.0Z_2-GZ_2} \cdot \sin\beta\right).\end{aligned} \quad (31)$$

З врахуванням (17)–(31) та припущень:

$$\begin{aligned}\left(\vec{K}_0\right)_{X_2} &= \omega_{X_2} \cdot \Big(I_{р.X_2} + \big(I_{к.II.Y_1} + l^2 \cdot m_к + I_{к.III.Z_1} \cdot \cos^2\beta + I_{к.I.X_1} \cdot \sin^2\beta - \\ &-2 \cdot l \cdot m_к \cdot l_2 \cdot \cos\beta\big) - \big(I_{г.II.y} + l^2 \cdot m_г \cdot \cos^2\beta + I_{г.I.x} \cdot \sin^2\beta - 2 \cdot l \cdot l_1 \cdot m_г \cdot \cos\beta\big)\Big) - \\ &- \omega_{Z_2} \cdot \Big(\big(-l \cdot l_2 \cdot m_к \cdot \sin\beta + 0{,}5 \cdot \sin 2\beta \cdot \left(I_{к.III.Z_1} - I_{к.I.X_1}\right)\big) + \\ &+ \big(0{,}5 \cdot \sin 2\beta \cdot \left(l^2 \cdot m_г - I_{г.I.x}\right) - l \cdot m_г \cdot l_1 \cdot \sin\beta\big)\Big) + \\ &+ \dot{\gamma} \cdot \left(I_{г.II.y} \cdot \sin\beta + I_{г.I.x} \cdot 0{,}5 \cdot \sin 2\beta \cdot \cos\beta + I_{г.I.x} \cdot \sin^3\beta\right),\end{aligned} \quad (32)$$

де індекси «I, II, III» вказують на планарні моменти інерції елементів відносно вказаних із ними осей.

5.6. Визначення проекцій кутових швидкостей та прискорень.

Враховуємо робочий поворот системи координат зовнішньої рамки $OX_2Y_2Z_2$ на кут α відносно системи координат рухомої платформи $O_n\xi\eta\zeta$, а також робочий поворот на кут β системи координат кожуха $O_1X_1Y_1Z_1$ відносно системи координат зовнішньої рамки $OX_2Y_2Z_2$:

$$\omega_{X_2} = \omega_\xi + \dot{\alpha} , \tag{33}$$

$$\omega_{Y_2} = \omega_\eta \cdot \cos\alpha + \omega_\zeta \cdot \sin\alpha , \tag{34}$$

$$\omega_{Z_2} = -\omega_\eta \cdot \sin\alpha + \omega_\zeta \cdot \cos\alpha , \tag{35}$$

$$\omega_{X_1} = \left(\omega_\xi + \dot{\alpha}\right) \cdot \cos\beta + \omega_\eta \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta - \omega_\zeta \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta , \tag{36}$$

$$\omega_{Y_1} = \omega_\eta \cdot \cos\alpha + \omega_\zeta \cdot \sin\alpha + \dot{\beta} , \tag{37}$$

$$\omega_{Z_1} = \left(\omega_\xi + \dot{\alpha}\right) \cdot \sin\beta - \omega_\eta \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta + \omega_\zeta \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta . \tag{38}$$

У пункті 5.2 введена опорна система $O_0\xi_0\eta_0\varsigma_0$. Якщо існують прилади, що визначають положення системи $O_n\xi\eta\zeta$ відносно $O_0\xi_0\eta_0\varsigma_0$ (наприклад навігаційна система+вимірювач висоти), то можливо визначити $\vec{W}_{0_n}$. Для жорсткого закріплення підвісу зовнішньої рамки на рухомій платформі так, що т. O_n співпадає з т. O :

$$\vec{W}_0 = \vec{W}_{0_n} . \tag{39}$$

Для знаходження $\vec{W}_{0_1}$ необхідно врахувати взаємне розташування $O_1X_1Y_1Z_1$ та $OX_2Y_2Z_2$ (п. 5.2):

$$\vec{V}_{0_1} = \vec{V}_0 + \vec{\omega}_{X_2Y_2Z_2} \times \vec{\rho}_{0-0_1} , \tag{40}$$

$$\vec{W}_{0_1} = d\vec{V}_0 / dt = \vec{W}_0 + \left(\vec{d\omega}_{X_2Y_2Z_2} / dt\right) \times \vec{\rho}_{0-0_1} + \vec{\omega}_{X_2Y_2Z_2} \times \left(\vec{\omega}_{X_2Y_2Z_2} \times \vec{\rho}_{0-0_1}\right) , \tag{41}$$

$$\left(\vec{\rho}_{0-0_1}\right)_{X_2} = 0 ,\ \left(\vec{\rho}_{0-0_1}\right)_{Y_2} = 0 ,\ \left(\vec{\rho}_{0-0_1}\right)_{Z_2} = l , \tag{42}$$

$$\left\{W_\xi ; W_\eta ; W_\zeta\right\} = \vec{W}_0 = \vec{W}_{0_n} ,\ \left\{\omega_\xi ; \omega_\eta ; \omega_\zeta\right\} = \vec{\omega}_{\xi\eta\zeta} . \tag{43}$$

5.7. Знаходження моментів зовнішніх сил відносно осей зовнішнього та внутрішнього підвісів.

$$\left(\vec{M}_{0_1}\right)_{Y_1} = -f_1 \cdot \dot{\beta} - M_{T1} \cdot \operatorname{sign}\left(\dot{\beta}\right) + \left(\vec{M}^{\,p}_{0_1}\right)_{Y_1} , \tag{44}$$

$$\left(\vec{M}_0\right)_{X_2} = -f_2 \cdot \dot{\alpha} - M_{T2} \cdot \operatorname{sign}\left(\dot{\alpha}\right) + \left(\vec{M}^{\,p}_0\right)_{X_2} + \left(-K_k\right) \cdot \beta , \tag{45}$$

де $f_1 \cdot \dot{\beta}$, $f_2 \cdot \dot{\alpha}$ – моменти сил в'язкого тертя у підвісах внутрішньої та зовнішньої рамок; $M_{T1} \cdot \operatorname{sign}\left(\dot{\beta}\right), M_{T2} \cdot \operatorname{sign}\left(\dot{\alpha}\right)$ – моменти сил сухого тертя в підвісах внутрішньої та зовнішньої рамок; $\left(\vec{M}^{\,p}_{0_1}\right)_{Y_1}$, $\left(\vec{M}^{\,p}_0\right)_{X_2}$ – моменти сили тяжіння; $\left(-K_k\right) \cdot \beta$ – корекційний момент, створюваний відносно осі зовнішнього підвісу системою корекції для забезпечення перпендикулярності осі обертання ротора до осі зовнішнього підвісу (від'ємний знак обрано за правилом Резаля [3]).

$$\begin{aligned}\left(\vec{M}^{\,p}_{0_1}\right)_{Y_1} = &\left[\left(m_k \cdot \left(\vec{r}_{0_1.c.к}\right)_{Z_1} + m_г \cdot \left(\vec{r}_{0_1.c.г}\right)_{Z_1}\right)\right] \cdot \left(\vec{g}\right)_{X_1} - \\ &-\left[\left(m_k \cdot \left(\vec{r}_{0_1.c.к}\right)_{X_1} + m_г \cdot \left(\vec{r}_{0_1.c.г}\right)_{X_1}\right)\right] \cdot \left(\vec{g}\right)_{Z_1} ,\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{M}^{\,p}_0\right)_{X_2} = &\left[\left(m_p \cdot \left(\vec{r}_{0.c.p}\right)_{Y_2} + m_k \cdot \left(\vec{r}_{0.c.к}\right)_{Y_2} + m_г \cdot \left(\vec{r}_{0.c.г}\right)_{Y_2}\right)\right] \cdot \left(\vec{g}\right)_{Z_2} - \\ &-\left[\left(m_p \cdot \left(\vec{r}_{0.c.p}\right)_{Z_2} + m_k \cdot \left(\vec{r}_{0.c.к}\right)_{Z_2} + m_г \cdot \left(\vec{r}_{0.c.г}\right)_{Z_2}\right)\right] \cdot \left(\vec{g}\right)_{Y_2} ,\end{aligned} \tag{47}$$

де індекс «с» позначає радіуси-вектори центрів мас елементів відносно вказаних центрів.

Коли проекції всіх необхідних векторів виражені через незмінні елементи та змінні в часі величини, а також конструктивні величини, можливо здійснити представлення рівнянь (5), (4) в розгорнутому вигляді.

5.8. Приведення спільних множників та розв'язок системи рівнянь для отримання виразів $\alpha(t)$, $\beta(t)$.

Після підстановки всіх складових в рівняння (4) та (5) виконуємо розкриття дужок та приведення спільних множників для α, β, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\ddot{\alpha}$, $\ddot{\beta}$. При цьому отримуємо систему двох диференціальних рівнянь, яка в операторному вигляді:

$$\begin{cases} \alpha \cdot \left[A_2 \cdot p^2 + B_2 \cdot p + C_2 \right] + \beta \cdot \left[D_2 \cdot p^2 + E_2 \cdot p + F_2 \right] = G_2 \\ \alpha \cdot \left[A_1 \cdot p^2 + B_1 \cdot p + C_1 \right] + \beta \cdot \left[D_1 \cdot p^2 + E_1 \cdot p + F_1 \right] = G_1 \end{cases}, \tag{48}$$

Розв'язок відносно невідомих α та β:

$$\alpha = \frac{\left[D_2 \cdot p^2 + E_2 \cdot p + F_2 \right] \cdot G_2 - \left[D_2 \cdot p^2 + E_2 \cdot p + F_2 \right] \cdot G_1}{\Delta}, \tag{50}$$

$$\beta = \frac{\left[A_2 \cdot p^2 + B_2 \cdot p + C_2 \right] \cdot G_1 - \left[A_1 \cdot p^2 + B_1 \cdot p + C_1 \right] \cdot G_2}{\Delta}, \tag{51}$$

$$\begin{aligned} \Delta = {} & \left[A_2 \cdot p^2 + B_2 \cdot p + C_2 \right] \cdot \left[D_1 \cdot p^2 + E_1 \cdot p + F_1 \right] - \\ & - \left[A_1 \cdot p^2 + B_1 \cdot p + C_1 \right] \cdot \left[D_2 \cdot p^2 + E_2 \cdot p + F_2 \right]. \end{aligned} \tag{52}$$

Отже отримана загальна модель динаміки ОІДГП. Її окремий випадок: $\beta \to 0$, $\cos\beta \to 1$, $\sin\beta \to \beta$, $l = l_1 = l_2$ (центр мас гіромотора лежить на відстані l від т.O_1 на осі Z_1) $\Rightarrow$ т.k співпадає з т.G, гіромотор симетричний відносно осей x, y:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{p \cdot (B \cdot p + f_1) \cdot M_2 - (H \cdot p + K_k) \cdot \left(-m_{г+к} \cdot l \cdot \left(W_\xi - g_\xi \right) + M_1 \right)}{p \cdot \left(A \cdot B \cdot p^3 + (A \cdot f_1 + B \cdot f_2) \cdot p^2 + \left(f_1 \cdot f_2 + H^2 \right) \cdot p + H \cdot K_k \right)} \\ \beta = \dfrac{p \cdot (A \cdot p + f_2) \cdot \left(-m_{г+к} \cdot l \cdot \left(W_\xi - g_\xi \right) + M_1 \right) - (-H \cdot p) \cdot M_2}{p \cdot \left(A \cdot B \cdot p^3 + (A \cdot f_1 + B \cdot f_2) \cdot p^2 + \left(f_1 \cdot f_2 + H^2 \right) \cdot p + H \cdot K_k \right)} \end{cases}, \tag{52}$$

$$A = I_{X_2.р} + I_{x.к} + I_{x.г}, \; H = \dot{\gamma} \cdot I_{z.г}, \; m_{г+к} = m_г + m_к, \tag{53}$$

$$B = I_{Y_1.к} + I_{Y_1.г}, \tag{54}$$

$$\begin{aligned} M_1 = {} & -l \cdot (m_к + m_г) \cdot \left(\left(W_\eta - g_\eta \right) \cdot \sin\alpha - \left(W_\zeta - g_\zeta \right) \cdot \cos\alpha \right) \cdot \beta - \\ & -B^I \cdot \left(\dot{\omega}_\eta \cdot \cos\alpha + \dot{\omega}_\zeta \cdot \sin\alpha \right) + H \cdot \left(\omega_\xi + \left(\omega_\eta \cdot \sin\alpha - \omega_\zeta \cdot \cos\alpha \right) \cdot \beta \right) - M_{T1} \cdot \mathrm{sign}\left(\dot{\beta} \right), \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} M_2 = {} & -A \cdot \dot{\omega}_\xi - H \cdot \left(\omega_\eta \cdot \cos\alpha + \omega_\varsigma \cdot \sin\alpha \right) + N \cdot \left(-\dot{\omega}_\eta \cdot \sin\alpha + \dot{\omega}_\zeta \cdot \cos\alpha \right) \cdot \beta - \\ & - M_{T2} \cdot \mathrm{sign}\left(\dot{\alpha} \right), \end{aligned} \tag{56}$$

$$B^I = \left(B - l^2 \cdot (m_к + m_г) \right), \tag{57}$$

$$N = \left(-l^2 \cdot (m_к + m_г) + \left(I_{III.Z_1.к} + I_{III.z.г} \right) - \left(I_{I.X_1.к} + I_{I.x.г} \right) \right). \tag{58}$$

6. Висновки.

– Математичне моделювання динаміки однороторного інтегруючого датчика гравітаційного прискорення (ОІДГП) – процес, який важко формалізувати, і він потребує великого обсягу проміжних обчислень.

– Рівняння, що описують вихід математичної моделі, є системою нелінійних диференціальних рівнянь і потребують розв'язку чисельними методами із застосуванням ЕОМ.

– Конструкція розглянутого приладу є узагальненням конструкцій двостепеневих гіроскопічних приладів із збалансованим ротором, тому отриманій математичній моделі (ММ) притаманна узагальнююча властивість. Варіюючи конструктивні параметри можливо отримати ММ інтегруючого гіроскопа, а також гіроскопічних вимірювачів кутових переміщень. На основі отриманої ММ можливо синтезувати ММ двороторного гіроскопічного інтегратора лінійних прискорень, а також двогіроскопних приладів даного типу (наприклад двороторний гравіметр та двогіроскопний гравіметр).

– Вищезазначене вказує на важливість представлення ММ ОІДГП, а також важливість розкриття самої методики побудови ММ в даному випадку.

– Отримана ММ динаміки ОІДГП, введена в ЕОМ, дозволяє здійснити:

· аналіз характеристик вихідного сигналу ОІДГП в різних умовах експлуатації;

· оцінити ступінь впливу збурюючих факторів на динаміку ОІДГП в числовому форматі;
· оцінити ступінь наближення представленої ММ щодо представленої без спрощень ММ;
· здійснити перехід від теоретичного рівня досліджень до емпіричного для оцінки адекватності відображення динаміки реальних дослідних зразків за допомогою представленої ММ.

ЛІТЕРАТУРА:

1. *Безвесільна О.М.* Вимірювач прискорень: Підручник. – К.: Либідь, 2001. – 264 с.
2. *Одинцов А.А.* Методические указания по проектированию гироскопических интеграторов линейных ускорений. – Киев: КПИ, 1981. – 51 с.
3. *Павловский М.А., Путята Т.В.* Теоретическая механика. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1985. – 328 с.
4. *Ишлинский А.Ю., Борзов В.И., Степаненко Н.П.* Лекции по теории гироскопов. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 248 с.

ДОБРЖАНСЬКИЙ Олександр Олексійович – аспірант кафедри автоматизації і комп'ютеризованих технологій факультету інформаційно-комп'ютерних технологій Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

– гравіметричні прилади і системи;

– математичне моделювання систем автоматичного керування та управління.

Тел.: 8(0412)229195.

Подано 20.10.2006.

Добржанський О.О. Математична модель динаміки гіроскопічного датчика гравітаційного прискорення

Добржанский А.А. Математическая модель динамики гироскопического датчика гравитационного ускорения

Dobrzhansky O.O. Mathematical Model of Gravitational Acceleration Gyroscope

УДК 531.383

Математична модель динаміки гіроскопічного датчика гравітаційного прискорення /О.О. Добржанський

В статті розглянуті динамічні процеси рухомих елементів гіроскопічного гравіметра на базі гіроскопічного інтегратора лінійних прискорень, встановленого на рухомій платформі. В математичній моделі враховані параметри руху платформи, тяжіння Землі, взаємо-розміщення елементів приладу, маса гіромотора та рамок підвісу.

УДК 531.383

Математическая модель динамики гироскопического датчика гравитационного ускорения /А.А Добржанский

В статье рассмотрены динамические процессы подвижных элементов гироскопического гравиметра на базе гироскопического интегратора линейных ускорений, установленного на подвижной платформе. В математической модели учтены параметры движения платформы, сила притяжения Земли, взаимоположение элементов прибора, масса гиромотора и рамок подвеса.

УДК 531.383

Mathematical Model of Gravitational Acceleration Gyroscope /O.O. Dobrzhansky

The article deals with the dynamic processes of the gyrogravimeter on the basis of linear acceleration gyroscopic integrator mounted on the movable platform. The elements taken into consideration in the model are as follows: platform movement parameters, gravitation, disposition of the device elements, gyromotor mass and gimbals mass.